

NURBS 曲线插补的离散比例积分器速度规划算法^①

姬清华

新乡学院 机电工程学院, 河南 新乡, 453003

摘要: 传统 NURBS(Non-uniform rational B-spline, NURBS)曲线插补算法忽略了弧长与曲线的参数关系, 造成无法在线对速度进行实时调节, 针对这个问题, 该文提出一种 NURBS 曲线插补的离散比例积分器速度规划算法. 该方法分 2 个步骤实现速度规划: ①使用数值方法计算 NURBS 曲线弧长及给定速度的运行时间; 二、使用具有加减速的对称性和信号转换功能的离散比例积分器, 完成对 NURBS 曲线插补的在线速度规划. 在离散比例积分器的速度规划方法中, 起始段、结束段的轨迹速度能够得到实时控制, 系统以不超过机床要求的加速度运行. 实验结果表明, 该文速度规划算法能有效地满足系统约束, 保证机床平稳运行. 另外, 相较于其他算法, 该文算法在插补精度、插补实时性及速度波动率性能方面优于现有方法, 说明该文方法的有效性和先进性.

关键词: NURBS; 曲线插补; 离散比例积分器; 速度规划; 加速度

中图分类号: TP391

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)01-0062-06

非均匀有理 B 样条曲线经国际标准化组织认定, 成为描述自由曲线/曲面的一种标准形式^[1-2]. 传统 CNC 系统的直线和圆弧插补导致低加工效率和二次插补精度丢失等问题, 对数控技术的发展造成阻碍^[3-4], NURBS 曲线实时插补技术有效地解决了以上问题, 其优点是对接参数曲线进行插补, 取代了原始系统使用小线段来逼近原有曲线的方法, 大大提高了加工效率和插补精度^[5-7]. 但是, NURBS 曲线没有明确弧长与曲线的参数关系, 无法在线实时调节速度带^[8]. 因此, 对于有效和稳定的 NURBS 插补器的研究对数控技术具有重要意义.

根据 NURBS 插补算法可知, 速度是插补运算中的重要参数, 速度大小影响着每一插补周期的弧长, 从而在插补时间一定的情况下影响着插补精度. 加工过程中, 效率与工艺都对速度提出了要求. 目前, 已经有了关于 NURBS 曲线插补器的相关研究. 文献[8]提出了基于分段进给率规划的 NURBS 插补算法, 将 NURBS 曲线划分为曲线分段, 并在这些分段中规划进给速率, 然后处理相邻分段离散点的进给速率转换, 并根据进给速率确定插值, 缺点是计算复杂度高, 不易操作. 文献[9]提出用于 5 轴机床生成轴插补命令的刀具中心点(TCP)进给率调度算法, 该算法不仅考虑 TCP 速度、加速度和加加速度的约束, 而且还考虑每个块连接处每个轴的速度差异, 但是没有考虑机床加减速限制. 文献[10]提出了一种新的机器人轨迹规划算法, 该算法采用非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线插值, 总轨迹规划过程分为 2 个阶段: 使用 NURBS 曲线拟合阶段和轨迹插值阶段, 该方法没有考虑机床加减速限制. 文献[11]设计了有效的速度规划算法, 提高了算法效率, 得到了满足加速度与弦长误差的光滑速度曲线. 文献[12]根据前瞻算法, 设计出自适应前瞻 NURBS 插补算法, 但是该算法复杂, 实时性难以保证.

本文设计了离散比例积分器在线速度规划算法. 根据积分器对阶跃输入的积分作用, 在开始阶段对速度曲线进行积分得到实际速度; 当实际速度曲线等于最大速度时, 积分器关闭, 刀具轨迹以最大速度运行; 当到达根据最大速度计算的时间时, 速度输入为零, 此时开启积分器, 实际输出速度会按照积分常数进行

① 收稿日期: 2018-08-23

基金项目: 河南省高等学校重点科研项目(17B460008).

作者简介: 姬清华(1976—), 男, 硕士, 副教授, 主要从事机械工程及虚拟仿真技术研究.

递减,直至速度为零.由于速度曲线的对称性,因此 2 次开启积分器的时间间隔一致,且能保证速度为零时到达轨迹终点.

1 NURBS 曲线介绍

k 次 NURBS 曲线表示为

$$C(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

式(1)中 $n+1$ 为控制顶点数, P_i 为控制顶点, ω_i 为权因子, $N_i(u)$ 为基函数.

根据 DeBoor-Cox 递推公式得出 $N_{i,p}(u)$ 表达式为

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{注: } \frac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

根据递推公式,其对参数的微分分为一阶和二阶微分,其中一阶微分为

$$C'(u) = \begin{bmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ z'(u) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n N'_{i,k}(u) \omega_i P_i - \sum_{i=0}^n N'_{i,k}(u) \omega_i C(u)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3)$$

其二阶微分为

$$C''(u) = \begin{bmatrix} x''(u) \\ y''(u) \\ z''(u) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n N''_{i,k}(u) \omega_i P_i - 2 \sum_{i=0}^n N'_{i,k}(u) \omega_i C'(u) - \sum_{i=0}^n N''_{i,k}(u) \omega_i C(u)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (4)$$

式(3)、式(4)中: X', Y', Z' 表示 X, Y, Z 对参数的一阶微分, X'', Y'', Z'' 表示 X, Y, Z 对参数的二阶微分.

因为 NURBS 给出了自由曲线的确定数学表达形式,所以对应于每一确定的参数 u_i , 都对应着曲线上已确定的点 C_i . 因此,插补算法可以通过计算给定插补周期后的曲线参数,得出刀具下一插补周期需要到达的点.

针对 NURBS 曲线没有明确的弧长与曲线参数关系,导致难以对其进行在线实时调节速度的问题,本文提出一种基于离散比例积分器的在线速度规划算法.该方法首先采用数值方法计算 NURBS 曲线的弧长,计算出在给定速度下的运行时间,然后根据积分器的信号转换功能以及加减速的对称性,完成对 NURBS 曲线插补的在线速度规划.采用离散比例积分器的速度规划方法能够实现实时控制起始段、结束段的轨迹速度,保证系统加速度不超出机床要求.

2 NURBS 曲线插补的速度规划算法

2.1 NURBS 曲线插补算法

根据采样插补算法原理,每一插补周期计算出机床刀具的目标点,然后输送给电机,使刀具按轨迹要

求进行行走. 由于 NURBS 曲线没有精确的弧长与参数函数, 采用数值算法难以保证实时性. 因此, 采用二阶泰勒展开, 对下一插补周期的参数进行估计, 其表达式为

$$u_{i+1} = u_i + \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i} T + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t=t_i} T^2 + \epsilon \quad (5)$$

式(5)中 T 为插补周期, u_i 为第 i 时刻曲线参数, u_{i+1} 为第 $i+1$ 时刻曲线参数, $\frac{du}{dt}$ 为参数对时间的一阶导数, $\frac{d^2u}{dt^2}$ 为参数对时间的二阶导数, ϵ 为曲线参数的高阶无穷小量. 根据链式法则, 进一步求出

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \sigma^{-1} \cdot \dot{s} \quad (6)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{du}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -\sigma^{-3} \cdot \sigma' \cdot \dot{s} + \sigma^{-1} \cdot \ddot{s} \quad (7)$$

式(7)中 \dot{s} 表示轨迹速度, \ddot{s} 表示轨迹加速度, σ 为曲线弧微分, 其表达式为

$$\sigma = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (8)$$

σ^{-1} 为曲线弧微分对参数的一阶导数, 其表达式为

$$\sigma' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sigma} \quad (9)$$

虽然二阶泰勒展开依然是估算, 但是对于连续曲线, 在插补周期很短的情况下, 其精度能够满足要求. 根据插补公式, 当插补周期固定时, 通过 u_i 点的曲线特征及其速度与加速度, 即可求出 u_{i+1} 点曲线参数, 进而通过 NURBS 方程求出 C_{i+1} .

根据加工过程与效率要求得出带加工轨迹的线速度为 F ; 根据机床性能要求得出加工过程待加工轨迹的加速度为 A . 设待加工轨迹为 L , 其弧长为 s , 则以速度 F 加工 L 所用时间为 T .

$$T = \frac{s}{F} \quad (10)$$

由于初始与结束状态时, 机床的速度都为零, 当以速度 F 开始加工和结束时, 需要机床提供很大的加速度, 超出机床的动力性能. 因此, 需要对初始段与结束段的速度进行规划, 使其满足机床动力性能要求.

2.2 比例积分速度规划算法

当一阶跃信号输入到积分器后, 其输出为一斜坡信号. 因此在输入速度后设置一比例积分器, 输入的速度信号为从零突变到 F 的阶跃信号, 而输出则为按一定斜率从零增长的斜坡信号. 斜率可以通过适当调整比例系数获得, 且其斜率为加速度.

由于有最大速度限制, 速度不能无限增加, 因此比例积分器不能一直开启, 使速度无限增加, 当速度达到最大值时, 关闭比例积分器, 按最大速度进行输出.

开始阶段的速度规划图如图 1 所示:

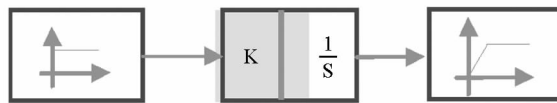


图 1 开始阶段速度规划图

如何让轨迹平稳准确地到达终点, 一直是轨迹速度规划的一个难点. 本文采用比例积分器的方法对速度进行规划, 能够很好地解决末尾结束时对速度的要求. 根据加减速的对称性, 若开始段与结束段采用相同的比例因子, 则开始段与结束段的弧长位移和运行时间都相同. 记录开始阶段加速运行时间, 即为结束时速度停止时间. 由于开始阶段速度低于 F , 轨迹速度按一定加速度加速, 因此按积分器处理后速度运行的轨迹位移比没有积分器运行的位移小一半. 根据加减速的对称性, 末位减速度与初始加速度轨迹位移相等, 则对起始阶段少运行的位移进行了补偿.

对开始与结束设置相同的比例积分器, 即比例积分器的参数相同、运行时间相同, 即可实现平稳准确地到达轨迹终点的目的.

结束具体实现过程为: 根据整体轨迹长度与设计轨迹速度, 计算出输入最大速度的时间 T_0 。当轨迹运行到时间 T 时, 改变输入速度方向, 同时开启积分器, 直至速度减为零, 关闭积分器和速度输入, 加工完成。

结束阶段的速度规划如图 2 所示。

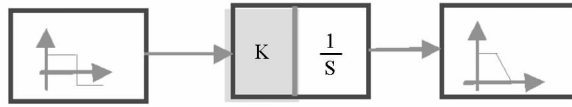


图 2 结束段速度规划

2.3 NURBS 曲线弧长计算

根据速度规划算法, 需要计算曲线弧长。由于 NURBS 曲线没有解析弧长公式, 无法直接得到 NURBS 曲线弧长, 因此采用 Simpson 数值积分公式求取 NURBS 曲线弧长, 并通过迭代, 直至积分稳定。Simpson 求积公式为

$$l(a, b) = \frac{h}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b)) \quad (11)$$

式(11)中, a 与 b 为积分曲线起始点与终点, $h = b - a$ 为参数长度, $c = (a + b)/2$ 为参数中点。曲线分段段数为

$$n = \frac{1}{h} \quad (12)$$

每段采用 Simpson 求积公式, 最终弧长为

$$s = \sum l_i(a, b) \quad (13)$$

根据给定的误差要求 ϵ , 不断缩短 h , 直至误差满足要求

$$\left| \left(\sum l_i(a, b) \right)_{h_1} - \left(\sum l_i(a, b) \right)_{h_2} \right| \leq \epsilon \quad (14)$$

式(14)中 h_1 和 h_2 为相邻 2 次迭代弧长计算所选步长。

NURBS 为参数曲线, 其被积函数为

$$f(u) = \frac{ds}{du} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (15)$$

相较于传统 S 型插补法和改进曲率约束算法, 本文速度规划算法能有效地满足系统约束, 保证机床平稳运行, 在插补精度、插补实时性及速度波动率性能方面都要优于其他 2 种算法。

3 实验结果与分析

为了说明本文方法的有效性, 采用 matlab 对该方法进行了在线实时仿真。所选的运动学参数如表 1、表 2 所示。

表 1 运动学参数表

| 速度/(mm · s ⁻¹) | 加速度/(mm · s ⁻²) | 比例系数 |
|----------------------------|-----------------------------|------|
| 20 | 10 | 0.5 |

仿真所用曲线为 3 次 NURBS 曲线, 所选控制顶点数为 7 个。其具体参数如表 2 所示。

表 2 NURBS 曲线参数

| | |
|------|--|
| 控制顶点 | {[5, 5, 4] [25, 40, 9] [50, 70, 16] [60, 100, 22] [70, 73, 30] [50, 57, 37] [112, 40, 41]} |
| 权值向量 | {1, 1.2, 1, 1.25, 0.9, 0.85, 1} |
| 节点矢量 | {0, 0, 0, 0, 0.453 1, 0.548 5, 0.630 6, 1, 1, 1, 1} |

NURBS 曲线如图 3 所示。

根据上述选择的插补方式及其速度规划方法, 得出仿真结果。其速度曲线如图 4 所示。

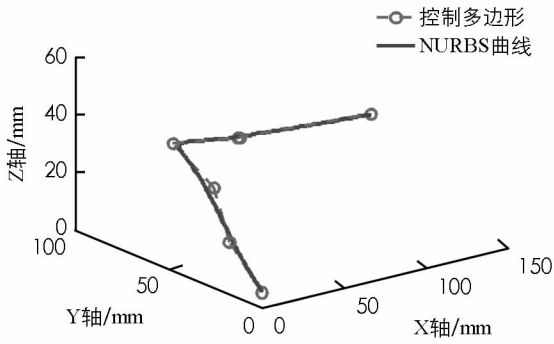


图 3 NURBS 曲线图

NURBS 曲线插补图如图 5 所示.

对图 5 曲线局部放大效果图, 如图 6 所示.

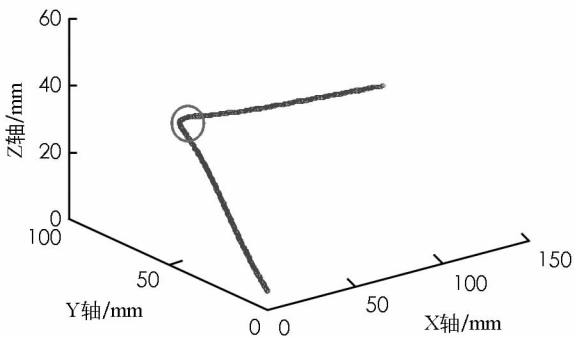


图 5 插补曲线图

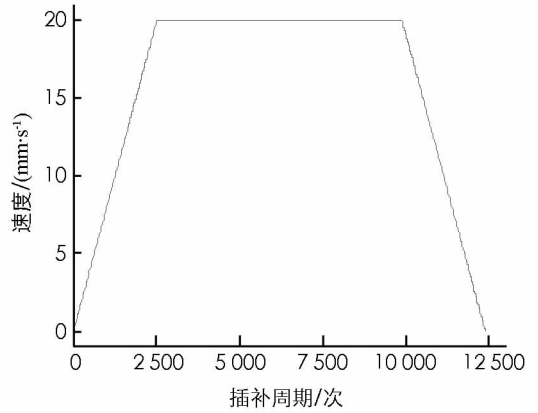


图 4 速度曲线图

图 6 插补曲线局部放大图

由仿真分析得出, 通过在线比例积分器的方法, 很好地实现了在线实时计算速度的目的. 由图 4 可以看出, 在开始阶段与结束阶段都能够实现很好的匀加速过程, 减少了开始阶段与结束阶段的冲击. 图 5 为插补点图, 通过图 6 可以看出, 插补算法能够很好地实现插补过程. 通过对结尾处的观察, 可以看出插补算法很好地实现了到达结尾的目的. 结合速度图 4, 可以看出到达结尾处的速度为零, 充分验证了本文所提算法的正确性与有效性.

为了证明本文算法的先进性, 将本文算法与其他算法进行比较, 分别从插补精度、插补实时性及速度波动率 3 个性能方面进行比较, 实验结果如表 3 所示.

表 3 不同算法的性能比较结果

| 算 法 | 插补误差/ μm | 插补实时性/ms | 速度波动率/% |
|-----------|---------------------|----------|------------------------|
| 传统 S 型规划法 | 1.215 | 0.453 | 0.275 |
| 改进曲率约束的算法 | 1.000 | 0.436 | 0.257 |
| 本文算法 | 0.089 | 0.113 | 6.031×10^{-7} |

从表 3 数据可以看出, 本文算法在插补误差、插补实时性和速度波动率性能方面优于传统 S 型规划法与改进曲率约束的算法, 说明本文算法能够降低插补误差和速度波动率, 同时完成实时插补, 表明本文方法具有有效性和先进性.

4 结 语

本文提出了 NURBS 曲线插补的离散比例积分器速度规划算法. 该方法在初始阶段开启比例积分器, 将突变的速度转换成斜坡递增速度, 当速度达到最大值时, 关闭比例积分器, 以最大速度进行输出. 当输入速度结束时, 由于比例积分器的存在, 输出速度不能突变为零, 而是按照一定斜率慢慢递减, 减少了冲击. 由于加速度的对称性, 保证了速度为零时到达曲线终点. 实验结果表明, 本文算法能够实现自动加减速.

速, 准确到达终点且算法简洁, 满足实时插补对运算复杂度的要求. 另外, 与其他算法的对比实验得出, 本文算法性能优于传统 S 型规划法与改进曲率约束算法, 说明了本文方法的有效性和先进性. 下一步研究工作需拓展离散比例积分功能, 使其能够在线调节系统加加速度, 满足机床加加速度的限制要求.

参考文献:

- [1] THOMAS D C, SCOTT M A, EVANS J A, et al. Bézier Projection: A Unified Approach for Local Projection and Quadrature-Free Refinement and Coarsening of NURBS and T-Splines with Particular Application to Isogeometric Design and Analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 284: 55-105.
- [2] 王 芳. 基于微分流形的 NURBS 曲面重建 [J]. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 43(7): 84-90.
- [3] 李存志, 邢建国. 比较积分法直线、圆弧插补方法的改进 [J]. *机械设计与制造*, 2015(9): 185-188.
- [4] 陈 飞. 逐点比较法圆弧插补终点判别的探讨 [J]. *装备制造技术*, 2014(11): 177-178, 188.
- [5] LI H Y, CHEN L J, ZHANG H J. NURBS Cutter Location Controlling Method in 5-Axis CAM/CNC [C]//2015 Fifth International Conference on Instrumentation and Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC). New York: IEEE, 2015.
- [6] 曹智梅. 非圆曲线参数自适应插补算法研究 [J]. *制造业自动化*, 2014, 36(8): 4-8.
- [7] CHEN S L, CHOU C Y. Contouring Control of Multi-Axis Motion Systems for NURBS Paths [J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2016, 13(2): 1062-1071.
- [8] YU K, CHEN X B. Algorithm for NURBS Interpolation Based on Piecewise Feed-Rate Planning [C]// International Symposium on Computational Intelligence and Design. New York: IEEE, 2016.
- [9] WU S K, TSAI M S, LIN M T, et al. Development of Novel Tool Center Point Velocity Planning Algorithm for Five Axis Machine Tool [J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2018, 19(8): 1187-1199.
- [10] ZOU Q X, GUO W D, HAMIMID F Y. A Novel Robot Trajectory Planning Algorithm Based on NURBS Velocity Adaptive Interpolation [M]//Advances in Mechanical Design. Singapore: Springer Singapore, 2017.
- [11] SUN Y W, ZHAO Y, BAO Y R, et al. A Novel Adaptive-Feedrate Interpolation Method for NURBS Tool Path with Drive Constraints [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2014, 13(77): 74-81.
- [12] 李 丽, 房立金, 王国勋. 基于 STEP-NC 的 NURBS 实时直接插补技术研究 [J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2014, 17(6): 62-65.
- [13] 何改云, 陶 浩, 王太勇, 等. 连续时间周期化的 NURBS 曲线插补及其速度规划 [J]. *天津大学学报(自然科学与工程技术版)*, 2018, 51(8): 844-853.

Discrete Proportional Integrator Speed Planning Algorithm for NURBS Curve Interpolation

JI Qing-hua

Department of Mechanical and Electrical Engineering, Xinxiang University, Xinxian Henan 453003, China

Abstract: The traditional NURBS curve interpolation algorithm ignores the relationship between arc length and curve parameters, which makes it impossible to adjust the speed in real time. To solve this problem, a discrete proportional integrator velocity planning algorithm based on NURBS curve interpolation has been proposed in this paper. The method makes it possible to realize speed planning in two steps: first, using numerical method to calculate the arc length of the NURBS curve and the running time of the given velocity; second, using a discrete proportional integrator with acceleration and deceleration symmetry and signal conversion function to complete the NURBS Online speed planning for curve interpolation. In the speed planning method of the discrete proportional integrator, the trajectory speed of the start and end sections can be controlled in real time, and the system operates at an acceleration that does not exceed the machine tool requirements. The experimental results show that the speed planning algorithm can effectively satisfy the system constraints and ensure the smooth running of the machine. In addition, compared with other algorithms, this algorithm is superior to the existing methods in interpolation accuracy, real-time interpolation and speed fluctuation performance, which shows the effectiveness and advancement of this method.

Key words: NURBS; curve interpolation; discrete proportional integrator; velocity planning; acceleration

责任编辑 夏 娟