DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.01.004

Brinbaum-Sauders 分布的极值收敛速度[①]

张韩雨， 陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要讨论了 Brinbaum-Sauders 分布的尾部特征，得到了最大值分布的渐进展开.

关 键 词：极值分布；Brinbaum-Sauders 分布；渐近展开；收敛速度

中图分类号：**O211.4** **文献标志码**：**A** **文章编号**：1000-5471(2020)01-0019-06

设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列，其公共分布函数为$F(x)$. 记$M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$. 对非退化分布函数$G(x)$存在实数序列$a_n > 0$，$b_n \in \mathbb{R}$，$n \geqslant 1$使得

$$\lim_{n \to \infty} P\{a_n^{-1}(M_n - b_n) \leqslant x\} = \lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{1}$$

则$G(x)$必为 3 大极值分布类型之一. 若(1)式成立，则称F属于G的吸引场，记为$F \in D(G)$. 相关研究详见文献[1-2]等.

Brinbaum-Sauders 分布是文献[3]在研究因裂纹扩展导致的材料失效过程中推导出来的. Brinbaum-Sauders 分布常常作为一种疲劳寿命分布广泛应用于机械产品可靠性研究以及电子产品性能退化失效分析，近年来由于其良好的性质也被应用于商业、环境、医学等各个领域.

对于$x > 0$，Brinbaum-Sauders 分布的概率分布函数和概率密度函数分别为：

$$F_{BS} = \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)\right), \quad x > 0$$

$$f_{BS} = \frac{\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}} x^{-\frac{3}{2}}(x+\beta)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x}\right)\right), \quad x > 0$$

其中：$\Phi(\cdot)$为标准正态分布的分布函数；参数$\alpha > 0$，$\beta > 0$.

本文主要讨论服从 Brinbaum-Sauders 分布的样本最大值分布的收敛速度.

1 辅助结果

本节通过计算 Brinbaum-Sauders 分布的 Mills 不等式及 Mills 率，得到了 Brinbaum-Sauders 分布所属的吸引场及对应的规范化常数.

命题 1 设$F(x)$与$f(x)$分别代表 Brinbaum-Sauders 分布对应的分布函数与概率密度函数，则

---

① 收稿日期：2018-11-22

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).

作者简介：张韩雨(1996-)，女，硕士研究生，主要从事极值统计的研究.

通信作者：陈守全，博士，副教授.

$$\frac{2\alpha^2\beta x}{x+\beta}(1-(\alpha^2-1)\beta x^{-1}) < \frac{1-F(x)}{f(x)} < \frac{2\alpha^2\beta x^2}{x^2-\beta^2}$$

当 $x \to \infty$ 时，有

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} \sim \frac{2\alpha^2\beta x}{x+\beta} \tag{2}$$

证 由分部积分得

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} = \frac{\int_x^\infty t^{-\frac{3}{2}}(t+\beta)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}\right)\right)\mathrm{d}t}{x^{-\frac{3}{2}}(x+\beta)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{x}{\beta}+\frac{\beta}{x}\right)\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{2\alpha^2\beta x^{\frac{1}{2}}}{x-\beta} - \frac{2\alpha^4\beta^2 x^{\frac{3}{2}}}{(x-\beta)^3} + \frac{6\alpha^6\beta^3 x^{\frac{5}{2}}}{(x-\beta)^5} + O(x^{-\frac{7}{2}})\right)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{x}{\beta}+\frac{\beta}{x}\right)\right)}{x^{-\frac{3}{2}}(x+\beta)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{x}{\beta}+\frac{\beta}{x}\right)\right)} =$$

$$\frac{2\alpha^2\beta x}{x+\beta}\left(\left(1-\frac{\beta}{x}\right)^{-1} - \alpha^2\beta x^{-1}\left(1-\frac{\beta}{x}\right)^{-3} + 3\alpha^4\beta^2x^{-2}\left(1-\frac{\beta}{x}\right)^{-5} + O(x^{-3})\right) =$$

$$\frac{2\alpha^2\beta x}{x+\beta}(1-(\alpha^2-1)\beta x^{-1} + (3\alpha^4-3\alpha^2+1)\beta^2x^{-2} + O(x^{-3})) >$$

$$\frac{2\alpha^2\beta x}{x+\beta}(1-(\alpha^2-1)\beta x^{-1}) \tag{3}$$

由于

$$x^{-1}(1+x^{-2})^{-1}\phi(x) < 1-\Phi(x) < x^{-1}\phi(x)$$

所以

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} = \frac{1-\Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)\right)}{\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)(2\alpha\sqrt{2\pi\beta})^{-1}x^{-\frac{3}{2}}(x+\beta)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{x}{\beta}+\frac{\beta}{x}\right)\right)} <$$

$$\frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)^{-1}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)\right)}{\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)(2\alpha\sqrt{2\pi\beta})^{-1}x^{-\frac{3}{2}}(x+\beta)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{x}{\beta}+\frac{\beta}{x}\right)\right)} =$$

$$\frac{2\alpha^2\beta x^2}{x^2-\beta^2} \tag{4}$$

由(3),(4) 式知结论成立.

由命题 1，可得到 Brinbaum-Sauders 分布的尾部表示：

命题 2 设 $F(x)$ 与 $f(x)$ 分别代表 Brinbaum-Sauders 分布对应的分布函数与概率密度函数，则

$$1-F(x) = c(x)\exp\left(-\int_1^x \frac{g(t)}{h(t)}\mathrm{d}t\right)$$

其中

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = \alpha\sqrt{\beta}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\right)$$

$$h(x) = 2\alpha^2\beta > 0,\ h'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\alpha^2\beta}{x} - \frac{\beta^2}{x^2} + 1\right) = 1$$

由文献[1] 的推论 1.7 知 $F(x) \in D(\Lambda)$，规范常数 a_n, b_n 可由

$$1-F(b_n) = n^{-1},\ a_n = h(b_n) \tag{5}$$

确定.

利用Brinbaum-Sauders分布的Mills率及文献[2]中求正态分布规范化常数的方法，可以找出另一对规范化常数.

命题 3　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是独立同服从 Brinbaum-Sauders 分布的随机变量序列，则

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant \alpha_n x+\beta_n)=\Lambda(x)$$

其中：$\alpha_n=2\alpha^2\beta$, $\beta_n=2\alpha^2\beta(\log n-\frac{1}{2}\log\log n+\alpha^{-2}-\log 2\sqrt{\pi})$.

证　由于$F(x)$连续，$x\in\mathbb{R}$，则存在$u_n=u_n(x)$当$x\to\infty$时$n(1-F(u_n))\to\exp(-x)$. 利用(2)式，

$$n\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}}u_n^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\exp\left(x-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{u_n}{\beta}+\frac{\beta}{u_n}\right)\right)\to 1$$

取对数得

$$\log n+x+\log\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{2\pi}-\frac{1}{2}\log u_n+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{u_n}{\beta}+\frac{\beta}{u_n}\right)\to 0 \tag{6}$$

则

$$\frac{2\alpha^2\beta\log n}{u_n}\to 1$$

取对数得

$$\log u_n=\log 2\alpha^2\beta+\log\log n+o(1) \tag{7}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}u_n^{-1}=0$，将(7)式带入到(6)式得

$$\begin{aligned}u_n=&2\alpha^2\beta\left[x+\log n+\log\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{2}(\log 2\alpha^2\beta+\log\log n)+o(1)\right]=\\&2\alpha^2\beta x+2\alpha^2\beta(\log n-\frac{1}{2}\log\log n+\frac{1}{\alpha^2}-\log 2\sqrt{\pi})+o(1)=\\&\alpha_n x+\beta_n+o(\alpha_n)\end{aligned}$$

结合文献[2]中定理 1.2.3 和定理 1.5.1 结论，命题得证.

命题 4　在命题 2 的条件下，对于充分大的n，有

$$F^n(\alpha_n x+\beta_n)-\Lambda(x)\sim\frac{\Lambda(x)\exp(-x)}{4}\frac{\log\log n}{\log n} \tag{8}$$

证　令$u_n=\alpha_n x+\beta_n$，$\tau_n=n(1-F(u_n))$.

$$u_n=2\alpha^2\beta x+2\alpha^2\beta\left(\log n-\frac{1}{2}\log\log n+\frac{1}{\alpha^2}-\log 2\sqrt{\pi}\right)+o(1)$$

可以推出

$$u_n^{-1}=(2\alpha^2\beta\log n)^{-1}\left(1+\frac{\log\log n}{2\log n}+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)$$

$$u_n^{-\frac{1}{2}}=(2\alpha^2\beta\log n)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\log\log n}{4\log n}+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\tau_n=&n(1-F(u_n))=\\&n\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi}}u_n^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{u_n}{\beta}+\frac{\beta}{u_n}\right)\right)(1+o(1))=\\&\exp(-x)\left(1+\frac{\log\log n}{4\log n}+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\end{aligned}$$

因此，对于 $\tau(x)=\exp(-x)$，当 n 足够大时有

$$\tau_n(x)-\tau(x)\sim\frac{\exp(-x)}{4}\frac{\log\log n}{\log n}$$

进一步运用文献[2]中的定理2.4.2，可得(8)式.

近年关于极值渐进展开的研究可参见文献[4-5].

2 Brinbaum-Sauders 分布的极值分布的收敛速度

通过前面的讨论知 Brinbaum-Sauders 分布属于 Gambel 吸引场，因此 $n\to\infty$ 时，

$$\Delta_n(x)=F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x)\to 0$$

下面得到 $\Delta_n(x)$ 的点点收敛速度.

定理1 设 $F(x)$ 为 Brinbaum-Sauders 分布函数，a_n,b_n 满足(5)式，则 $n\to\infty$ 时，有

$$b_n(b_n(F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x))\to\left(w(x)+\frac{k^2(x)}{2}\right)\Lambda(x)$$

其中

$$k(x)=\alpha^2\beta x\exp(-x),\ w(x)=\left(-\frac{1}{2}\alpha^4\beta^2x^2-2\alpha^2(\alpha^2-1)\beta^2x\right)\exp(-x)\tag{9}$$

注1 由定理1知，当 $n\to\infty$ 时，$F^n(a_nx+b_n)\to\Lambda(x)$ 的收敛速度为 $(\log n)^{-1}$.

为了证明定理1，给出下面两个引理.

由命题1的证明过程易得：

引理1 对于充分大的 x，有

$$1-F(x)=\alpha\sqrt{\beta}\phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\beta}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\right)(1-(\alpha^2-1)\beta x^{-1}+(3\alpha^4-3\alpha^2+1)\beta^2x^{-2}+O(x^{-3}))\times \exp\left(-\int_1^x\frac{\frac{\alpha^2\beta}{t}-\frac{\beta^2}{t^2}+1}{2\alpha^2\beta}\mathrm{d}t\right)\tag{10}$$

引理2 令 $G(b_n;x)=F(a_nx+b_n)$，$g(b_n;x)=n\log G(b_n;x)+\exp(-x)$. 其中规范化常数 a_n,b_n 满足(5)式，则

$$\lim_{n\to\infty}b_n(b_ng(b_n;x)-k(x))=w(x)$$

其中 $k(x),w(x)$ 定义见定理1.

证 当 $n\to\infty$ 时 $n(1-F(b_n))\to 1$，有 $b_n\to\infty$，根据文献[1]命题0.10能导出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F(b_n+2\alpha^2\beta x)}{\frac{2\alpha^2\beta\, b_n}{b_n+\beta}f(b_n)}=\exp(-x)\tag{11}$$

令

$$A(b_n)=\frac{1-(\alpha^2-1)\beta b_n^{-1}+(3\alpha^4-3\alpha^2+1)\beta^2b_n^{-2}+O(b_n^{-3})}{1-(\alpha^2-1)\beta(b_n+2\alpha^2\beta x)^{-1}+(3\alpha^4-3\alpha^2+1)\beta^2(b_n+2\alpha^2\beta x)^{-2}+O(b_n^{-3})}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}A(b_n)=1$，且

$$A(b_n)-1=\left(-\frac{2\alpha^2(\alpha^2-1)\beta^2x}{b_n^2}+O(b_n^{-3})\right)(1+o(1))\tag{12}$$

由(12)式得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(b_n)-1}{b_n^{-2}}=-2\alpha^2(\alpha^2-1)\beta^2x\tag{13}$$

通过(10)式有

$$\frac{1-F(b_n)}{1-F(b_n+2\alpha^2\beta x)}\exp(-x)=\exp(-x)A(b_n)\frac{\exp\left(-\int_1^{b_n}\frac{g(t)}{h(t)}\mathrm{d}t\right)}{\exp\left(-\int_1^{b_n+2\alpha^2\beta x}\frac{g(t)}{h(t)}\mathrm{d}t\right)}=$$

$$A(b_n)\exp\left(\int_0^x\frac{\alpha^2\beta}{b_n+2\alpha^2\beta y}-\frac{\beta^2}{(b_n+2\alpha^2\beta y)^2}\mathrm{d}y\right)= \tag{14}$$

$$A(b_n)\left(1+\int_0^x\frac{\alpha^2\beta}{b_n+2\alpha^2\beta y}-\frac{\beta^2}{(b_n+2\alpha^2\beta y)^2}\mathrm{d}y\right)+$$

$$A(b_n)\left(\frac{1}{2}\left(\int_0^x\frac{\alpha^2\beta}{b_n+2\alpha^2\beta y}-\frac{\beta^2}{(b_n+2\alpha^2\beta y)^2}\mathrm{d}y\right)^2(1+o(1))\right)$$

结合(11),(13) 和(14) 式，有

$$\lim_{n\to\infty}b_ng(b_n;x)=\lim_{n\to\infty}b_n(n\log G(b_n;x)+\exp(-x))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log G(b_n;x)+n^{-1}\exp(-x)}{n^{-1}b_n^{-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log F(b_n+2\alpha^2\beta x)+(1-F(b_n))\exp(-x)}{\frac{2\alpha^2\beta b_n}{b_n+\beta}f(b_n)b_n^{-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F(b_n+2\alpha^2\beta x)}{\frac{2\alpha^2\beta b_n}{b_n+\beta}f(b_n)}\frac{\frac{1-F(b_n)}{1-F(b_n+2\alpha^2\beta x)}\exp(-x)-1}{b_n^{-1}}=$$

$$\exp(-x)\int_0^x\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^2\beta b_n}{b_n+2\alpha^2\beta y}-\frac{\beta^2b_n}{(b_n+2\alpha^2\beta y)^2}\right)\mathrm{d}y=$$

$$\alpha^2\beta x\exp(-x)=k(x) \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n(b_ng(b_n;x)-k(x))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log G(b_n;x)+n^{-1}\exp(-x)-b_n^{-1}n^{-1}k(x)}{n^{-1}b_n^{-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F(b_n+2\alpha^2\beta x)}{\frac{2\alpha^2\beta b_n}{b_n+\beta}f(b_n)}\frac{\frac{1-F(b_n)}{1-F(b_n+2\alpha^2\beta x)}\exp(-x)(1-\alpha^2\beta xb_n^{-1})-1}{b_n^{-2}}=$$

$$\exp(-x)\lim_{n\to\infty}\left(-2\alpha^2(\alpha^2-1)\beta^2x-\frac{\alpha^2\beta xA(b_n)}{b_n^{-1}}+\frac{\alpha^2\beta xA(b_n)}{b_n^{-1}}+\frac{1}{2}\alpha^4\beta^2x^2-\alpha^4\beta^2x^2+0\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\alpha^4\beta^2x^2-2\alpha^2(\alpha^2-1)\beta^2x\right)\exp(-x)=w(x) \tag{16}$$

由(15),(16) 式可知，结论得证.

下面证明定理 1.

定理 1 的证明　由引理 2 知 $x\to\infty$ 时，$g(b_n;x)\to 0$ 且

$$\left|\sum_{i=3}^{\infty}\frac{g^{i-3}(b_n;x)}{i!}\right|<\exp(g(b_n;x))\to 1$$

因此

$$b_n(b_n(F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x))=$$

$$b_n(b_n(\exp(g(b_n;x))-1)-k(x))\Lambda(x)=$$

$$\left(b_n(b_ng(b_n;x)-k(x))+b_n^2g^2(b_n;x)\left(\frac{1}{2}+g(b_n;x)\sum_{i=3}^{\infty}\frac{g^{i-3}(b_n;x)}{i!}\right)\right)\Lambda(x)\to$$

$$\left(w(x)+\frac{k^2(x)}{2}\right)\Lambda(x)$$

定理1得证.

参考文献:

[1] RESNICK S I. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes [M]. New York: Springer, 1987.
[2] LEADBETTER M R, LINDGREN G, ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York: Springer, 1983.
[3] BIRNBAUM Z W, SAUNDERS S C. A New Family of Life Distributions [J]. Journal of Applied Probability, 1969, 6(2): 319-327.
[4] 杜玲玲, 陈守全. 对数伽马分布的尾部性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(1): 85-89.
[5] 刘国涛, 陈守全. 混合广义伽马分布的渐进性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(1): 84-87.

Rates of Convergence of Extreme for Brinbaum-Sauders Distribution

ZHANG Han-yu, CHEN Shou-quan
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the tail representation of Brinbaum-Sauders distribution has been discussed and the asymptotic expansion of maximum of independent random variables with the given distribution been obtained.

Key words: extreme value distribution; Brinbaum-Sauders distribution; asymptotic expansion; convergence rate

责任编辑 张 枸