DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.01.005

逆高斯分布的极值收敛速度①

张梦君，　陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要讨论了逆高斯分布的最大值分布渐近展开，得到最大值分布收敛到 Gumbel 分布的收敛速度.

关　键　词： 逆高斯分布；渐近展开；收敛速度

中图分类号：O211.4　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2020)01-0025-06

逆高斯分布源于布朗运动中具有正漂移的初至时间分布. 文献[1]在 1957 年率先将逆高斯分布应用于统计领域. 若随机变量 X 密度为

$$f(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}x^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-u)^2\lambda}{2u^2x}\right)\qquad 0<x<\infty$$

则称 X 服从参数 $u>0$，$\lambda>0$ 的逆高斯分布(记为 $X\sim IG(u,\lambda)$).

文献[2]给出了 $IG(u,\lambda)$ 的累积分布函数与正态分布之间的关系

$$1-F(x)=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{u}-1\right)\right)-\exp\left(\frac{2\lambda}{u}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{u}+1\right)\right)\tag{1}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布的累积分布函数. 由逆高斯分布函数的表达式不难得到当 $\lambda\to\infty$ 时逆高斯分布函数是渐进正态的.

近年来，有关极值渐进展开及收敛速度的研究得到了迅速发展. 文献[3]研究了广义指数分布随机变量序列最大值的收敛速度；文献[4]分析了混合广义伽马分布的渐进性质；文献[5]对对数伽马分布的尾部性质进行了探讨.

本文讨论了服从 $IG(\lambda)$ 样本最大值分布的收敛速度.

1　辅助结果

本节将给出几个有关逆高斯分布的重要辅助结果.

命题 1　令 $F(x)$，$f(x)$ 分别表示逆高斯分布的累积分布函数和概率分布函数. 当 x 充分大时，对于 $u>0$，$\lambda>0$ 有

$$1-F(x)=c(x)\exp\left(-\int_1^t\frac{g(x)}{h(x)}\mathrm{d}x\right)=$$

$$\exp\left(-\int_1^x\frac{1-u^2t^{-2}+3u^2\lambda^{-1}t^{-1}}{2u^2\lambda^{-1}}\mathrm{d}t\right)$$

① 收稿日期：2018-11-22
基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).
作者简介：张梦君(1994—)，女，硕士研究生，主要从事极值统计的研究.
通信作者：陈守全，博士，副教授.

$$\frac{\sqrt{2}u^2}{\sqrt{\lambda\pi}}\exp\left(\frac{\lambda}{u}-\frac{\lambda}{2u^2}-\frac{\lambda}{2}\right)\left[1-\frac{3u^2}{\lambda}x^{-1}+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)x^{-2}+O(x^{-3})\right]$$

其中

$$c(x)=\frac{\sqrt{2}u^2}{\sqrt{\lambda\pi}}\exp\left(\frac{\lambda}{u}-\frac{\lambda}{2u^2}-\frac{\lambda}{2}\right)\qquad \text{as } x\to\infty$$

$$h(x)=\frac{2u^2}{\lambda}>0,\ h'(x)=0\qquad \text{as } x\to\infty$$

$$g(x)=1+\frac{3u^2}{\lambda x}-\frac{u^2}{x^2}\to 1\qquad \text{as } x\to\infty$$

证 注意到

$$1-\Phi(x)=\frac{\phi(x)}{x}[1-x^{-2}+3x^{-4}+O(x^{-6})]\tag{2}$$

其中 $\phi(x)$ 是标准正态分布的密度函数，在 x 足够大时成立(证明参见文献[6]). 由(1)和(2)式得

$$\begin{aligned}
1-F(x)=&1-\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{u}-1\right)\right)-\exp\left(\frac{2\lambda}{u}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{u}+1\right)\right)=\\
&\frac{u}{\lambda}f(x)\left[\frac{x^2}{x-u}-\frac{x^2}{x+u}-\left(\frac{x^2}{x-u}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x-u)}{\sqrt{xu}}\right)^{-2}-\frac{x^2}{x+u}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x+u)}{\sqrt{xu}}\right)^{-2}\right)+\right.\\
&\left.\frac{3x^2}{x-u}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x-u)}{\sqrt{xu}}\right)^{-4}-\frac{3x^2}{x+u}\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x+u)}{\sqrt{xu}}\right)^{-4}+O(x^{-3})\right]=\\
&\frac{u}{\lambda}f(x)\left[\frac{2ux^2}{x^2-u^2}-\frac{u^2x^3(6ux^2+2u^3)}{\lambda(x^2-u^2)^3}+\frac{3u^4x^4(10ux^4+20u^3x^2+2u^5)}{\lambda^2(x^2-u^2)^5}+O(x^{-3})\right]=\\
&\frac{\sqrt{2}u^2}{\sqrt{\lambda\pi}}\exp\left(\frac{\lambda}{u}-\frac{\lambda}{2u^2}-\frac{\lambda}{2}\right)\left[1-\frac{3u^2}{\lambda}x^{-1}+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)x^{-2}+O(x^{-3})\right]\\
&\exp\left(-\int_1^x\frac{1-u^2t^{-2}+3u^2\lambda^{-1}t^{-1}}{2u^2\lambda^{-1}}\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}\tag{3}$$

(3)式的最后两步由泰勒展开式得到

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+O(x^3),\ |x|<1$$

由命题 1 和文献[7]的推论 1.7 可得 $F\in D(\Lambda)$. 规范常数 a_n 和 b_n 可选为

$$1-F(b_n)=n^{-1},\ a_n=h(b_n)\tag{4}$$

由命题 1 及文献[8]的定理 1.5.1 易得:

命题 2 设 X_n, $n\geqslant 1$ 时为独立同分布的随机变量序列，其公共分布函数为逆高斯分布 $F(x)$. 记 $M_n=\max(X_k,\ 1\leqslant k\leqslant n)$ 为部分最大值，则

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant\alpha_n x+\beta_n)=\Lambda(x)$$

其中规范常数 α_n 和 β_n 为

$$\alpha_n=\frac{2u^2}{\lambda},\ \beta_n=\frac{2u^2}{\lambda}\log n-\frac{3u^2}{\lambda}\log\log n-\frac{\lambda}{2\log n}+\frac{2u^2}{\lambda}\log\frac{\lambda}{2u\sqrt{\pi}}+2u$$

对于 $\lambda>0$ 和 $u>0$ 成立.

2 逆高斯分布的极值分布收敛速度

定理 1 设 $F(x)$ 为逆高斯分布的累积分布函数，且规范常数 α_n 和 β_n 满足命题 2，则

$$F^n(\alpha_n x+\beta_n)-\Lambda(x)\sim\frac{9\Lambda(x)\exp(-x)}{4}\frac{\log\log n}{\log n}\tag{5}$$

证 令 $v_n = \alpha_n x + \beta_n$ 并且 $\tau_n = n[1 - F(v_n)]$，其中 α_n 和 β_n 由命题 2 给定.

$$v_n = \frac{2u^2}{\lambda}x + \frac{2u^2}{\lambda}\log n - \frac{3u^2}{\lambda}\log\log n - \frac{\lambda}{2\log n} + \frac{2u^2}{\lambda}\log\frac{\lambda}{2u\sqrt{\pi}} + 2u \tag{6}$$

由(6)式可以推导出

$$v_n = \frac{2u^2}{\lambda}x + \frac{2u^2}{\lambda}\log n - \frac{3u^2}{\lambda}\log\log n - \frac{\lambda}{2\log n} + \frac{2u^2}{\lambda}\log\frac{\lambda}{2u\sqrt{\pi}} + 2u =$$

$$\frac{2u^2}{\lambda}\log n\left(1 + \frac{x}{\log n} - \frac{\lambda^2}{4u^2(\log n)^2} - \frac{3\log\log n}{2\log n} + \frac{1}{\log n}\log\frac{\lambda}{2u\sqrt{\pi}} + \frac{\lambda}{u\log n}\right)$$

$$v_n^{-1} = \frac{\lambda}{2u^2}\frac{1}{\log n}\left(1 + \frac{x}{\log n} - \frac{\lambda^2}{4u^2(\log n)^2} - \frac{3\log\log n}{2\log n} + \frac{1}{\log n}\log\frac{\lambda}{2u\sqrt{\pi}} + \frac{\lambda}{u\log n}\right)^{-1} =$$

$$\frac{\lambda}{2u^2}\frac{1}{\log n}\left[1 + \frac{3\log\log n}{2\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right]$$

$$v_n^{-\frac{3}{2}} = \lambda^{\frac{3}{2}}2^{-\frac{3}{2}}u^{-\frac{3}{2}}(\log n)^{-\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{9\log\log n}{4\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right]$$

于是有

$$\tau_n = n(1 - F(v_n)) =$$

$$\frac{\sqrt{2}u^2}{\sqrt{\lambda\pi}}nv_n^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda}{2u^2}v_n - \frac{\lambda}{2v_n} + \frac{\lambda}{u}\right)(1 + o(1)) =$$

$$\frac{n\lambda}{\sqrt{2u\pi}}\log n^{-\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{9\log\log n}{4\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right]\exp\left[-\frac{\lambda^2}{4u^2\log n}\left(1 + \frac{3\log\log n}{2\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\right] =$$

$$\exp(-x)\left[1 + \frac{9\log\log n}{4\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right]\left[1 - \frac{3\lambda^2\log\log n}{8u^2(\log n)^2} - \frac{\lambda^2}{4u^2\log n}O\left(\frac{1}{\log n}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{9\lambda^4(\log\log n)^2}{64u^4(\log n)^4} + \frac{\lambda^4}{16u^4(\log n)^2}O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right) + \frac{3\lambda^4\log\log n}{16u^4(\log n)^3}O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\right] =$$

$$\exp(-x)\left[1 + \frac{9\log\log n}{4\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right]$$

显然，对于 $\tau(x) = \exp(-x)$，

$$\tau_n(x) - \tau(x) = \exp(-x)\left[\frac{9\log\log n}{4\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right] \sim \frac{9\log\log n}{4\log n}\exp(-x)$$

在 n 足够大时成立，因此通过文献[8]的定理 2.4.2，可以得到(5)式.

定理 2 设 $F(x)$ 为逆高斯分布的累积分布函数，规范常数 a_n 和 b_n 满足(4)式，则

$$b_n[b_n(F^n(a_n x + b_n) - \Lambda(x)) - \kappa(x)\Lambda(x)] \to \left(\omega(x) + \frac{\kappa^2(x)}{2}\right)\Lambda(x)$$

在 $n \to \infty$ 时成立，其中

$$\kappa(x) = -\frac{3}{2}x\exp(-x),\ \omega(x) = -\left(\frac{6u^4}{\lambda^2}x + \frac{9}{16}\right)\exp(-x)$$

引理 1 设 $G(b_n; x) = F(a_n x + b_n)$ 并且 $g(b_n; x) = n\log G(b_n; x) + \exp(-x)$ 有规范常数 a_n, b_n，其中 a_n 和 b_n 由(4)式给出，则

$$\lim_{n\to\infty} b_n(b_n g(b_n; x) - \kappa(x)) = \omega(x)$$

其中 $\kappa(x)$ 和 $\omega(x)$ 由定理 2 给定.

证 显然，$b_n \to \infty$ 与 $n \to \infty$ 互为充要条件，因为 $1 - F(b_n) = n^{-1}$. 由命题 1 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 - F\left(b_n + \frac{2u^2}{\lambda}x\right)}{\frac{2u^2}{\lambda}f(b_n)} = \exp(-x) \tag{7}$$

令

$$A(b_n)=\frac{1-\frac{3u^2}{\lambda}b_n^{-1}+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)b_n^{-2}+O(b_n^{-3})}{1-\frac{3u^2}{\lambda}\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)^{-1}+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)^{-2}+O\left((b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x)^{-3}\right)}$$

则$\lim_{n\to\infty}A(b_n)=1$，且

$$A(b_n)-1=\frac{1-\frac{3u^2}{\lambda}b_n^{-1}+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)b_n^{-2}+O(b_n^{-3})}{1-\frac{3u^2}{\lambda}\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)^{-1}+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)^{-2}+O\left((b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x)^{-3}\right)}-1=$$

$$(1+O(b_n^{-1}))\left[-\frac{3u^2}{\lambda}b_n^{-1}\left(1-\left(1+\frac{2u^2}{\lambda}xb_n^{-1}\right)^{-1}\right)+\left(u^2+\frac{15u^4}{\lambda^2}\right)b_n^{-2}\left(1-\left(1+\frac{2u^2}{\lambda}xb_n^{-1}\right)^{-2}\right)+O(b_n^{-3})\right]=$$

$$-\frac{6u^4x}{\lambda^2}b_n^{-2}+O(b_n^{-3})$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(b_n)-1}{b_n^{-2}}=-\frac{6u^4}{\lambda^2}x \tag{8}$$

$$\left[\int_0^x\left(-\frac{3}{2(b_n-y)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y\right]^2=\left[\frac{3}{2}\log(1-xb_n^{-1})-b_n^{-1}(1-xb_n^{-1})^{-1}+b_n^{-1}\right]^2= \frac{9}{4}x^2b_n^{-2}+O(b_n^{-3}) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-F(b_n)}{1-F\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)}\exp(-x)&=A(b_n)\exp\left(\int_0^x\left(\frac{3}{2(y-b_n)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y\right)=\\ &A(b_n)\left\{1+\int_0^x\left(-\frac{3}{2(b_n-y)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y+\right.\\ &\left.\frac{1}{2}\left[\int_0^x\left(-\frac{3}{2(b_n-y)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y\right]^2(1+o(1))\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

结合(7),(8),(9)和(10)式，得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_ng(b_n;x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\log G(b_n;x)+n^{-1}\exp(-x)}{n^{-1}b_n^{-1}}=\\ &\lim_{n\to\infty}\frac{\log F\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)+[1-F(b_n)]\exp(-x)}{\frac{2u^2}{\lambda}f(b_n)b_n^{-1}}=\\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1-F\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)}{\frac{2u^2}{\lambda}f(b_n)}\frac{\frac{1-F(b_n)}{F\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)}\exp(-x)-1}{b_n^{-1}}=\\ &\exp(-x)\lim_{n\to\infty}b_n\left[A(b_n)-1+A(b_n)\int_0^x\left(\frac{3}{2(y-b_n)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y\right]=\\ &\exp(-x)\lim_{n\to\infty}\int_0^x\left(\frac{3}{2(yb_n^{-1}-1)}-\frac{1}{y^2b_n^{-1}+b_n-2y}\right)\mathrm{d}y=\\ &-\frac{3}{2}x\exp(-x)=\kappa(x)\end{aligned} \tag{11}$$

其中最后一步由控制收敛定理证得. 类似于(11)式的证明，得到

$$\lim_{n\to\infty} b_n[b_n g(b_n;x)-\kappa(x)]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log G(b_n;x)+n^{-1}\exp(-x)-b_n^{-1}n^{-1}\kappa(x)}{n^{-1}b_n^{-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)}{\frac{2u^2}{\lambda}f(b_n)}\frac{\frac{1-F(b_n)}{F\left(b_n+\frac{2u^2}{\lambda}x\right)}\exp(-x)\left(1+\frac{3}{2}xb_n^{-1}\right)-1}{b_n^{-2}}=$$

$$\exp(-x)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{A(b_n)-1}{b_n^{-2}}+\frac{3xA(b_n)}{2b_n^{-1}}+\frac{A(b_n)\int_0^x\left(\frac{3}{2(y-b_n)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y}{b_n^{-2}}+\right.$$

$$\frac{3A(b_n)x\int_0^x\left(\frac{3}{2(y-b_n)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y}{2b_n^{-1}}+\frac{A(b_n)\left(\int_0^x\left(\frac{3}{2(y-b_n)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y\right)^2}{2b_n^{-2}}+$$

$$\left.\frac{3A(b_n)x\left(\int_0^x\left(\frac{3}{2(y-b_n)}-\frac{1}{(y-b_n)^2}\right)\mathrm{d}y\right)^2}{4b_n^{-1}}\right]=$$

$$\exp(-x)\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{6u^4}{\lambda^2}x+\frac{3A(b_n)x}{2b_n^{-1}}-\frac{3A(b_n)x}{2b_n^{-1}}-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{8}x^2+0\right)=$$

$$-\left(\frac{6u^4}{\lambda^2}x+\frac{9}{8}x^2\right)\exp(-x)=\omega(x)$$

定理 2 的证明

由引理 1 知 $n\to\infty$，$g(b_n;x)\to 0$，

$$\left|\sum_{i=3}^{\infty}\frac{g^{i-3}(b_n;x)}{i!}\right|<\exp(g(b_n;x))\to 1$$

且

$$b_n[b_n(F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-\kappa(x)\Lambda(x)]=$$

$$b_n[b_n(\exp(g(b_n;x))-1)-\kappa(x)]\Lambda(x)=$$

$$\left[b_n(b_ng(b_n;x)-\kappa(x))+b_n^2g^2(b_n;x)\left(\frac{1}{2}+g(b_n;x)\sum_{i=3}^{\infty}\frac{g^{i-3}(b_n;x)}{i!}\right)\right]\Lambda(x)\to$$

$$\left[\omega(x)+\frac{\kappa^2(x)}{2}\right]\Lambda(x)$$

定理 2 证毕.

通过(4)式中的$\frac{1}{b_n}=O\left(\frac{1}{\log n}\right)$，不难由定理 2 得到 $F^n(a_n(x)+b_n)-\Lambda(x)=O\left(\frac{1}{\log n}\right)$即 $F^n(a_nx+b_n)$收敛到其极限分布 $\Lambda(x)$ 的收敛速度为$\frac{1}{\log n}$.

参考文献：

[1] TWEEDIE M C K. Statistical Properties of Inverse Gaussian Distributions [J]. Annals of Mathematical Statistics，1957，28(3)：696-705.

[2] LESLIE J，CHHIKARA R，FOLKS J. The Inverse Gaussian Distribution：Theory，Methodology，and Applications [J]. Applied Statistics，1990，39(2)：259-260.

[3] 刘姣姣，陈守全. 广义指数分布随机变量序列最大值的收敛速度 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(5)：89-92.

[4] 刘国涛，陈守全. 混合广义伽马分布的渐进性质[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(1)：84-87.
[5] 杜玲玲，陈守全. 对数伽马分布的尾部性质[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(1)：85-89.
[6] CANTO E，CASTRO L. Uniform Rates of Convergence in Extreme-Value Theory-Normal and Gamma Models [J]. Annual Scientific University Clermont-Ferrand II Probability Application，1987，6(6)：25-41.
[7] RESNICK S I. Extreme Values，Regular Variation and Point Processes [M]. New York：Springer，1987.
[8] LEADBETTER M R，LINDGREN G，ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York：Springer，1983.

On Rate of Convergence of Extremes from Inverse Gaussian Samples

ZHANG Meng-jun， CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the asymptotic expansion of the maximum distribution of inverse gaussian distribution has mainly been discussed，and the convergence rate of the maximum distribution convergence to Gumbel distribution been obtained.

Key words：inverse gaussian distribution；asymptotic expansion；rate of convergence

责任编辑 张 枸