第 44 卷 第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 12 月
Vol. 44　No. 12　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Dec.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.12.008

强一致收敛条件下拟弱几乎周期性和序列跟踪性的研究①

冀占江

梧州学院 大数据与软件工程学院/广西高校图像处理与智能信息系统重点实验室，广西 梧州 543002

摘要：在强一致收敛条件下研究了序列映射与极限映射之间关于拟弱几乎周期性和序列跟踪性的动力学性质. 利用强一致收敛和等度连续的性质，得到如下结果：(i) 设序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于等度连续映射 f，且点列$\{x_k\}$是每个映射 f_n 的拟弱几乎周期点，若$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$，则 x 是 f 的拟弱几乎周期点；(ii) 若序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于等度连续映射 f，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sup QW(f_n) \subset QW(f)$；(iii) 设序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于 f，若 f_n 具有 fine 序列跟踪性，则 f 具有序列跟踪性. 这些结果丰富了强一致收敛条件下拟弱几乎周期性和序列跟踪性的理论.

关　键　词：拟弱几乎周期点；序列跟踪性；等度连续；强一致收敛

中图分类号：O189.11　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2019)12-0040-05

一致收敛是数学分析及拓扑学中非常重要的概念. 我们知道，部分序列函数的性质在一致收敛条件下可以被遗传到极限函数，例如连续性、黎曼积分、不动点、链回归点等，然而很多动力学性质在一致收敛的情况下并不能被遗传到极限函数，例如拓扑传递性[1]、初值敏感性[2] 等. 为了研究序列函数和极限函数之间的动力学关系，文献[3]给出了比一致收敛更强的条件，即强一致收敛，从此很多学者开始在强一致收敛条件下研究序列函数和极限函数之间的动力学性质，得到了许多成果[4-13]. 例如文献[4]证明了在强一致收敛条件下，若序列函数是拓扑传递的，则极限函数也是拓扑传递的，同时给出了一个拓扑传递不能被一致收敛所遗传的例子；文献[5]证明了若序列映射$\{f_n\}$是 Li-Yorke 混沌，在强一致收敛条件下，其极限函数 f 也是 Li-Yorke 混沌；文献[6]证明了若序列函数是渐近周期的，在强一致收敛条件下，其极限函数也是渐近周期的；文献[7]证明了在强一致收敛条件下，$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} QW(f_n)$是$QW(f)$子集. 本文在文献[7]的基础上，继续研究拟弱几乎周期点，得到如下结果：(i) 设序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于等度连续映射 f，且点列$\{x_k\}$是每个映射 f_n 的拟弱几乎周期点，若$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$，则 x 是 f 的拟弱几乎周期点；(ii) 若序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于等度连续映射 f，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sup QW(f_n) \subset QW(f)$. 改进和推广了文献[7]的结论. 另外，本文还研究了强一致收敛条件下序列跟踪性的动力学性质，得到：若序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于 f，且 f_n 具有 fine 序列跟踪性，则 f 具有序列跟踪性. 这些结果丰富了强一致收敛条件下拟弱几乎周期性和序列跟踪性的理论.

定义 1　设(X, d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$ 连续，$x \in X$. 若 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，存在非负递增的整数列$\{n_i\}$，使得对 $\forall i \geqslant 0$，有 $\#(\{r: f^r(x) \in B(x, \varepsilon), 0 \leqslant r < n_i N\}) \geqslant n_i$，则称 x 是 f 的拟弱几乎周期点. f 的拟弱几乎周期点集用$QW(f)$表示.

① 收稿日期：2019-03-25
基金项目：广西自然科学基金项目(2018JJB170034)；广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2019KY0681)；梧州学院校级科研项目(2017C001).
作者简介：冀占江(1985-)，男，讲师，主要从事拓扑学动力系统的研究.

定义 2[14]　设(X,d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$ 连续，$\delta > 0$，$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ 是 X 中的序列. 若对 $\forall i \geqslant 0$，有 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$，则称$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ 是 f 的 δ -伪轨.

定义 3　设(X,d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$ 连续，$\varepsilon > 0$，$y \in X$，$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ 是 X 中的序列. 若对 $\forall i \geqslant 0$，有 $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$，则称 y ε -跟踪$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$.

定义 4　设(X,d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$ 连续. 若对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ 是 X 中 f 的 δ -伪轨时，存在 $y \in X$ 和非负递增整数列$\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$，y ε -跟踪$\{x_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$，则称 f 具有序列跟踪性.

定义 5　设(X,d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$ 连续. 若对 $\forall \varepsilon > 0$，使得当$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$ 是 X 中 f 的 ε -伪轨时，存在 $y \in X$ 和非负递增整数列$\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$，y ε -跟踪$\{x_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$，则称 f 具有 fine 序列跟踪性.

引理 1[7]　设(X,d)是度量空间，对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$f_n: X \longrightarrow X$ 连续，$f: X \longrightarrow X$ 连续，序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于 f，$x \in X$. 若 x 是每个映射 f_n 的拟弱几乎周期点，则 x 是 f 的拟弱几乎周期点.

定理 1　设(X,d)是度量空间，对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$f_n: X \longrightarrow X$ 连续，$f: X \longrightarrow X$ 等度连续，序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于 f. 若点列$\{x_k\}$是每个映射 f_n 的拟弱几乎周期点，且$\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$，则 x 是 f 的拟弱几乎周期点.

证　由 f 的等度连续性知，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$，当 $d(z_1, z_2) < \delta$ 时，$\forall l \geqslant 0$，有

$$d(f^l(z_1), f^l(z_2)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

由$\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$ 知，对 $\delta > 0$，存在正整数 $m > 0$，使得 $d(x_m, x) < \delta$. 由式(1)知，$\forall l \geqslant 0$，有

$$d(f^l(x_m), f^l(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

由引理 1 知，x_m 是 f 的拟弱几乎周期点，故对$\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$，存在 $q > 0$，存在非负递增的整数列$\{n_i\}$，对 $\forall i \geqslant 0$，有

$$\#\left(\left\{r: f^r(x_m) \in B\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right), 0 \leqslant r < n_i q\right\}\right) \geqslant n_i$$

令

$$A_{n_i} = \left\{r: f^r(x_m) \in B\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right), 0 \leqslant r < n_i q\right\}$$
$$B_{n_i} = \{r: f^r(x) \in B(x, \varepsilon), 0 \leqslant r < n_i q\}$$

设 $r \in A_{n_i}$，则有

$$d(f^r(x_m), x_m) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

由(2),(3) 式知

$$d(f^r(x), x) < d(f^r(x), f^r(x_m)) + d(f^r(x_m), x_m) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \varepsilon$$

故 $r \in B_{n_i}$，则 $A_{n_i} \subset B_{n_i}$，因此 $\#(B_{n_i}) \geqslant \#(A_{n_i}) \geqslant n_i$，故 x 是 f 的拟弱几乎周期点.

定理 2　设(X,d)是度量空间，对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$f_n: X \longrightarrow X$ 连续，$f: X \longrightarrow X$ 等度连续. 若序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于 f，则$\limsup\limits_{n \to \infty} QW(f_n) \subset QW(f)$.

证　由 f 的等度连续性知，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{4}$，当 $d(z_1, z_2) < \delta$ 时，$\forall l \geqslant 0$，有

$$d(f^l(z_1), f^l(z_2)) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

由 $f_n \xrightarrow{s} f$ 知，对$\dfrac{\varepsilon}{4} > 0$，存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，$\forall l \geqslant 0$，$\forall x \in X$，有

$$d({f_n}^l(x), f^l(x)) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{5}$$

设 $z \in \limsup\limits_{n\to\infty} QW(f_n)$，则存在正整数 $m > N_1$，使得

$$QW(f_m) \cap B(z, \delta) \neq \varnothing$$

取

$$y \in QW(f_m) \cap B(z, \delta)$$

由 $y \in QW(f_m)$ 知，对 $\frac{\varepsilon}{4} > 0$，存在正整数 $q > 0$ 和非负递增的整数列 $\{n_i\}$，对 $\forall\, i \geqslant 0$，有

$$\#\left(\left\{r: f_m^r(y) \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{4}\right), 0 \leqslant r < n_i q\right\}\right) \geqslant n_i$$

令

$$A_{n_i} = \left\{r: f_m^r(y) \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{4}\right), 0 \leqslant r < n_i q\right\} \geqslant n_i$$

$$B_{n_i} = \{r: f^r(z) \in B(z, \varepsilon), 0 \leqslant r < n_i q\}$$

设 $r \in A_{n_i}$，则有

$$d(f_m^r(y), y) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{6}$$

由 $y \in B(z, \delta)$ 和(4)式知

$$d(f^r(y), f^r(z)) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

由(5),(6),(7)式知

$$d(f^r(z), z) < d(f^r(z), f^r(y)) + d(f^r(y), {f_m}^r(y)) + d({f_m}^r(y), y) + d(y, z) <$$
$$\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \delta < \varepsilon$$

故 $r \in B_{n_i}$，则 $A_{n_i} \subset B_{n_i}$，因此 $\#(B_{n_i}) \geqslant \#(A_{n_i}) \geqslant n_i$，则 $z \in QW(f)$，所以

$$\limsup_{n\to\infty} QW(f_n) \subset QW(f)$$

下面举例说明：即使满足定理2的条件，也推不出 $\limsup\limits_{n\to\infty} QW(f_n) = QW(f)$.

例1 设 $I = [0, 1]$，对 $n \in \mathbb{N}_+$，定义 $f_n: X \longrightarrow X$ 为

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ x - \frac{1}{n} & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

定义 $f: X \longrightarrow X$ 为

$$f(x) = x \qquad x \in [0, 1]$$

易知序列映射 $\{f_n\}$ 在 I 上强一致收敛于 f，并且 f 是等度连续的，另外 $(0, 1) \subset QW(f)$.

下面证明 $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$，$\forall\, x \in (0, 1]$，存在 $m = m(n, x) \in \mathbb{N}_+$，当 $k \geqslant m$ 时，有

$$f_n^k(x) = 0 \tag{8}$$

若 $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$，当 $k \geqslant 1$ 时，有

$$f_n^k(x) = 0$$

若 $x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$，当 $k \geqslant 2$ 时，有

$$f_n^k(x) = 0$$

若 $x \in \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]$，当 $k \geqslant 3$ 时，有

$$f_n^k(x) = 0$$

依此类推，若 $x \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$，其中 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，则存在 $m = m(n, x) \in \mathbb{N}_+$，当 $k \geqslant m$ 时，有

$$f_n^k(x)=0$$

故(8)式成立．设 $x\in(0,1]$，下面证明 $x\notin QW(f_n)$．假设 $x\in QW(f_n)$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $m_0>m$，使得 $f_n^{m_0}(x)\in B(x,\varepsilon)$．由(8)式知 $f_n^{m_0}(x)=0$，故 $0\in B(x,\varepsilon)$，这与 ε 的任意性矛盾，故 $x\notin QW(f_n)$．又因 $0\in QW(f_n)$，则 $QW(f_n)=\{0\}$，因此

$$\limsup_{n\to\infty} QW(f_n)=\{0\}$$

故

$$\limsup_{n\to\infty} QW(f_n)\neq QW(f)$$

定理 3　设(X,d)是度量空间，对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$f_n:X\longrightarrow X$ 连续，$f:X\longrightarrow X$ 连续，序列映射$\{f_n\}$强一致收敛于 f．若 f_n 具有 fine 序列跟踪性，则 f 具有序列跟踪性．

证　$\forall\varepsilon>0$，取 $0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{3}$．设$\{x_i\}_{i\geqslant 0}$ 是 f 的 δ-伪轨，则 $\forall i\geqslant 0$，有

$$d(f(x_i),x_{i+1})<\delta \tag{9}$$

由 $f_n\xrightarrow{s}f$ 知，对 $\delta>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，$\forall l\geqslant 0$，$\forall y\in X$，有

$$d(f_n^l(y),f^l(y))<\delta \tag{10}$$

取 $m>N_1$，并固定 m，由(10)式知，当 $i\geqslant 0$ 时，有

$$d(f_m(x_i),f(x_i))<\delta \tag{11}$$

由(9)式和(11)式知，当 $i\geqslant 0$ 时，有

$$d(f_m(x_i),x_{i+1})<d(f_m(x_i),f(x_i))+d(f(x_i),x_{i+1})<\frac{2\varepsilon}{3}$$

由 f_m 具有 fine 序列跟踪性知，存在 $x\in X$ 和非负递增整数列$\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$，当 $i\geqslant 0$ 时，有

$$d(f_m^{n_i}(x),x_{n_i})<\frac{2\varepsilon}{3}$$

由(10)式知，当 $i\geqslant 0$ 时，有

$$d(f_m^{n_i}(x),f^{n_i}(x))<\delta$$

因此，当 $i\geqslant 0$ 时，有

$$d(f^{n_i}(x),x_{n_i})<d(f^{n_i}(x),f_m^{n_i}(x))+d(f_m^{n_i}(x),x_{n_i})<\varepsilon$$

故 f 具有序列跟踪性．

注 1　本文在强一致收敛条件下，研究了序列映射与极限映射之间关于序列跟踪性的关系．得到：若 f_n 具有 fine 序列跟踪性，则 f 也具有序列跟踪性．另外还研究了序列映射与极限映射之间关于拟弱几乎周期性的关系，得到如下结论：(i) 若点列$\{x_k\}$是每个映射 f_n 的拟弱几乎周期点，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，则 x 是 f 的拟弱几乎周期点；(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} QW(f_n)\subset QW(f)$．而文献[7]只得到 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}QW(f_n)\subset QW(f)$，我们知道 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}QW(f_n)\subset\limsup\limits_{n\to\infty} QW(f_n)$，这就说明本文的结论推广和改进了文献[7]的结果，有一定的研究价值．

参考文献：

[1]　HERIBERTO R F. Uniform Covergence and Transitivity [J]. Chaos Solitions & Fractals，2008，38(1)：148-153.
[2]　王良平．强一致收敛下的初值敏感性与等度连续性 [J]．浙江大学学报(理学版)，2012，39(3)：270-272.
[3]　ABU-SARIS R，AI-HAMI K. Uniform Covergence and Chaotic Behavior [J]. Nonlinear Analysis，2006，65(4)：933-937.
[4]　曾凡平，严可颂，刘新和．强一致收敛与动力性质 [J]．广西大学学报(自然科学版)，2008，33(3)：305-309.
[5]　席凤娟．关于强一致收敛下的动力性状的遗传性以及复合动力系统的研究 [D]．西安：西北大学，2009.
[6]　邓晓霞，金渝光．强一致收敛下的保持性和混沌性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(2)：31-34.
[7]　王良平．一致收敛下极限系统回复性的研究 [J]．广西师范学院学报(自然科学版)，2010，27(4)：12-16.
[8]　秦　斌，严可颂，徐雪群．一致收敛下极限系统的传递性研究 [J]．广西师范学院学报(自然科学版)，2009，26(3)：

10-14.
[9] 罗 飞，金渝光，白丹莹. 强一致收敛条件下的集值 Devaney 混沌性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：79-83.
[10] 罗 飞，金渝光. 强一致收敛条件下序列系统与极限系统的关联性 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(4)：78-80.
[11] 杨忠选，尹建东. 映射列一致收敛与敏感依懒性 [J]. 南昌大学学报(工科版)，2013，35(4)：385-391.
[12] 冀占江. 度量 G-空间中强一致收敛条件下混合性的研究 [J]. 数学的实践与认识，2018，48(11)：237-240.
[13] 向伟杰，金渝光. 强一致收敛下的 Li-Yorke 混沌和分布混沌 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2018，35(2)：93-97.
[14] 冀占江. 度量空间中强链回归点集的研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(2)：29-35.

The Research of Quasi-weak Almost Periodic Property and Sequence Shadowing Property Under Strongly Uniform Convergence

JI Zhan-jiang

School of Data Science and Software Engineering/Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Information System, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China

Abstract: The dynamical property of the quasi-weak almost periodic property and sequence shadowing property between the sequence map and the limit map under strongly uniform convergence have been studied in this paper. With the properties of the strong uniform convergence and equicontinuity, we get the following results: (i) Let the sequence map $\{f_n\}$ converges strongly uniformly to the equicontinuous map f and the sequence of points $\{x_k\}$ be the quasi-weak almost periodic point of every map f_n. If $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, then the point x is the quasi-weak almost periodic point of the map f; (ii) If the sequence map $\{f_n\}$ converges strongly uniformly to the equicontinuous map f, then $\lim\limits_{n\to\infty}\sup QW(f_n) \subset QW(f)$; (iii) Let the sequence map $\{f_n\}$ converges strongly uniformly to the map f. If f_n has the fine sequence shadowing property, then f has sequence shadowing property. These results enrich the theory of the quasi-weak almost periodic property and sequence shadowing property under strong uniform convergence.

Key words: quasi-weak almost periodic point; sequence shadowing property; equicontinuous; strongly uniform convergence

责任编辑 廖 坤