第 45 卷　第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 1 月
Vol. 45　No. 1　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jan.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.01.003

对数偏正态逻辑斯蒂分布的极值高阶展开[①]

张瑞丽，　陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要讨论了对数偏正态逻辑斯蒂分布的尾部特征，得到了极值的高阶展开.

关　键　词： 极值分布；对数偏正态逻辑斯蒂分布；渐近展开

中图分类号： O211.4　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2020)01－0013－06

设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列，其公共分布函数为$F(x)$. 记$M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$. 对非退化分布函数$G(x)$存在实数序列$a_n > 0$，$b_n \in \mathbb{R}$，$n \geqslant 1$使得

$$\lim_{n \to \infty} P\{a_n^{-1}(M_n - b_n) \leqslant x\} = \lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{1}$$

则$G(x)$必为 3 大极值分布类型之一.

若(1)式成立，则称F属于G的吸引场，记为$F \in D(G)$. 相关研究详见文献[1-2]等.

文献[3]引进了偏正态逻辑斯蒂分布(简记为 SNLD)，其对应的密度函数为

$$f_\lambda(x) = 2G(x)H\left(\frac{\lambda}{\beta}x\right)\cdot\ x \in \mathbb{R}$$

其中：$G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$，$H(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$，参数$\sigma > 0$，$\beta > 0$，$\lambda \in \mathbb{R}$. 当$\lambda = 0$时，SNLD 是期望为 0，方差为$\sigma^2$的正态分布. 对数偏正态逻辑斯蒂分布是偏正态逻辑斯蒂分布的一种推广. 若存在随机变量ξ服从偏正态逻辑斯蒂分布，$\eta = \exp(\xi)$，则称η服从对数偏正态逻辑斯蒂分布. 若$f(x)$为η的概率密度函数，易知

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}x^{-1}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 + \exp\left(-\frac{\lambda \ln x}{\beta}\right)\right)^{-1}, \quad x > 0$$

其中参数$\sigma > 0$，$\beta > 0$，$\lambda \in \mathbb{R}$.

最近，对新的分布函数和分布函数对数化的研究已经变成统计学中热点问题. 文献[4-6]主要介绍了一些分布和对数分布的尾部性质和极值的高阶展开.

本文主要讨论了对数偏正态逻辑斯蒂分布的样本最大值的渐进展开.

1　辅助引理

命题 1　设$F(x)$，$f(x)$分别表示对数偏正态逻辑分布的分布函数和概率密度函数，则

---

① 收稿日期：2018－11－30
基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).
作者简介：张瑞丽(1988－)，女，硕士研究生，主要从事极值统计的研究.
通信作者：陈守全，博士，副教授.

(i) 当 $\lambda > 0$, $x > \exp(\sigma^2\lambda\beta^{-1})$ 时，有

$$\left(\frac{\sigma^2}{(\ln x)^2}+1\right)^{-1}\frac{\sigma^2 x}{\ln x} < \frac{1-F(x)}{f(x)} < \left(1-\frac{\sigma^2\lambda}{\beta\ln x}\right)^{-1}\frac{\sigma^2 x}{\ln x}$$

(ii) 当 $\lambda < 0$, $x > 1$ 时，有

$$\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{\beta\ln x}-\frac{\sigma^2}{(\ln x)^2}\right)\left(1+\frac{\sigma^4\lambda^2}{\beta^2(\ln x)^2}\right)^{-1}\frac{\sigma^2 x}{\ln x} < \frac{1-F(x)}{f(x)} < \frac{\sigma^2 x}{\ln x}$$

证 由分部积分知

$$\begin{aligned}
1-F(x) = & \int_x^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{(\ln t)^2}{2\sigma^2}\right)\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda\ln t}{\beta}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}t = \\
& \int_{\ln x}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}t = \\
& \frac{\sigma^2 x}{\ln x}f(x)+\int_{\ln x}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sigma\lambda}{\sqrt{\pi}\beta}\frac{1}{t}\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-2}\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t- \\
& \int_{\ln x}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}t = \\
& \frac{\sigma^2 x}{\ln x}f(x)-\frac{\sigma^4 x}{(\ln x)^3}f(x)+\frac{3\sqrt{2}\sigma^3}{\sqrt{\pi}}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{t^4}\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t- \\
& \frac{\sqrt{2}\sigma^3\lambda}{\sqrt{\pi}\beta}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{t^3}\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-2}\left(\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t+\frac{\sigma^4\lambda x}{\beta(\ln x)^2}f(x)+ \\
& \frac{2\sqrt{2}\sigma^3\lambda^2}{\sqrt{\pi}\beta^2}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{t^2}\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-3}\left(\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t- \\
& \frac{2\sqrt{2}\sigma^3\lambda}{\sqrt{\pi}\beta}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{t^3}\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-2}\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t- \\
& \frac{\sqrt{2}\sigma^3\lambda^2}{\sqrt{\pi}\beta^2}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{t^2}\left(1+\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\right)^{-2}\exp\left(-\frac{\lambda t}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{2}$$

(i) 当 $\lambda > 0$, $x > \exp(\sigma^2\lambda\beta^{-1})$ 时，由(2) 式得

$$\left(1+\frac{\sigma^2}{(\ln x)^2}\right)^{-1}\frac{\sigma^2 x}{\ln x} < \frac{1-F(x)}{f(x)} < \left(1-\frac{\lambda\sigma^2}{\beta\ln x}\right)^{-1}\frac{\sigma^2 x}{\ln x} \tag{3}$$

(ii) 当 $\lambda < 0$, $x > 1$ 时，由(2) 式得

$$\left(1+\frac{\sigma^2\lambda}{\beta\ln x}-\frac{\sigma^2}{(\ln x)^2}\right)\left(1+\frac{\sigma^4\lambda^2}{\beta^2(\ln x)^2}\right)^{-1}\frac{\sigma^2 x}{\ln x} < \frac{1-F(x)}{f(x)} < \frac{\sigma^2 x}{\ln x} \tag{4}$$

故由(3),(4) 式知命题成立.

由命题 1，可得到下面的 MILLs 类型比率：

命题 2 当 $x \to \infty$ 时，有

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} \sim \frac{\sigma^2 x}{\ln x}$$

命题 3 设 $F(x)$ 为对数逻辑分布的累计分布函数，对于充分大的 x，则

(i) 当 $\lambda > 0$, $x > \mathrm{e}$ 时，有

$$1-F(x) = c(x)\exp\left(-\int_e^x\frac{g(t)}{\tilde{f}(t)}\right)\mathrm{d}t$$

其中

$$\lim_{x\to\infty}c(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

$$g(x) = 1 + \frac{\sigma^2}{(\ln t)^2}$$

$$\widetilde{f}(t) = \frac{\sigma^2 t}{\ln t}$$

(ii) 当 $\lambda < 0$，$x > \mathrm{e}$ 时，有

$$1 - F(x) = c(x)\exp\left(-\int_e^x \frac{g(t)}{\widetilde{f}(t)}\right)\mathrm{d}t$$

其中

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\lambda}{\beta}\right)$$

$$g(x) = 1 + \frac{\sigma^2}{(\ln t)^2} - \frac{\sigma^2\lambda}{\beta\ln t}$$

$$\widetilde{f}(t) = \frac{\sigma^2 t}{\ln t}$$

由文献[1]的推论 1.7 知 $F(x) \in D(\lambda)$，规范常数 a_n，b_n 可由

$$1 - F(b_n) = n^{-1},\ a_n = \widetilde{f}(b_n) \tag{5}$$

确定.

命题 4　设(ξ_n，$n \geqslant 1$) 为独立同分布对数偏正态逻辑分布序列. 令 $M_n = \max(\xi_i)$，($i = 1, 2\cdots$)，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \exp(-\exp(-x)) \tag{6}$$

其中

(i) 当 $\lambda > 0$ 时，规范化常数

$$a_n = \exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}})\frac{\sigma}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}},\ b_n = \exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}})\left(1 - \frac{\sigma(\ln\pi + \ln(\ln x))}{2(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

(ii) 当 $\lambda < 0$ 时，规范化常数

$$a_n = \exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}} + \sigma^2\lambda^2\beta^{-1})\frac{\sigma}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}},\ b_n = \exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}} + \sigma^2\lambda^2\beta^{-1})\left(1 - \frac{\sigma(\ln\pi + \ln(\ln n)) - \sigma^2\lambda^2\beta^{-2}}{2(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

证明方法类似文献[2]中定理 1.2.3 和定理 1.5.1 的证明.

近年关于极值渐进展开的研究可参见文献[4-6].

2　对数偏正态逻辑斯蒂分布的极值分布的收敛速度

通过前面的讨论知对数偏正态逻辑斯蒂分布 $F \in D(\lambda)$ 且规范常数 a_n,b_n 满足(5)式. 因此 $n \to \infty$ 时，

$$\Delta_n(x) = F^n(a_n x + b_n) - \lambda(x) \to 0$$

下面给出服从对数偏正态逻辑斯蒂分布的独立随机变量序列最大值分布的渐进展开，并由此得到 $\Delta_n(x)$ 的点点收敛速度.

定理 1　设 $F(x)$ 是对数偏正态逻辑斯蒂分布函数，且 a_n,b_n 满足(5)式，则 $n \to \infty$ 时，有

(i) 当 $\lambda > 0$ 时，

$$\ln b_n(\ln b_n(F^n(a_n x + b_n) - \lambda(x)) - k(x)\lambda(x)) \to \left(w(x) + \frac{k^2(x)}{2}\right)\lambda(x)$$

其中 $k_1(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\exp(-x)$，$w_1(x) = \left(-\frac{1}{8}\sigma^4 x^4 + \frac{1}{3}\sigma^4 x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)\exp(-x)$.

(ii) 当 $\lambda < 0$ 时，

$$\ln b_n(\ln b_n(F^n(a_n x + b_n) - \lambda(x)) - k(x)\lambda(x)) \to \left(w(x) + \frac{k^2(x)}{2}\right)\Lambda(x)$$

其中

$$k_2(x)=\left(-\frac{1}{2}\sigma^2x^2-\frac{\lambda}{\beta}\sigma^4x\right)\exp(-x)$$

$$w_2(x)=\left(-\frac{1}{8}\sigma^4x^4+\left(\frac{1}{3}\sigma^4-\frac{\sigma^2\lambda}{2\beta}\sigma^8\right)x^3+\frac{x^2}{2}\left(\sigma^2-\frac{\lambda^2\sigma^8}{\beta^2}\right)+\frac{\lambda\sigma^8}{2}x\right)\exp(-x)$$

为了证明定理 1，给出下面两个引理.

由命题 1 的证明过程易得：

引理 1 对于充分大的 x，有

$$1-F(x)=\begin{cases}c(x)\exp\left[-\int_e^x\dfrac{1+\dfrac{\sigma^2}{(\ln t)^2}}{\dfrac{\sigma^2t}{\ln t}}\mathrm{d}t\right]\left(1-\dfrac{\sigma^2}{(\ln x)^2}+3\dfrac{\sigma^4}{(\ln x)^4}+O((\ln x))^{-6}\right),\ \lambda>0\\ c(x)\exp\left[-\int_e^x\dfrac{1+\dfrac{\sigma^2}{(\ln t)^2}-\dfrac{\lambda\sigma^2}{\beta\ln t}}{\dfrac{\sigma^2t}{\ln t}}\mathrm{d}t\right]\left(1+\dfrac{\lambda\sigma^2}{\beta\ln x}+\left(\dfrac{\lambda^2\sigma^4}{\beta^2}-\sigma^2\right)\dfrac{1}{(\ln x)^2}+O\left((\ln x)^{-3}\right)\right),\ \lambda<0\end{cases}\tag{7}$$

引理 2 令 $G(b_n;x)=F(a_nx+b_n)$，$g(b_n;x)=n\ln G(b_n;x)+\exp(-x)$. 其中规范化常数 a_n,b_n 满足(5)式，则

(i) 当 $\lambda>0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n(\ln b_ng(b_n;x)-k_1(x))=w_1(x)$$

(ii) 当 $\lambda<0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n(\ln b_ng(b_n;x)-k_2(x))=w_2(x)$$

其中 $k_i(x)$，$w_i(x)(i=1,2)$ 定义见定理 1.

证 当 $\lambda>0$ 时，规范化常数 a_n,b_n 满足(5)式，当 $n\to\infty$ 时，由(6)式易知

$$\lim_{n\to\infty}n(1-F(a_nx+b_n))=\exp(-x)\tag{8}$$

令

$$A(b_n)=\frac{1-(\ln b_n)^{-2}+3\sigma^4(\ln b_n)^{-4}+O((\ln b_n)^{-6})}{1-(\ln(a_nx+b_n))^{-2}+3\sigma^4(\ln(a_nx+b_n))^{-4}+O((\ln b_n)^{-6})}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}A(b_n)=1$ 且

$$\begin{aligned}&A(b_n)-1=\\&(1+o(1))(-\sigma^2((\ln b_n)^{-2}-(\ln(a_nx+b_n))^{-2})+3\sigma^4((\ln b_n)^{-4}-(\ln(a_nx+b_n))^{-4})+O((\ln b_n)^{-6}))=\\&-2\sigma^4x(\ln b_n)^{-4}+\sigma^6x^2(\ln b_n)^{-5}+O((\ln b_n)^{-6})\end{aligned}\tag{9}$$

由(9)式得

$$A(b_n)-1=O((\ln b_n)^{-4})\tag{10}$$

通过(7)式有

$$\frac{1-F(b_n)}{1-F(a_nx+b_n)}\exp(-x)=\exp(-x)A(b_n)\frac{\exp\left(-\int_e^{b_n}\dfrac{g(t)}{\tilde{f}(t)}\mathrm{d}t\right)}{\exp\left(-\int_e^{a_nx+b_n}\dfrac{g(t)}{\tilde{f}(t)}\mathrm{d}t\right)}=$$

$$A(b_n)\exp\left(\int_0^x\left(\frac{a_n\ln(a_ny+b_n)}{\sigma^2(a_ny+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1\right)\mathrm{d}y\right)=$$

$$A(b_n)\left(1+\int_0^x\left(\frac{a_n\ln(a_ny+b_n)}{\sigma^2(a_ny+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1\right)\mathrm{d}y\right)+$$

$$A(b_n)\left(\frac{1}{2}\left(\int_0^x\left(\frac{a_n\ln(a_ny+b_n)}{\sigma^2(a_ny+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1\right)\mathrm{d}y\right)^2(1+o(1))\right) \tag{11}$$

结合(8),(10) 和(11) 式，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_ng(b_n;x)=\lim_{n\to\infty}\ln b_n(n\ln G(b_n;x)+\exp(-x))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln F(a_nx+b_n)+(1-F(b_n))\exp(-x)}{n^{-1}(\ln b_n)^{-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-F(a_nx+b_n))}{n^{-1}}\frac{\frac{1-F(b_n)}{1-F(a_nx+b_n)}\exp(-x)-1}{(\ln b_n)^{-1}}=$$

$$\exp(-x)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{A(b_n)-1}{(\ln b_n)^{-1}}+\frac{A(b_n)\left(\int_0^x\frac{a_n\ln(a_ny+b_n)}{\sigma^2(a_ny+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1\right)\mathrm{d}y}{(\ln b_n)^{-1}}\right]=$$

$$\exp(-x)\int_0^x-\sigma^2t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\sigma^2t^2=k_1(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n(\ln b_ng(\ln b_n;x)-k(x))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log G(\ln b_n;x)+n^{-1}\exp(-x)-\ln b_n^{-1}n^{-1}k(x)}{n^{-1}\ln b_n^{-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-(1-F(a_nx+b_n))+n^{-1}\exp(-x)(1-k(x)\exp(x)(\ln b_n)^{-1})}{(\ln b_n)^{-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-F(a_nx+b_n))}{n^{-1}}\frac{\frac{1-F(b_n)}{1-F(a_nx+b_n)}\exp(-x)(1-k(x)\exp(x)(\ln b_n)^{-1})-1}{(\ln b_n)^{-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\exp(-x)\left(A(b_n)(\ln b_n)^2\int_0^x\left(\frac{a_n\ln(a_ny+b_n)}{\sigma^2(a_n y+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1+(\ln b_n)^{-1}\sigma^2t\right)\mathrm{d}y-\right.$$

$$k(x)\exp(x)A(b_n)(\ln b_n)\int_0^x\left(\frac{a_n\ln(a_n y+b_n)}{\sigma^2(a_ny+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1\right)\mathrm{d}y+$$

$$\frac{1}{2}(1-k(x)\exp(x)(\ln b_n)^{-1})A(b_n)(\ln b_n)^2\left(\int_0^x\left(\frac{a_n\ln(a_ny+b_n)}{\sigma^2(a_ny+b_n)}+\frac{a_n}{(a_ny+b_n)\ln(a_ny+b_n)}-1\right)\mathrm{d}y\right)^2$$

$$\left.(1+o(1))+\frac{A_n(b_n)-1}{(\ln b_n)^{-2}}\right)=$$

$$\left(-\frac{1}{8}\sigma^4x^4+\frac{1}{3}\sigma^4x^3+\frac{1}{2}\sigma^2x^2+x\right)\exp(-x)=w_1(x)$$

(ii) 类似(i) 可证.

定理 1 的证明　由引理 2 知 $x\to\infty$ 时，$g(b_n;x)\to 0$ 且

$$\left|\sum_{i=3}^{\infty}\frac{g^{i-3}(b_n;x)}{i!}\right|<\exp(g(b_n;x))\to 1$$

因此

$$\ln b_n(\ln b_n(F^n(a_nx+b_n)-\lambda(x))-k(x)\Lambda(x))=$$

$$\ln b_n(\ln b_n(\exp(g(b_n;x))-1)-k(x))\Lambda(x)=$$

$$\left(\ln b_n(\ln b_ng(\ln b_n;x)-k(x))+b_n^2g^2(b_n;x)\left(\frac{1}{2}+g(b_n;x)\sum_{i=3}^{\infty}\frac{g^{i-3}(b_n;x)}{i!}\right)\right)\Lambda(x)\to$$

$$\left(w(x)+\frac{k^2(x)}{2}\right)\Lambda(x)$$

定理 1 得证.

参考文献:

[1] RESNICK S I. Extreme Values, Regular Variation and Point Process [M]. New York: Springer, 1987: 46-47.

[2] LEADBETTER M R, LINDGREN G, ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Process [M]. New York: Springer, 1983: 38-42.

[3] NADARAJAH S, KOTZ S. Skewed Distributions Generated by the Normal Kernel [J]. Statistics & Probability Letters, 2003, 65(3): 269-277.

[4] 杜玲玲,陈守全. 对数伽马分布的尾部性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(1): 85-89.

[5] 刘国涛,陈守全. 混合广义伽马分布的渐进性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(1): 84-87.

[6] 黄建文,羊 豪,庹中友. 对数广义误差分布极值的收敛速度 [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2014, 31(8): 5-8.

Expansion on Extremes from Logarithmic Skew Normal-Logistic Distribution

ZHANG Rui-li, CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the tail characteristics of Logarithmic Skew Normal-Logistic distribution have been discussed and the higher-order expansion of distribution of maxima been obtained.

Key words: extreme value distribution; Logarithmic Skew Normal-Logistic distribution; asymptotic expansion

责任编辑 张 枸