第 45 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 1 月
Vol. 45 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.01.001

具有广义指数型二分性离散系统的反周期解①

孟 鑫

吉林师范大学 数学学院,吉林 四平 136000

摘要:研究了一类具有广义指数型二分性非线性离散系统的反周期解. 首先指出若齐次线性系统具有广义指数型二分性,则对应非齐次线性系统存在反周期解. 然后借助这个结论并应用不动点定理,给出了非线性离散系统存在反周期解的充分条件.

关 键 词:广义指数型二分性;指数型二分性;反周期解;不动点定理

中图分类号:O175.7 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2020)01-0001-05

指数型二分性理论在动力系统分析中有着重要的地位,它是线性自治系统的双曲率概念在非线性自治系统中的推广. 离散动力系统的指数型二分性理论是众多学者所研究的重要课题[1-4]. 由于指数型二分性的条件较强,限制了许多动力学行为,因此人们将指数型二分性的概念进行了推广,得到广义指数型二分性的概念,并应用广义指数型二分性来研究动力系统的结构稳定性、拓扑等价性、Hartman 线性化等问题[5-9].

反周期问题常出现在物理过程的数学模型以及偏微分方程和抽象微分方程研究之中. 动力系统的反周期性与周期性有着密切的联系. 近年来,反周期系统的反周期解问题引起了国内外的一些学者的关注[10-15]. 本文主要研究非线性离散系统 $\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{g}(n,\boldsymbol{x}(n))$ 的反周期解. 借助广义指数型二分性理论并利用 Banach 不动点定理与 Schauder 不动点定理,给出上述系统 N- 反周期解存在的充分条件.

1 预备知识

在本文中,当 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a<b$ 时,记 $[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b\}$.

对于线性系统

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^{d\times d}$,$\boldsymbol{x}:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^{d}$,$\boldsymbol{\Phi}(n)$ 是系统(1) 的基本解矩阵,且满足 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$.

定义 1 若存在投影 $\boldsymbol{P}$,以及常数 $K,\alpha>0$,使得

$$|\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)|\leqslant K\exp[-\alpha(n-m)],\ n\geqslant m$$

$$|\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)|\leqslant K\exp[-\alpha(m-n)],\ m\geqslant n$$

则称系统(1) 具有指数型二分性.

定义 2[9] 若存在投影 $\boldsymbol{P}$,常数 $K\geqslant 1$,以及 $\mathbb{Z}$ 上的非负函数 $\alpha(n)$,

$$\lim_{q\to+\infty}\sum_{k=p}^{q}\alpha(k)=+\infty,\ p\in\mathbb{Z}$$

① 收稿日期:2018-04-16

基金项目:国家自然科学基金项目(10971084);吉林省教育厅"十三五"科学技术项目(JJKH20170368KJ);吉林师范大学博士启动项目(吉师博 2016002 号).

作者简介:孟 鑫(1980-),男,副教授,主要从事动力系统研究.

$$\lim_{p\to-\infty}\sum_{k=p}^{q}\alpha(k)=+\infty,\ q\in\mathbb{Z}$$

使得

$$|\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)|\leqslant K\exp[-\sum_{k=m}^{n}\alpha(k)],\ n\geqslant m$$

$$|\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)|\leqslant K\exp[-\sum_{k=n}^{m}\alpha(k)],\ m\geqslant n$$

则称系统(1)具有广义指数型二分性.

注 若 $\alpha(k)=\alpha>0$，则系统(1)具有指数型二分性.

例 1[9] 设 $\boldsymbol{A}(n)=\begin{pmatrix}b(n) & 0\\ 0 & \dfrac{1}{b(n)}\end{pmatrix}$，其中 $0<b(n)=b(-n)<1$，当 $n\to\infty$ 时，$b(n)$ 单调趋近于 1，则系统 $\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n)$ 具有广义指数型二分性，而不具有指数型二分性.

对于离散动力系统

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{F}(n,\boldsymbol{x}(n))\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^d$，$\boldsymbol{F}:\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$. 若存在 $N\in\mathbb{Z}_+$，对任意$(n,\boldsymbol{x})\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^d$，

$$\boldsymbol{F}(n+N,\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{F}(n,-\boldsymbol{x})$$

则称系统(2)为 N- 反周期系统.

若系统(2)的解 $\boldsymbol{x}(n)$ 满足

$$\boldsymbol{x}(n+N)=-\boldsymbol{x}(n)$$

则称 $\boldsymbol{x}(n)$ 为系统(2)的 N- 反周期解.

命题 1 若 $\boldsymbol{\Phi}(n)$ 是系统(1)的基本解矩阵，且 $\boldsymbol{A}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)$，则 $\boldsymbol{\Phi}(n+N)$ 也是系统(1)的基本解矩阵，且对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$ 有

$$\boldsymbol{\Phi}(n+N)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+N)=\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(n+N)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+N)=\boldsymbol{\Phi}(n)(I-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)$$

证 由 $\det\boldsymbol{\Phi}(n)\neq 0$，$\boldsymbol{\Phi}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{\Phi}(n)$ 可知

$$\det\boldsymbol{\Phi}(n+N)\neq 0$$

$$\boldsymbol{\Phi}(n+N+1)=\boldsymbol{A}(n+N)\boldsymbol{\Phi}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{\Phi}(n+N)$$

故 $\boldsymbol{\Phi}(n+N)$ 也是系统(1)的基本解矩阵，于是存在非奇异常矩阵 $\boldsymbol{C}_0\in\mathbb{R}^{d\times d}$，使得

$$\boldsymbol{\Phi}(n+N)=\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{C}_0,\ n\in\mathbb{Z}$$

因此，

$$\boldsymbol{\Phi}(n+N)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+N)=\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_0^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)=\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(n+N)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+N)=\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{C}_0^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)=\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m)$$

考虑 N- 反周期系统

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{f}(n)\tag{3}$$

其中：$\boldsymbol{A}:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^{d\times d}$，$\boldsymbol{A}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)$，$N\in\mathbb{Z}_+$；$\boldsymbol{f}:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^d$，$\boldsymbol{f}(n+N)=-\boldsymbol{f}(n)$. 记

$$N(n,\boldsymbol{f})=\sum_{m=-\infty}^{n-1}K\exp\Big[-\sum_{k=m+1}^{n}\alpha(k)\Big]\boldsymbol{f}(m)+\sum_{m=n}^{+\infty}K\exp\Big[-\sum_{k=n}^{m+1}\alpha(k)\Big]\boldsymbol{f}(m)$$

命题 2 设系统(1)具有广义指数型二分性，$\boldsymbol{A}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)$，$\boldsymbol{f}(n+N)=-\boldsymbol{f}(n)$，且 $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}N(n,|\boldsymbol{f}|)<+\infty$，则

$$\boldsymbol{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)-\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)$$

是系统(3)的一个有界 N- 反周期解.

证 显然 $\boldsymbol{x}(n)$ 是系统(3)的解，因为 $\boldsymbol{f}(n+N)=-\boldsymbol{f}(n)$，所以根据命题 1

$$\boldsymbol{x}(n+N)=$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n+N-1}\boldsymbol{\Phi}(n+N)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)-\sum_{m=n+N}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n+N)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)=$$
$$\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n+N)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+N+1)\boldsymbol{f}(m+N)-$$
$$\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n+N)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+N+1)\boldsymbol{f}(m+N)=$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)+\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)$$

因此 $\boldsymbol{x}(n+N)=-\boldsymbol{x}(n)$，这说明 $\boldsymbol{x}(n)$ 是系统(3) 的 N- 反周期解.

再证有界性. 因为

$$|\boldsymbol{x}(n)|=$$
$$\left|\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)-\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{f}(m)\right|\leqslant$$
$$\sum_{m=-\infty}^{n-1}K\exp\left[-\sum_{k=m+1}^{n}\alpha(k)\right]|\boldsymbol{f}(m)|+\sum_{m=n}^{+\infty}K\exp\left[-\sum_{k=n}^{m+1}\alpha(k)\right]|\boldsymbol{f}(m)|=$$
$$N(n,|\boldsymbol{f}|)$$

所以 $\boldsymbol{x}(n)$ 是系统(3) 的一个有界 N- 反周期解.

2　主要结果

考虑 N- 反周期系统

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{g}(n,\boldsymbol{x}(n))\tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{A}$：$\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^{d\times d}$，$\boldsymbol{x}$：$\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^{d}$，$\boldsymbol{A}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)$；$\boldsymbol{g}$：$\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^{d}\longrightarrow\mathbb{R}^{d}$，$\boldsymbol{g}(n+N,\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{g}(n,-\boldsymbol{x})$.

设

$$X=\{\boldsymbol{x}(n):\boldsymbol{x}(n+N)=-\boldsymbol{x}(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$$

其中 $\boldsymbol{x}$：$\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}^{d}$，并且定义 X 上的范数为 $\|\boldsymbol{x}\|=\max\limits_{n\in[0,\,N-1]}|\boldsymbol{x}(n)|$，则$(X,\|\cdot\|)$为 Banach 空间.

定理 1　设线性系统(1) 关于投影 $\boldsymbol{P}$，常数 $K\geqslant1$ 以及非负函数 $\alpha(n)$ 具有广义指数型二分性，且 $\boldsymbol{A}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)$，$N\in\mathbb{Z}_{+}$；$\boldsymbol{g}(n+N,\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{g}(n,-\boldsymbol{x})$，对任意 $n\in\mathbb{Z}x$，$y\in\mathbb{R}^{d}$，

$$|\boldsymbol{g}(n,\boldsymbol{x})|\leqslant G(n),\ |\boldsymbol{g}(n,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(n,\boldsymbol{y})|\leqslant r(n)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$
$$N(n,G)\leqslant B,\ N(n,r)\leqslant L<1$$

其中 $G(n)$，$r(n)$ 是非负函数，B,$L>0$ 是常数，则系统(4) 有唯一的有界 N- 反周期解.

证　考虑 N- 反周期系统

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{g}(n,\boldsymbol{y}(n))\tag{5}$$

因为线性系统(1) 关于投影 $\boldsymbol{P}$，常数 $K\geqslant1$ 以及非负函数 $\alpha(n)$ 具有广义指数型二分性，且 $N(n,G)\leqslant B$，根据命题 2，系统(5) 存在有界解

$$\boldsymbol{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{g}(m,\boldsymbol{y}(m))-\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{g}(m,\boldsymbol{y}(m))$$

类似于命题 2，对任意 $n\in\mathbb{Z}$，当 $\boldsymbol{y}(n+N)=-\boldsymbol{y}(n)$ 时，$\boldsymbol{x}(n+N)=-\boldsymbol{x}(n)$.

定义映射 T：$X\longrightarrow X$ 为

$$T\boldsymbol{y}(n)=\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{g}(m,\boldsymbol{y}(m))-\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{g}(m,\boldsymbol{y}(m))$$

则 T 的不动点即为系统(4) 的 N- 反周期解. 对任意 $\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2\in X$，

$$\|T\boldsymbol{y}_1-T\boldsymbol{y}_2\|\leqslant$$
$$\max_{n\in[0,\,N-1]}\left\{\sum_{m=-\infty}^{n-1}|\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)||\boldsymbol{g}(m,\boldsymbol{y}_1(m))-\boldsymbol{g}(m,\boldsymbol{y}_2(m))|+\right.$$

$$\sum_{m=n}^{+\infty} |\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)||\boldsymbol{g}(m, \boldsymbol{y}_1(m))-\boldsymbol{g}(m, \boldsymbol{y}_2(m))|\} \leqslant$$

$$\max_{n\in[0, N-1]}\{\sum_{m=-\infty}^{n-1} \exp[-\sum_{k=m+1}^{n}\alpha(k)]r(m)|\boldsymbol{y}_1(m)-\boldsymbol{y}_2(m)|+$$

$$\sum_{m=n}^{+\infty}\exp[-\sum_{k=n}^{m+1}\alpha(k)]r(m)|\boldsymbol{y}_1(m)-\boldsymbol{y}_2(m)|\} \leqslant$$

$$N(n, r)\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\|$$

因此,

$$\|T\boldsymbol{y}_1-T\boldsymbol{y}_2\| \leqslant N(n, r)\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\| \leqslant L\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\| < \|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\|$$

从而 T 是 X 上的压缩映射,根据Banach不动点定理,映射 T 有唯一不动点,从而系统(4)有唯一的有界 N-反周期解.

定理2 设线性系统(1)关于投影 $\boldsymbol{P}$,常数 $K \geqslant 1$ 以及非负函数 $\alpha(n)$ 具有广义指数型二分性,且 $\boldsymbol{A}(n+N)=\boldsymbol{A}(n)$,$N\in\mathbb{Z}_+$;$\boldsymbol{g}(n+N, \boldsymbol{x})=-\boldsymbol{g}(n, -\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{g}(n, \boldsymbol{x})$ 关于 x 一致连续,对任意 $n\in\mathbb{Z}$,$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$,有

$$|\boldsymbol{g}(n, \boldsymbol{x})| \leqslant G(n),\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} N(n, G) \leqslant M$$

其中常数 $M>0$,则系统(4)存在 N-反周期解.

证 设 $X_0=\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(n)\in X: \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant M\}$,$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\boldsymbol{x}(n)|$,则 X_0 为Banach空间 X 的凸闭子集.

定义映射 T 为

$$T\boldsymbol{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{g}(m, \boldsymbol{x}(m))-\sum_{m=n}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)\boldsymbol{g}(m, \boldsymbol{x}(m))$$

因为对任何 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(n)\in X_0$,

$$\|T\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{\sum_{m=-\infty}^{n-1}|\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)||\boldsymbol{g}(m, \boldsymbol{x}(m))|+$$

$$\sum_{m=n}^{+\infty}|\boldsymbol{\Phi}(n)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Phi}^{-1}(m+1)||\boldsymbol{g}(m, \boldsymbol{x}(m))|\} \leqslant$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\{\sum_{m=-\infty}^{n-1}K\exp[-\sum_{k=m+1}^{n}\alpha(k)]G(m)+\sum_{m=n}^{+\infty}K\exp[-\sum_{k=n}^{m+1}\alpha(k)]G(m)\}=$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}N(n, G) \leqslant M$$

因此 $T(X_0)\subset X_0$ 且 T 是一致有界的,再由 $\boldsymbol{g}(n, \boldsymbol{x})$ 的一致连续性知 T 是连续映射. 因为 X_0 是Banach空间 X 的有界闭凸集,所以 $\overline{T(X_0)}$ 是 X_0 的紧集,从而 T 是全连续算子,根据Schauder不动点定理,系统(4)存在 N-反周期解.

参考文献:

[1] BEREZANSKY L, BRAVERMAN E. On Exponential Dichotomy, Bohl-Perron Type Thorems and Stability of Difference Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 304(2): 511-530.

[2] SASU A L. Exponential Dichotomy and Dichotomy Radius for Difference Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 344(2): 906-920.

[3] CARDOSO F, CUEVAS C. Exponential Dichotomy and Boundedness for Retarded Functional Difference Equations [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2009, 15 (3) : 261-290.

[4] ZHANG J, FAN M, ZHU H. Existence and Roughness of Exponential Dichotomies of Linear Dynamic Equations on Time Scales [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(8): 2658-2675.

[5] LIN M. A Criterion for Generalized Exponential Dichotomy and Existence of Bounded Solutions [J]. Acta Mathematiea Scientia, 2003, 23 (5) : 619-626.

[6] JIANG L. Stronlgy Topological Linearization with Generalized Exponential Dichotomy [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2007, 67 (4): 1102-1110.

[7] JIANG L. Generalized Exponential Dichotomy and Global Linearization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 315 (2): 474-490.

[8] 江良平. Palmer 线性化定理的一个推广 [J]. 应用数学, 2011, 24(1): 150-157.

[9] CASTA′NEDA A, ROBLEDO G. A Topological Equivalence Result for a Family of Nonlinear Difference Systems Having Generalized Exponential Dichotomy [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2015, 22(9): 1271-1291.

[10] CHEN Y. Anti-Periodic Solutions for Semilinear Evolution Equations [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2012, 40 (9): 1123-1130.

[11] AIZICOVICI S, MCKIBBEN M, REICH S. Anti-Periodic Solutions to Nonmonotone Evolution Equations with Discontinuous Nonlinearities [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2001, 43(2): 233-251.

[12] AHMAD B, ALSAEDI A. Existence of Solutions for Anti-Periodic Boundary Value Problems of Nonlinear Impulsive Functional Integro-Differential Equations of Mixed Type [J]. Nonlinear Analysis Hybrid Systems, 2009, 3(4): 501-509.

[13] LUO Z, SHEN J, Nieto J J. Antiperiodic Boundary Value Problem for First-Order Impulsive Ordinary Differential Equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49(2-3): 253-261.

[14] YU Y, SHAO J, YUE G. Existence and Uniqueness of Anti-Periodic Solutions for a Kind of Rayleigh Equation with Two Deviating Arguments [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2009, 71 (10): 4689-4695.

[15] 文晓霞. 一类反周期函数缺项插值问题的解 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 73-77.

Anti-Periodic Solutions for Discrete Systems with Generalized Exponential Dichotomy

MENG　Xin

Department of Mathematics, Jilin Normal University, Siping Jilin 136000, China

Abstract: In this paper, the anti-periodic solutions have been studied for nonlinear discrete systems with generalized exponential dichotomy. Firstly, it is pointed out that if the homogeneous linear system has generalized exponential dichotomy. Secondly, the nonhomogeneous linear system admits an anti-periodic solution. And lastly, by using the above conclusion and the fixed point theorem, sufficient conditions for the existence of anti-periodic solutions for nonlinear discrete systems are established.

Key words: generalized exponential dichotomy; exponential dichotomy; anti-periodic solution; fixed point theorem

责任编辑　张　构