DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.01.006

非自治随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程的 Wong-Zakai 逼近①

吴柯楠，　王凤玲，　李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在 Wong-Zakai 逼近下证明了非自治 Kuramoto-Sivashinsky 方程吸引子的存在性.

关　键　词：非自治的 Kuramoto-Sivashinsky 方程；拉回吸引子；非自治动力系统；Wong-Zakai 逼近

中图分类号：O211.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2020)01-0031-06

目前已有不少关于带有白噪声随机 Kuramoto-Sivashinsky(K-S) 方程解的长时间行为的研究[1-2]. 然而本文则是通过参考文献[3] 在 Wong-Zakai 逼近意义下证明了非自治随机的 K-S 方程 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子的存在性，即定义一个关于 K-S 方程的连续协循环 Φ，利用 Sobolev 嵌入定理证明了 Φ 的渐进紧性.

借鉴文献[4] 引入参数动力系统及拉回吸引子相关概念. 设 (X, d) 是一个可分的完备度量空间并带有 Borel- 代数 $\mathscr{B}(X)$，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个随机概率空间，变换 θ_t：$\mathbb{R}\times\Omega\longrightarrow\Omega$ 是一个 $(\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}, \mathscr{F})$ 且满足 $\theta_t(0, t)$，$\theta_t(s+t, \cdot)=\theta_t(t, \cdot)\circ\theta_t(s, \cdot)$ 的可测变换.

定义 1　令 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是参数动力系统，如果映射 Φ：$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times X\longrightarrow X$，对任意 $\omega\in\Omega$，$\tau\in\mathbb{R}$ 及 $t, s\in\mathbb{R}^+$，满足条件：

(i) $\Phi(\cdot, \tau, \cdot, \cdot)$：$\mathbb{R}^+\times\Omega\times X\longrightarrow X$ 是 $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(X), \mathscr{B}(X))$ 可测；

(ii) $\Phi(0, \tau, \omega, \cdot)$ 是 X 上的恒等映射；

(iii) $\Phi(t+s, \tau, \omega, \cdot)=\Phi(t, \tau+s, \theta_s\omega, \cdot)\circ\Phi(s, \tau, \omega, \cdot)$；

(iv) $\Phi(t, \tau, \omega, \cdot)$：$X\longrightarrow X$ 是连续的.

则称映射 Φ 是关于 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的连续动力过程.

定义 2　令 $\mathscr{D}$ 为 X 的所有有界非空子集族的集合，假设 $K=\{K(\tau, \omega): \tau\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$. 如果存在 $T=T(G, \tau, \omega)>0$，当 $t\geqslant T$ 时，对任意 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 及 $G\in\mathscr{D}$，满足

$$\Phi(t, \tau-t, \theta_{-t}\omega, G(\tau-t, \theta_{-t}\omega))\subseteq K(\tau, \omega)$$

则称 K 为关于 Φ 的 $\mathscr{D}$- 拉回吸收集.

另外，如果 $\forall\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$K(\tau, \omega)$ 是 K 的非空闭子集，K 在 Ω 中关于 $\mathscr{F}$ 可测，则称 K 为 Φ 的闭可测 $\mathscr{D}$- 拉回吸收集.

---

① 收稿日期：2018-10-28
基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).
作者简介：吴柯楠(1994-)，女，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.
通信作者：李扬荣，博士，教授.

定义 3 如果 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$ 满足：

(i) $\mathscr{A}$ 在 Ω 中关于 $\mathscr{F}$ 可测，并且对于 $\forall\omega\in\Omega$，$\mathscr{A}$ 在 X 中是紧的；

(ii) $\mathscr{A}$ 关于 Φ 是不变的，即对 $\forall t\geqslant 0$，$\Phi(t,\tau,\omega,\mathscr{A}(\tau,\omega))=\mathscr{A}(\tau+t,\theta_t\omega)$；

(iii) $\mathscr{A}$ 吸引 $\mathscr{D}$ 中的每个元素，即对于每个 $G\in\mathscr{D}$，

$$\lim_{t\to+\infty} d_X(\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,G(\tau-t,\theta_{-t}\omega)),\mathscr{A}(\tau,\omega))=0$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 Φ 的 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子，其中 $dist_X(A,B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|_X$ 是 Hausdorff- 半距离.

1 非自治的 Kuramoto-Sivashinsky 方程的协循环

本论文讨论如下具有初边值条件的非自治的 Kuramoto-Sivashinsky 方程在 Wong-Zakai 逼近下吸引子的存在性问题，其中 $\tau,\delta\in\mathbb{R}$ 且 $\delta\neq 0$.

$$\begin{cases} u_t+\upsilon D^4u+D^2u+uDu=g(t,x)+u\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega),\ (x,t)\in I\times\mathbb{R} \\ u(\tau,x)=u_\tau(x) \\ D^iu(t,\dfrac{-l}{2})=D^iu(t,\dfrac{-l}{2}),\ i=0,1,2,3 \\ \displaystyle\int_I u(t,x)\mathrm{d}x=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$D=\partial/\partial x$，$I=\left(\dfrac{-l}{2},\dfrac{l}{2}\right)$，$l>0$. 对于 υ 和非自治项 g 有如下假设：

(F0) $\kappa=:\upsilon\lambda_1^2-\dfrac{4}{\upsilon}>0$，其中 λ_1 是算子 $-D^2$ 的首特征值；

(F1) $g\in L^2_{loc}(\mathbb{R},L^2(I))$.

下面给出本文所讨论的函数空间并定义相应的内积与范数，定义

$$L=\{u:u\in L^2(I),\int_I u(x)\mathrm{d}x=0\},\ H=H^2_{per}(I)\cap L$$

分别定义在 L 和 H 上的内积与范数：

$$(u,v)_L=\int_I uv\mathrm{d}x,\ \|u\|_L^2=(u,u)_L,\ \forall u,v\in L$$

$$(u,v)_H=\int_I D^2uD^2v\mathrm{d}x,\ \|u\|_H^2=(u,u)_H,\ \forall u,v\in H$$

当 $\delta\neq 0$ 时，定义随机变量 $\mathscr{G}_\delta:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 如下：

$$\mathscr{G}_\delta(\omega)=\frac{\omega(\delta)}{\delta},\ \forall\omega\in\Omega \tag{2}$$

存在一个 θ_t 不变量集 $\Omega\subseteq\tilde{\Omega}$，对于每个 $\omega\in\tilde{\Omega}$，有

$$\frac{\omega(t)}{t}\to 0,\ t\to\pm\infty \tag{3}$$

由(2)式可得

$$\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)=\frac{\omega(t+\delta)-\omega(t)}{\delta},\ \int_0^t\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=\int_t^{t+\delta}\frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s+\int_\delta^0\frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s \tag{4}$$

已知 Wong-Zakai 过程有以下性质：

1) 线性增长性. $t\to\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)$ 是连续的并且满足

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)}{t}=0,\ \forall\delta\neq 0,\ \omega\in\Omega \tag{5}$$

2) 时间收敛性. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\omega\in\Omega$，$\delta\neq 0$，存在 $C_\delta(\varepsilon,\omega)>0$，使得

$$\left|\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon\,|\,t\,| + C_\delta(\varepsilon,\omega),\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\,\mathrm{d}s = 0,\ \forall \delta \neq 0,\ \omega \in \Omega \tag{7}$$

方程(1)是含有参数 $\omega \in \Omega$ 的确定性方程，由 Galerkin 逼近法，可得对 $\forall \tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，$u_\tau \in L^2(I)$．方程(1)存在唯一的解 $u(\cdot,\tau,\omega,u_\tau) \in C([\tau,\infty),L^2(I)) \cap L^2_{loc}((\tau,\infty),H^1_0(I))$．由此定义一个协循环 Φ：$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times L \longrightarrow L$，使得对 $\forall t \in \mathbb{R}^+$，$\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$ 和 $u_\tau \in L$ 满足：

$$\Phi(t,\tau,\omega,u_\tau) = u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau) \tag{8}$$

由定义 1 可知 Φ 是 $L^2(I)$ 上关于$(\Omega,\mathscr{F},P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$的连续协循环．

为了证明吸引子的存在性，进一步假设外力项 g 满足如下条件：存在常数 $\alpha_0 \in \left(0,\dfrac{\kappa}{2}\right)$，使得

$$\int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{e}^{\alpha_0 s}(\|g(s,\cdot)\|^2)\mathrm{d}s < \infty,\ \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{9}$$

此外，定义 $\mathscr{D}$ 为 $L^2(I)$ 中所有有界非空子集的集合，即 $\mathscr{D} = \{G = \{G(\tau,\omega): \tau \in \mathbb{R},\omega \in \Omega\}\}$．对 $\forall c > 0$，$\tau \in \mathbb{R}$ 和 $\omega \in \Omega$，如果存在 $\alpha_1 \in \left(\alpha_0,\dfrac{\kappa}{2}\right)$有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\|G(\tau-t,\theta_{-t}\omega)\| = 0,\ \|G\| = \sup_{u\in G}\|u\|_{L^2(I)} \tag{10}$$

则 G 为缓增族．如果 $\mathscr{D}$ 的所有元素都是缓增的，则称 $\mathscr{D}$ 是缓增的．

2　非自治的 Kuramoto-Sivashinsky 方程拉回吸引子的存在性

本节将证明方程(1)拉回吸引子在 $L^2(I)$ 的存在性．

引理 1　假设(F0)，(F1)成立，对 $\forall \tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，$G = \{G(\tau,\omega): \tau \in \mathbb{R},\omega \in \Omega\} \in \mathscr{D}$，存在 $T = T(\tau,\omega,G) \geqslant 1$，使得对任意 $t \geqslant T$，方程的解满足：

$$\begin{aligned}&\|u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_L^2 + \frac{\upsilon}{2}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{(\upsilon\lambda_1^2-\frac{4}{\upsilon})s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_H^2\mathrm{d}s \leqslant \\ &\quad 1 + \frac{\upsilon}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\upsilon\lambda_1^2-\frac{4}{\upsilon})s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(s+\tau)\|_L^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{11}$$

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|u(s,\tau-t,\theta-\tau\omega,u_{\tau-t})\|_H^2\mathrm{d}s \leqslant ce^{C_\delta(\omega)}\left(1+\frac{\upsilon}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\upsilon\lambda_1^2-\frac{4}{\upsilon})s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(s+\tau)\|_L^2\right) \tag{12}$$

证　让方程(1)与 u 在 L 上作内积并注意到

$$(u,u_t)_L = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_L$$

$$(D^4u,u)_L = (D^2u,D^2u)_L = (u,u)_H = \|u\|_H^2$$

$$(D^2u,u)_L = -(Du,Du)_L = -\|Du\|_L^2$$

$$(u,uDu)_L = \int_I u^2\mathrm{d}u = -2\int_I u^2Du\,\mathrm{d}x = -2(u,uDu)_L \Rightarrow (u,Du)_L = 0$$

于是得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_L^2 + 2\upsilon\|u\|_H^2 - 2\|Du\|_L^2 = 2(g,u)_L + 2\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\|u\|_L^2 \tag{13}$$

由 Young 不等式可知

$$\begin{aligned}2\|Du\|_L^2 &= 2(Du,Du)_L = -2(u,D^2u)_L \leqslant 2\|u\|_L\|D^2u\|_L = \\ &\quad 2\|u\|_L\|u\|_H \leqslant \frac{\upsilon}{2}\|u\|_H^2 + \frac{2}{\upsilon}\|u\|_L^2\end{aligned} \tag{14}$$

由 Poincaré 不等式可知

$$\| u \|_L^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \| Du \|_L^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1^2} \| D^2 u \|_L^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \| u \|_H^2 \tag{15}$$

由(13)－(15)式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u \|_L^2 + \frac{\upsilon}{2} \| u \|_H^2 + \left(\upsilon\lambda_1^2 - \frac{4}{\upsilon} - 2\mathscr{G}_\delta(\theta_t \omega)\right) \| u \|_L^2 \leqslant \frac{\upsilon}{2} \| g \|_L^2 \tag{16}$$

根据假设(F0)，有 $\kappa = \upsilon\lambda_1^2 - \frac{4}{\upsilon} > 0$．对(16)式使用Gronwall引理，在$(\tau - t, \tau)$上积分，用$\theta_{-\tau}\omega$替换$\omega$可知

$$\begin{aligned}
&\| u(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_L^2 + \frac{\upsilon}{2}\int_{\tau-t}^{\tau} \mathrm{e}^{\kappa s + 2\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| u(s, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_H^2 \mathrm{d}s \leqslant \\
&\mathrm{e}^{-\kappa t + 2\int_{\tau-t}^{\tau} \mathscr{G}_\delta(\theta_{\sigma-\tau}\omega)\mathrm{d}\sigma} \| u_{\tau-t} \|_L^2 + \frac{\upsilon}{2}\int_{\tau-t}^{\tau} \mathrm{e}^{\kappa s + 2\int_{\tau+s}^{\tau} \mathscr{G}_\delta(\theta_{\sigma-\tau}\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(s) \|_L^2 \mathrm{d}s \leqslant \\
&\mathrm{e}^{-\kappa t + 2\int_{-t}^{0} \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| u_{\tau-t} \|_L^2 + \frac{\upsilon}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\kappa s + 2\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(s + \tau) \|_L^2 \mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{17}$$

由(6)式可知，存在 $C_\delta(\omega) > 0$，使得

$$2\left|\int_{-t}^{0} \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma \omega)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant (\kappa - \alpha_1)t + C_\delta(\omega), \ \forall t > 0 \tag{18}$$

结合(18)式，由 G 缓增集的性质知存在 $T_\delta = T_\delta(\tau, \omega, G) > 0$，使得

$$\mathrm{e}^{-\kappa t + 2\int_{-t}^{0} \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| u_{\tau-t} \|_L^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\mathrm{e}^{C_\delta(\omega)} \| G(\tau - t, \theta_{-t}\omega) \|_L^2 \leqslant 1, \ \forall t \geqslant T_\delta \tag{19}$$

结合(17)与(19)式，可知(11)式成立．

此外，存在 $\widetilde{T}_\delta = \widetilde{T}_\delta(\tau, \omega, G) \geqslant 1$，$\forall t \geqslant \widetilde{T}_\delta$，利用(18)式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau-1}^{\tau} \mathrm{e}^{\kappa(\tau-1) - (\kappa-\alpha_1)\tau - C_\delta(\omega)} \| u(s, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_H^2 \mathrm{d}s \leqslant \\
&\int_{\tau-t}^{\tau} \mathrm{e}^{\kappa s + 2\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| u(s, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_H^2 \mathrm{d}s \leqslant \\
&\frac{2}{\upsilon}\left(1 + \frac{\upsilon}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\kappa s + 2\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(s + \tau) \|_L^2 \mathrm{d}s\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

因此

$$\int_{\tau-1}^{\tau} \| u(s, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, u_{\tau-t}) \|_H^2 \mathrm{d}s \leqslant c\mathrm{e}^{C_\delta(\omega)}\left(1 + \frac{\upsilon}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\kappa s + 2\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(s + \tau) \|_L^2 \mathrm{d}s\right) \tag{21}$$

综上，取 $T = T(\tau, \omega, G) = \max\{T_\delta, \widetilde{T}_\delta\}$ 引理 1 得证．

推论 1　假设(F0)，(F1)成立，方程(1)的协循环 Φ 拥有一个 $L^2(I)$ 上闭的可测 $\mathscr{D}$-拉回吸收集 $K = \{K(\tau, \omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\} \in \mathscr{D}$，且对 $\forall \tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$ 有

$$K(\tau, \omega) = \{u \in L^2(I): \| u \|^2 \leqslant R_\delta(\tau, \omega)\} \tag{22}$$

并且

$$R_\delta(\tau, \omega) = 1 + \frac{\upsilon}{2}\widetilde{R}_\delta(\tau, \omega)$$

其中

$$\widetilde{R}_\delta(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\left(\upsilon\lambda_1^2 - \frac{4}{\upsilon}\right)s + 2\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(s + \tau) \|^2 \mathrm{d}s$$

证　对给定的 $\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，$G \in \mathscr{D}$，由引理 1 可得，存在 $T = T(\tau, \omega, G) \geqslant 1$，使得对任意的 $t \geqslant T$ 有

$$\Phi(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, G(\tau - t, \theta_{-t}\omega)) = u(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, G(\tau - t, \theta_{-t}\omega)) \subseteq K(\tau, \omega) \tag{23}$$

由(6)式可知，存在 $C_\delta(\omega)>0$，使得

$$\left|\int_s^0 \mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant -\frac{\alpha_1-\alpha_0}{8}s+C_\delta(\omega) \qquad \forall s\leqslant 0 \tag{24}$$

则

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\widetilde{R}_\delta(\tau-t,\theta_{-t}\omega)=\\
&\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\kappa(s+t)+2\int_s^{-t}\mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\\
&\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}(s+t)+2\int_s^{-t}\mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\\
&\mathrm{e}^{4C_\delta(\omega)}\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1-\alpha_0}{4}t}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\frac{\alpha_1+3\alpha_0}{4}s}\|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s=0
\end{aligned} \tag{25}$$

因此 $K(\tau,\omega)\in\mathscr{D}$.

引理 2　假设(F0),(F1)成立，对于 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，以及 $G=\{G(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，存在 $T=T(\tau,\omega,G)>0$，使得对 $\forall t\geqslant T$，$\delta\neq 0$，满足

$$\|u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_H^2\leqslant c\mathrm{e}^{cC_\delta(\omega)}R_\delta(\tau,\omega) \tag{26}$$

证　将方程(1)与 D^4u 在 L 上做内积可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_H^2+2\upsilon\|D^4u\|_L^2+2(D^2u,D^4u)_L+2(uDu,D^4u)_L=2(g,D^4u)_L+2(u\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega),D^4u)_L \tag{27}$$

由 Young 不等式和插值不等式知

$$\begin{aligned}
&|2(D^2u,D^4u)_L|+|2(uDu,D^4u)_L|+|2(g,D^4u)_L|+|2(u\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega),D^4u)_L|\leqslant\\
&2\|u\|_L\|D^4u\|_L+c_1\|u\|_L\|u\|_H\|D^4u\|_L+2\|g\|_L\|D^4u\|_L+2\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\|u\|_H^2\leqslant\\
&2\upsilon\|D^4u\|_L^2+c\|u\|_L^2\|u\|_H{}^2+c\|g(t,\cdot)\|_L^2+c\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\|u\|_H^2\leqslant\\
&2\upsilon\|D^4u\|_L^2+c(1+\|u\|_L^2+\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega))\|u\|_H^2+c\|g(t,\cdot)\|_L^2
\end{aligned} \tag{28}$$

由(27),(28)式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_H^2\leqslant c(1+\|u\|_L^2+\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega))\|u\|_H^2+c\|g(t,\cdot)\|_L^2 \tag{29}$$

任给 $t\geqslant 0$，$\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，取 $s\in(\tau-1,\tau)$，在区间 $(\tau-1,\tau)$ 上运用 Gronwall 不等式，并将 ω 替换成 $\theta_{-\tau}\omega$，可得

$$\begin{aligned}
&\|u(\tau,\tau-1,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-1})\|_H^2\leqslant\\
&c\mathrm{e}^{\int_{\tau-1}^{\tau}1+\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_L^2+\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s}\left(\int_{\tau-1}^{\tau}\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_H^2\mathrm{d}s+c\int_{\tau-1}^{\tau}\|g(s,\cdot)\|_L^2\mathrm{d}s\right)
\end{aligned} \tag{30}$$

由引理 1、推论 1 和 $g\in L^2_{loc}(\mathbb{R},L^2(I))$ 可得

$$\|u(\tau,\tau-1,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-1})\|_H^2\leqslant c\mathrm{e}^{cC_\delta(\omega)}R_\delta(\tau,\omega) \tag{31}$$

综上，引理 2 成立.

3　主要结论

定理 1　假设(F0),(F1)成立，则协循环 Φ 在 $L^2(I)$ 上有唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\tau,\omega:\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega)\}\in\mathscr{D}$.

证　由引理 1 与推论 1 可知，Φ 在 $L^2(I)$ 有一闭的、可测的 $\mathscr{D}$-拉回吸收集 $K(\tau,\omega)$，根据引理 2 与 Sobolev 嵌入定理可知，Φ 在 $L^2(I)$ 上 $\mathscr{D}$-是拉回渐进紧的. 因此，由文献[5]中吸引子的存在性定理可知，协循环 Φ 存在唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}$.

参考文献：

[1] 范红瑞，王仁海，李扬荣，等. 非自治的Kuramoto-Sivashinsky方程的拉回吸引子的后项紧性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(3)：95-100.

[2] TAN J，LI Y R. Random Attractors of Kuramoto-Sivashinsky Equation with Multilicative White Noise [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2011，33(2)：121-125.

[3] LU K，WANG B. Wong-Zakai Approximations and Long Term Behavior of Stochastic Partial Differential Equations [J]. Journal of Dynamics Differential Equations，2017(4)：1-31.

[4] WANG B. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583.

[5] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York：Springer-Verlag，1997：141-150.

Wong-Zakai Approximations of Non-Autonomous Random Kuramoto-Sivashinsky Equation

WU Ke-nan，WANG Feng-ling，LI Yang-rong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper, we are mainly to prove the existence of pullback random attractors of non-autonomous Kuramoto-Sivashinsky equation by means of the Wong-Zakai approximations.

Key words：non-autonomous Kuramoto-Sivashinsky equation；pullback attractor；non-autonomous dynamic systems；Wong-Zakai approximations

责任编辑　张　栒