第 45 卷 第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 2 月
Vol. 45 No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.02.001

2-Sylow 子群的阶及元素最高阶与次高阶与 A_9 相同的有限群①

于宝娟，　吴　莲，　陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 讨论 2-Sylow 子群的阶，以及元素的最高阶元的阶、次高阶元的阶与 A_9 相同的有限群，得出了这类群的若干必要性质.

关　键　词： 2-Sylow 子群；最高阶元的阶；次高阶元的阶；群结构

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2020)02－0001－06

在群论中，常常借助群的阶以及元素的阶去研究群的结构和性质，如著名的 Sylow 定理、拉格朗日定理、柯西定理等等. 过去的 30 年中，与群的阶和元的阶有关的著名问题就是施武杰猜想，即用群的阶以及元素的阶来刻画有限单群. 当这一猜想在 2009 年得到证明以后，一些学者开始关注减少一些条件是否仍然能刻画有限单群，如只用群的阶以及最高阶元的阶来刻画有限单群. 这方面的研究可见文献[1-5]. 在类似的弱化条件的研究中始终把群的阶作为已知条件. 那么如果不对群的阶加以限制，有什么条件可以替代? 文献[6-7]把 2-Sylow 子群的阶作为已知条件，但遗憾的是，仅用 2-Sylow 子群的阶和最高阶元以及次高阶元并不能刻画单群，不过可以得到这样的群的比较具体的性质. 本文继续该研究，讨论 2-Sylow 子群的阶以及元素的最高阶与次高阶和 A_9 相同的有限群.

本文中 $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元的阶之集；$K_1(G)=\mathrm{Max}\{\pi_e(G)\}$；$K_2(G)$ 表示群 G 的次高阶元素的阶，n_p 表示整数 n 的素因子 p 的最高方幂因子. 有关 2-Frobenius、素图、以及阶分量的概念，请参阅文献[8-10].

引理 1[11]　Frobenius 群的核幂零，其补的 Sylow 子群循环或为广义四元数群.

引理 2[8]　设有限群 G 的素图不连通，则 G 为 Frobenius 群，或 2-Frobenius 群，或 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1- 群，K/H 为非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，且 $|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$.

引理 3[10]　设 G 是偶阶 Frobenius 群，K 是 Frobenius 核，H 是 Frobenius 补，则 $t(G)=2$，$\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$，且当 $2\in\pi(H)$，H 不可解时，存在 $H_0\leqslant H$ 使得 $|H:H_0|\leqslant 2$，$H_0\cong Z\times SL(2,5)$，$(|Z|,30)=1$，Z 的 Sylow 子群循环.

引理 4[10]　设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，则 $t(G)=2$，且 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 $\pi(K/H)=\pi_2$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$，且 G/K 和 K/H 均为循环群，满足 $|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$.

引理 5[10]　设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，即 $G=ABC$，其中 $A\trianglelefteq G$，$AB\trianglelefteq G$，AB 是以 A 为核 B 为补的 Frobenius 群，BC 是以 B 为核 C 为补的 Frobenius 群，则 $t(G)=2$，$\pi(A)\cup\pi(C)=\pi_1$，$\pi(B)=\pi_2$，且 G

---

① 收稿日期：2019－04－22
基金项目：国家自然科学基金项目(11671324).
作者简介：于宝娟(1993－)，女，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：陈贵云，教授.

是可解的，B,C 为循环群.

引理 6[12] 设 G 是 $2^a \cdot 11^b \cdot p^c \cdot q^d$ 阶单群，p,q 为异于2和11的相异素数，$abcd \neq 0$，则 G 同构于下列单群之一：M_{11}，M_{12}，$L_2(q)(q=11,23,32,243)$，$U_5(2)$.

由于 A_9 的2-Sylow子群的阶为 2^6，最高阶元的阶为15，次高阶元的阶为12，因此有如下定理：

定理 1 设 G 是2-Sylow子群的阶为 2^6，最高阶元的阶为15，次高阶元的阶为12的有限群，则 G 为可解群或{2，3，5}-群，或下列结论之一成立：

1) $G/H \cong L_2(7)$，H 为方指数整除10的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群；

2) $G/H \cong L_2(8)$，H 为方指数整除10的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群；

3) $G/H \cong L_2(8)\cdot 3$，H 为方指数整除10的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群；

4) $G/H \cong U_3(3)\cdot 2$，H 是方指数为5的 5^β 阶幂零群或方指数整除15的 $3^{\alpha-3} \cdot 5^\beta$ 阶幂零群；

5) $G/H \cong A_7$，H 为方指数整除8的 2^3 阶幂零群或方指数整除12的 $2^3 \cdot 3^{\alpha-2}$ 阶幂零群或方指数整除10的 $2^3 \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群；

6) $G/H \cong A_8$，H 为方指数整除9的 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群或方指数为5的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除15的 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群；

7) $G/H \cong L_3(4)$，H 为方指数整除9的 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群或方指数为5的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除15的 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群；

8) $G/H \cong A_9$，H 为方指数整除9的 $3^{\alpha-4}$ 阶幂零群或方指数为5的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除15的 $3^{\alpha-4} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群；

9) $G/H \cong M_{12}$，H 为方指数整除9的 $3^{\alpha-3}$ 阶幂零群或方指数为5的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除15的 $3^{\alpha-3} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

证 因2-Sylow子群的阶为 2^6，$K_1(G)=15$，$K_2(G)=12$，可设 $|G|=2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \cdot 11^\tau(\alpha,\beta \geqslant 1;\gamma,\tau \geqslant 0)$. 下面分3种情形讨论：

情形1 设 $\gamma,\tau>0$，则 $|G|=2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \cdot 11^\tau(\alpha,\beta,\gamma,\tau \geqslant 1)$. 由 $K_1(G)=15$，$K_2(G)=12$ 可得7和11是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，因此 $t(G)=3$，由引理3、引理4可知 G 不是Frobenius群和2-Frobenius群. 由引理2，G 有正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 为非交换单群，其中 $2 \in \pi_1$，H 为幂零群，$|G/K| \,\big|\, |\mathrm{Out}(K/H)|$，$\{\pi_2(K/H), \pi_3(K/H)\}=\{7, 11\}$. 由文献[9]的表3知，如果 K/H 是散在单群且阶分量出现7和11，则其2-Sylow子群的阶大于 2^6. 因此 K/H 不是散在单群. 设 K/H 是文献[9]表2中的群.

情形1.1 当 $t(K/H)=3$ 时，$\pi_1=\{2, 3, 5\}$，$\pi_2=\{7\},\{11\}$，$\pi_3=\{11\},\{7\}$ 且 $|G|_2=2^6$. 从文献[9]的表2中可直接看出 K/H 只可能是 A_p，$A_1(q)$，$G_2(q)$，${}^2G_2(q)$，${}^2D_p(3)$，${}^2D_{p+1}(2)$，$F_4(q)$，${}^2F_4(q)$.

① 证 $K/H \ncong A_p$. 若 $K/H \cong A_p$，由 p，$p-2$ 是素数可知 $p-2=7$，$p=11$，矛盾.

② 证 $K/H \ncong A_1(q)$. 若 $K/H \cong A_1(q)$，当 $2 \mid q$ 时，则 K/H 有3个阶分量：$q,q+1,q-1$. 此时 $q+1=7^\gamma,11^\tau$，进而 $q=7^\gamma-1,11^\tau-1$. 但 $3 \mid (7^\gamma-1)$，$5 \mid (11^\tau-1)$，与 q 是2的方幂矛盾. 当 $4 \mid (q+1)$ 时，则 K/H 有3个阶分量：$q+1,q,(q-1)/2$，此时 $q=7^\gamma,11^\tau$，由于 G 的奇阶分量只有 7^γ 或 11^τ，因此 $(q-1)/2=11^\tau,7^\gamma$. 当 $q=7^\gamma$ 时，有 $11^\tau=(q-1)/2=(7^\gamma-1)/2$，但 $3 \mid (7^\gamma-1)/2$，矛盾. 当 $q=11^\tau$ 时，有 $7^\gamma=(q-1)/2=(11^\tau-1)/2$，但 $5 \mid (11^\tau-1)/2$，矛盾. 当 $4 \mid (q-1)$ 时，则 K/H 有3个阶分量：$q-1,q,(q+1)/2$. 于是 $q=7^\gamma,11^\tau$，$(q+1)/2=11^\tau,7^\gamma$. 当 $q=7^\gamma$ 时，有 $11^\tau=(q+1)/2=(7^\gamma+1)/2$. 如果 $2 \nmid \gamma$，则 $7^\gamma+1=(7+1)((-1)^{\gamma-1}7^{\gamma-1}+\cdots+7^2-7+1)$，故 $4 \mid (q+1)/2$，矛盾，因此 $2 \mid \gamma$. 令 $\gamma=2k$，此时 $q-1=7^{2k}-1=(7^k+1)(7^k-1)$. 如果 $2 \nmid k$，则由 $q+1=7^\gamma+1=7^{2k}+1$ 知 $(7^2+1)/2 \mid (7^{2k}+1)/2=(q+1)/2=11^\tau$，矛盾，故 $2 \mid k$. 令 $k=2t$，有 $\gamma=4t$，$q-1=7^\gamma-1=7^{4t}-1=(7^{2t}+1)(7^t+1)(7^t-1)$. 若 $2 \nmid t$，则 $(7^4+1) \mid (7^{4t}+1)=7^\gamma+1=q+1$. 但 $7^4+1=1\,201 \times 2$，且1 201为素数，矛盾于 $(q+1)/2=11^\tau$，所以 $2 \mid t$. 令 $t=2s$，则 $q-1=7^\gamma-1=(7^{4s}+1)(7^{2s}+1)(7^s+1)(7^s-1)$. 由于 $7^{4s}+1$，$7^{2s}+1$，7^s+1，7^s-1 中任何两个的最大公因数都是2，且每个数都大于2，因此，这4个表达式必产生4个

不同的素因子，这与 $\pi_1(G)=\{2, 3, 5\}$ 矛盾. 当 $q=11^\tau$ 时，有 $7^\gamma=(q+1)/2=(11^\tau+1)/2$. 如果 $2\nmid\tau$，则 $(11+1)\mid(11^\tau+1)$，即 $3\mid(11^\tau+1)/2$，矛盾，故 $2\mid\tau$. 令 $\tau=2k$，此时 $q-1=11^{2k}-1=(11^k+1)\cdot(11^k-1)$. 若 $2\nmid k$，则 $(11^2+1)\mid(11^{2k}+1)=11^\tau+1$，$61\mid(11^\tau+1)/2$，这与 $7^\gamma=(q+1)/2=(11^\tau+1)/2$ 矛盾，故 $2\mid k$. 令 $k=2t$，则 $\tau=4t$，$q-1=11^\tau-1=11^{4t}-1=(11^{2t}+1)(11^t+1)(11^t-1)$. 若 $2\nmid t$，则 $(11^4+1)\mid(11^{4t}+1)=11^\tau+1=q+1$，即 $7\ 321\mid(q+1)/2$，但 $7\nmid 7\ 321$，矛盾于 $(q+1)/2=7^\gamma$，故 $2\mid t$. 令 $t=2s$，则 $q-1=11^\tau-1=(11^{4s}+1)(11^{2s}+1)(11^s+1)(11^s-1)$. 由于 $11^{4s}+1$，$11^{2s}+1$，11^s+1，11^s-1 中任何两个的最大公因数都是 2，且每个数都大于 2，因此，这 4 个表达式必产生 4 个不同的素因子，这与 $\pi_1(G)=\{2, 3, 5\}$ 矛盾.

③ 证 $K/H\ncong G_2(q), {}^2G_2(q)$. 若 $K/H\cong G_2(q)$，$3\mid q$，令 $q=3^t$，t 为正整数，则第一个阶分量 $q^6(q^2-1)^2=q^6(q+1)^2(q-1)^2=3^{6t}(3^t+1)^2(3^t-1)^2$. 当 $t=1,2,3$ 时，第二个阶分量 $q^2+q+1=13,91,757$，矛盾于 $\pi_2=\{7\},\{11\}$；当 t 是大于 3 的偶数时，令 $t=2k(k\geqslant 2)$，此时 $3^{6t}(3^t+1)^2(3^t-1)^2=3^{12k}(3^{2k}+1)^2(3^k+1)^2(3^k-1)^2$. 因为 $3^{2k}+1$，3^k+1，3^k-1 中任何两个的最大公因数均为 2，所以 $k\geqslant 2$ 时，$q^6(q^2-1)^2$ 最少有 4 个不同素因子，矛盾于 $\pi_1=\{2, 3, 5\}$；当 t 是大于 3 的奇数时，令 $t=2k+1(k\geqslant 2)$，阶分量 $q^6(q^2-1)^2=3^{6t}(3^t+1)^2(3^t-1)^2=3^{6(2k+1)}(3^{2k+1}+1)^2(3^{2k+1}-1)^2$，这时 $3^{2k+1}+1=(3+1)\cdot(3^{2k}-3^{2k-1}+\cdots-3+1)$，$3^{2k+1}-1=(3-1)(3^{2k}+3^{2k-1}+\cdots+3+1)$，且 $3^{2k}-3^{2k-1}+\cdots-3+1$ 与 $3^{2k}+3^{2k-1}+\cdots+3+1$ 互素，故 $q^6(q^2-1)^2$ 也最少有 4 个素因子，矛盾于 $\pi_1=\{2, 3, 5\}$，所以 $K/H\ncong G_2(q)$. 同理可证 $K/H\ncong {}^2G_2(q)$.

④ 证 $K/H\ncong {}^2D_p(3)$. 否则，由 $p=2^n+1$，$n\geqslant 2$，得 $p-1=2^n\geqslant 4$，则第一个阶分量中有因子 $(3^2-1)(3^4-1)(3^6-1)(3^8-1)$，但 $13\mid(3^6-1)$，与 $\mathrm{Max}(\pi(K/H))=11$ 矛盾.

⑤ 证 $K/H\ncong {}^2D_{p+1}(2), F_4(q), {}^2F_4(q)$. 设 $K/H\cong {}^2D_{p+1}(2)$. 因为 $p=2^n-1(n\geqslant 2)$，所以 $p>2$，故第一个阶分量中 $2^{p(p+1)}>2^6$，矛盾于 $|G|_2=2^6$. 同理 $K/H\ncong F_4(q), {}^2F_4(q)$.

情形 1.2　当 $t(K/H)>3$ 时，由 $\mathrm{Max}(\pi(K/H))=11$ 知 $K/H\ncong A_2(4), {}^2E_6(2)$. 若 $K/H\cong {}^2B_2(q)$，由 $q=2^{2k+1}$ 知 $q=2^3, 2^5$. 当 $q=2^3$ 时，第三个阶分量 $q+\sqrt{2q}+1=13$，与 $\mathrm{Max}(\pi(K/H))=11$ 矛盾；当 $q=2^5$ 时，第四个阶分量 $q-1=31$，与 $\mathrm{Max}(\pi(K/H))=11$ 矛盾.

情形 2　设 $\gamma>0$，$\tau=0$，则 $\{1, 2, 3, 5, 7, 12, 15\}\subseteq\pi_e(G)$. 由 $K_1(G)=15$，$K_2(G)=12$，故 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，因此 G 的素图一定不连通.

① 证 G 不是 Frobenius 群. 否则，由引理 3 知 $G=HK$，$\pi(K)=\{2, 3, 5\},\{7\}$. $\pi(K)=\{2,3,5\}$ 导致 K 有 30 阶元，矛盾. 若 $\pi(K)=\{7\}$，则 H 为 $\{2, 3, 5\}$-Hall 子群，由引理 1，H 的 Sylow 子群为循环群或广义四元数群，而 $|G|_2=2^6$，于是 G 的 2-Sylow 子群一定包含 2^5 阶元，矛盾于 $K_1(G)=15$.

② 证 G 不是 2-Frobenius 群. 否则由引理 5 可知 $G=ABC$，$\pi(A)\cup\pi(C)=\pi_1=\{2, 3, 5\}$，$\pi(B)=\pi_2=\{7\}$. 由 $K_1(G)=15$ 得 $|B|=7$. 另外 $|C|\,\big|\,(|B|-1)=6$，A 的 2-Sylow 子群 A_2 满足 $|A_2|=2^5, 2^6$. 若 $|A_2|=2^5$，用 7 阶元无不动点地作用于 A_2 上，导致 $7\,\big|\,(|A_2|-1)=31$，矛盾，故 $|A_2|=2^6$. 考虑子群 $\Omega_1(Z(A_2))\trianglelefteq G$，同样用 G 的 7 阶元无不动点地作用于 $\Omega_1(Z(A_2))$ 上，可得 $|\Omega_1(Z(A_2))|=1+7t$，而 $|\Omega_1(Z(A_2))|$ 为 2 的方幂，比较阶得 $|\Omega_1(Z(A_2))|=8, 64$. 当 $|\Omega_1(Z(A_2))|=64$ 时，$A_2=\Omega_1(Z(A_2))$ 为初等 Abel 2- 群，这矛盾于 G 有 4 阶元. 当 $|\Omega_1(Z(A_2))|=8$ 时，由 $\Omega_1(Z(A_2))\trianglelefteq G$，考虑 G 的 3 阶元 a 作用其上知，存在 $1\neq b\in\Omega_1(Z(A_2))$，使得 $[a, b]=1$. 注意 G 的 5-Sylow 子群完全含于 A 中，A 为幂零群，从而 G 的任何 5 阶元都与任何 2 阶元可换. 因此，对于 G 的 15 阶元 x，x^5 为 3 阶元，某 $b\in\Omega_1(Z(A_2))$，$b\neq 1$，$[b, x^5]=1$. 又已证 x^3 作为 5 阶元也与 b 可换，从而 x^5, x^3 均与 b 可换，进而 x 与 b 可换，但 $|xb|=30$，矛盾于 G 没有 30 阶元.

③ 设 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，其中 H, K, G 满足引理 2. 比较阶可知 K/H 同构于下列单群之一：$L_2(7)(2^3\cdot 3\cdot 7)$，$L_2(8)(2^3\cdot 3^2\cdot 7)$，$U_3(3)(2^5\cdot 3^3\cdot 7)$，$A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$，$A_8(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$，$L_3(4)(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$，$L_2(49)(2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2)$，$U_3(5)(2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7)$，$A_9(2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)$. 又因 $L_2(49)$ 中有 25 阶元，矛盾，故 $K/H\ncong L_2(49)$.

1) 设 $K/H \cong L_2(7)$，则 $G/H \cong L_2(7)$，H 为方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群.

若 $K/H \cong L_2(7)$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2$，由引理 2 有 $|G/K| \mid 2$. 当 $|G/K| = 2$ 时，$|G/H| = 2 \cdot |K/H| = 2 \cdot |L_2(7)| = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$，此时 $|H| = 2^2 \cdot 3^{\alpha-1} \cdot 5^\beta \cdot 7^{\gamma-1}$. 由引理 2 可知 H 是 π_1- 群且 7 是孤立点，即 $7 \notin \pi_1$，因此 $|H| = 2^2 \cdot 3^{\alpha-1} \cdot 5^\beta$，$H$ 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2^2，可得 $|\mathrm{Aut}(H_2)| \mid (2^2-2) \cdot (2^2-1)$，故 G 中 7 阶元平凡作用在 H_2 上，这说明 G 中有 14 阶元，与 $K_1(G) = 15$，$K_2(G) = 12$ 矛盾. 从而 $|G/K| = 1$，此时 $G/H \cong L_2(7)$，$|H| = 2^3 \cdot 3^{\alpha-1} \cdot 5^\beta (\alpha, \beta \geqslant 1)$. 当 $\alpha > 1$ 时，由引理 2 知 H 是幂零群，此时 H 中有 30 阶元，矛盾于 $K_1(G) = 15$，所以 $\alpha = 1$，即 H 为方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群.

2),3) 设 $K/H \cong L_2(8)$，则 $G/H \cong L_2(8), L_2(8) \cdot 3$，$H$ 为方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群.

若 $K/H \cong L_2(8)$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 3$，由引理 2 有 $|G/K| \mid 3$. 当 $|G/K| = 3$ 时，$|G/H| = 3 \cdot |K/H| = 3 \cdot |L_2(8)| = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$，$G/H \cong K/H \times C_3$ 或 $G/H \cong K/H \cdot C_3$，即 $G/H \cong L_2(8) \times C_3$ 或 $G/H \cong L_2(8) \cdot C_3$. 若前者成立，则 $L_2(8)$ 中的 7 阶元与 C_3 中 3 阶元可换，得 G/H 中有 21 阶元，矛盾. 下设 $G/H \cong L_2(8) \cdot 3$，同理 1) 可知 $|H| = 2^3 \cdot 3^{\alpha-3} \cdot 5^\beta (\alpha \geqslant 3, \beta \geqslant 1)$，又由 H 的幂零性和 $K_1(G) = 15$ 可得 $\alpha = 3$，所以 H 为方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群. 当 $|G/K| = 1$ 时，$G/H \cong L_2(8)$，$|H| = 2^3 \cdot 3^{\alpha-2} \cdot 5^\beta (\alpha \geqslant 2, \beta \geqslant 1)$. 当 $\alpha > 2$ 时，由 H 的幂零性可得 H 中有 30 阶元，矛盾于 $K_1(G) = 15$，所以 $\alpha = 2$，即 H 为方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^\beta$ 阶幂零群.

4) 设 $K/H \cong U_3(3)$，则 $G/H \cong U_3(3) \cdot 2$，H 是方指数为 5 的 5^β 阶幂零群或方指数整除 15 的 $3^{\alpha-3} \cdot 5^\beta$ 阶幂零群.

若 $K/H \cong U_3(3)$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2$，由引理 2 有 $|G/K| \mid 2$. 当 $|G/K| = 1$ 时，$|G/H| = |K/H| = |U_3(3)| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$，此时 $|H| = 2 \cdot 3^{\alpha-3} \cdot 5^\beta$，$H$ 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2，故 G 中 7 阶元平凡作用在 H_2 上，这说明 G 中有 14 阶元，与 $K_1(G) = 15$，$K_2(G) = 12$ 矛盾. 当 $|G/K| = 2$ 时，$G/H \cong K/H \times C_2$ 或 $G/H \cong K/H \cdot C_2$，即 $G/H \cong U_3(3) \times C_2$ 或 $G/H \cong U_3(3) \cdot C_2$. 若前者成立，则 $U_3(3)$ 中的 7 阶元与 C_2 中 2 阶元可换，则 G/H 中有 14 阶元，矛盾. 可得 $G/H \cong U_3(3) \cdot 2$，$|H| = 3^{\alpha-3} \cdot 5^\beta (\alpha \geqslant 3, \beta \geqslant 1)$. 当 $\alpha = 3$ 时，H 是方指数为 5 的 5^β 阶幂零群；当 $\alpha > 3$ 时，H 是方指数整除 15 的 $3^{\alpha-3} \cdot 5^\beta$ 阶幂零群.

5) 设 $K/H \cong A_7$，则 $G/H \cong A_7$，H 为方指数整除 8 的 2^3 阶幂零群或方指数整除 12 的 $2^3 \cdot 3^{\alpha-2}$ 阶幂零群或方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

若 $K/H \cong A_7$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2$，同理 $|G/K| \mid 2$. 当 $|G/K| = 2$ 时，$|G/H| = 2 \cdot |K/H| = 2 \cdot |A_7| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$，此时 $|H| = 2^2 \cdot 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$，$H$ 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2^2，可得 $|\mathrm{Aut}(H_2)| \mid (2^2-2)(2^2-1)$，故 G 中 7 阶元平凡作用在 H_2 上，这说明 G 中有 14 阶元，与 $K_1(G) = 15$，$K_2(G) = 12$ 矛盾，从而 $|G/K| = 1$，此时 $G/H \cong A_7$，$|H| = 2^3 \cdot 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$. 同理可知当 $\alpha = 2$，$\beta = 1$ 时，H 为方指数整除 8 的 2^3 阶幂零群；当 $\alpha > 2$，$\beta = 1$ 时，H 为方指数整除 12 的 $2^3 \cdot 3^{\alpha-2}$ 阶幂零群；当 $\alpha = 2$，$\beta > 1$ 时，H 为方指数整除 10 的 $2^3 \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

6) 设 $K/H \cong A_8$，则 $G/H \cong A_8$，H 为方指数整除 9 的 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群或方指数为 5 的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除 15 的 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

若 $K/H \cong A_8$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2$，由引理 2 有 $|G/K| \mid 2$. 当 $|G/K| = 2$ 时，$|G/H| = 2 \cdot |K/H| = 2 \cdot |A_8| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$，与 $|G| = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma$ 矛盾. 因此 $|G/K| = 1$，可设 $|G| = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma (\alpha, \beta, \gamma \geqslant 1)$，$|G/H| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$，因此 $|H| = 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1} (\alpha \geqslant 2, \beta \geqslant 1)$，$G/H \cong A_8$. 当 $\alpha > 2$，$\beta = 1$ 时，H 为方指数整除 9 的 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群；当 $\alpha = 2$，$\beta > 1$ 时，H 是方指数为 5 的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群；当 $\alpha > 2$，$\beta > 1$ 时，H 为方指数整除 15 的 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

7) 设 $K/H \cong L_3(4)$，则 $G/H \cong L_3(4)$，H 为方指数整除 9 的 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群或方指数为 5 的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除 15 的 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

因为 $|\mathrm{Out}(L_3(4))| = 12$，所以 $|G/K| \mid 12$. 又因为 $|K/H| = |L_3(4)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$，且 G 的

2-Sylow 子群的阶为 2^6，所以 $|G/K|\,\big|\,3$. 同理 2)，因为 $L_3(4)$ 中有 7 阶元，所以 $G/H \ncong L_3(4)\times C_3$；因为 $L_3(4)\cdot C_3$ 中有 21 阶元，所以 $G/H \ncong L_3(4)\cdot C_3$. 因此 $|G/K|=1$，此时 $|G/H|=|K/H|=|L_3(4)|=2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$，$|H|=3^{\alpha-2}\cdot 5^{\beta-1}(\alpha\geqslant 2,\beta\geqslant 1)$，$G/H\cong L_3(4)$. 当 $\alpha>2$，$\beta=1$ 时，H 为方指数整除 9 的 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群；当 $\alpha=2$，$\beta>1$ 时，H 是方指数为 5 的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群；当 $\alpha>2$，$\beta>1$ 时，H 为方指数整除 15 的 $3^{\alpha-2}\cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

8) 设 $K/H\cong A_9$，则 $G/H\cong A_9$，H 为方指数整除 9 的 $3^{\alpha-4}$ 阶幂零群或方指数为 5 的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除 15 的 $3^{\alpha-4}\cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

若 $K/H\cong A_9$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)|=2$，由引理 2 有 $|G/K|\,\big|\,2$. 当 $|G/K|=2$ 时，$|G/H|=2\cdot|K/H|=2\cdot|A_9|=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$，与 $|G|=2^6\cdot 3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 7^\gamma$ 矛盾. 故 $|G/K|=1$，此时 $G/H\cong A_9$，可设 $|G|=2^6\cdot 3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 7^\gamma(\alpha,\beta,\gamma\geqslant 1)$，$|G/H|=2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$，$|H|=3^{\alpha-4}\cdot 5^{\beta-1}(\alpha\geqslant 4,\beta\geqslant 1)$，$G/H\cong A_9$. 当 $\alpha>4$，$\beta=1$ 时，H 为方指数整除 9 的 $3^{\alpha-4}$ 阶幂零群；当 $\alpha=4$，$\beta>1$ 时，H 为方指数为 5 的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群；当 $\alpha>4$，$\beta>1$ 时，H 为方指数整除 15 的 $3^{\alpha-4}\cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

证 $K/H\ncong U_3(5)$. 若 $K/H\cong U_3(5)$，因为 $|\mathrm{Out}(U_3(5))|=6$，所以 $|G/K|\,\big|\,6$. 又因为 $|K/H|=|U_3(5)|=2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$，所以 $2\,\big|\,|H|$，且 H 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2 或 4，同 5)，考虑 G 中 7 阶元在 H_2 上的作用知 G 中有 14 阶元，矛盾. 因此 $K/H\ncong U_3(5)$.

情形 3　设 $\gamma=0$，$\tau>0$. 则 $|G|=2^6\cdot 3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 11^\tau(\alpha,\beta,\tau\geqslant 1)$. 由 $K_1(G)=15$，$K_2(G)=12$ 可知 11 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，因此 G 的素图一定不连通. 由引理 2 知 G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群，或者 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 为非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，$|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$.

① 证 G 不是 Frobenius 群. 否则由引理 3 知 $G=HK$，$\pi(K)=\{2,3,5\},\{11\}$. 前者导致 K 有 30 阶元，矛盾. 后者导致 H 为 $\{2,3,5\}$-Hall 子群，由引理 1 可知 H 的 Sylow 子群为循环群或广义四元数群，故 G 的 2-Sylow 子群一定包含 2^5 阶元，矛盾于 $K_1(G)=15$.

② 证 G 不是 2-Frobenius 群. 否则由引理 5 可知 $G=ABC$，$\pi(A)\cup\pi(C)=\pi_1$，$\pi(B)=\pi_2$，B,C 为循环群，B 是 G 的 11-Sylow 子群，$|B|=11^\tau$. 若 $2\,\big|\,|A|$，则 A 的 2-Sylow 子群 A_2 的阶不大于 2^6，考虑 B 在 A_2 上的作用，因为 $|\mathrm{Aut}(A_2)|\,\big|\,(2^6-2^5)(2^6-2^4)(2^6-2^3)(2^6-2^2)(2^6-2)(2^6-1)$，即 $11\nmid|\mathrm{Aut}(A_2)|$，所以 B 在 A_2 上的作用是平凡的，即 B 中的元与 A_2 中 2 阶元可换，从而得到 22 阶元，矛盾，则 $2\nmid|A|$，$2^6\,\big|\,|C|$. 由 C 是循环群得 C 中有 64 阶元，矛盾.

③ 设 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，其中 H,K,G 满足引理 2. 因为 $11\in\pi(K/H)$，所以 K/H 不是 K_3-单群，只能是 K_4-单群，则比较阶，由引理 6 知 K/H 同构于 $L_2(11)(2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11)$，$M_{11}(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11)$，$M_{12}(2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11)$ 之一.

证 $K/H\ncong L_2(11)$. 否则 $|\mathrm{Out}(K/H)|=2$，即 $|G/K|\,\big|\,2$. 当 $|G/K|=2$ 时，$|G/H|=2\cdot|K/H|=2\cdot|L_2(11)|=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11$，此时 $|H|=2^3\cdot 3^{\alpha-1}\cdot 5^{\beta-1}$，$H$ 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2^3，可得 $|\mathrm{Aut}(H_2)|\,\big|\,(2^3-2^2)(2^3-2)(2^3-1)$，故 G 中 11 阶元平凡作用在 H_2 上，这说明 G 中有 22 阶元，矛盾，从而 $|G/K|=1$，此时 $G/H\cong L_2(11)$，$|H|=2^4\cdot 3^{\alpha-1}\cdot 5^{\beta-1}$，$H$ 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2^4. 可得 $|\mathrm{Aut}(H_2)|\,\big|\,(2^4-2^3)(2^4-2^2)(2^4-2)(2^4-1)$，即 $11\nmid|\mathrm{Aut}(H_2)|$，故 G 中 11 阶元平凡作用在 H_2 上，也即 G 中有 22 阶元，矛盾.

证 $K/H\ncong M_{11}$. 否则 $|\mathrm{Out}(K/H)|=1$，即 $|G/K|=1$. 此时 $G/H\cong M_{11}$，$|H|=2^2\cdot 3^{\alpha-2}\cdot 5^{\beta-1}$，$H$ 的 2-Sylow 子群 H_2 的阶为 2^2，可得 $|\mathrm{Aut}(H_2)|\,\big|\,(2^2-2)(2^2-1)$，即 $11\nmid|\mathrm{Aut}(H_2)|$，故 G 中 11 阶元平凡作用在 H_2 上，也即 G 中有 22 阶元，矛盾.

9）设 $K/H \cong M_{12}$，则 $G/H \cong M_{12}$，H 是方指数为5的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群或方指数整除9的 $3^{\alpha-3}$ 阶幂零群或方指数整除15的 $3^{\alpha-3} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群.

若 $K/H \cong M_{12}$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2$，即 $|G/K| \mid 2$. 当 $|G/K| = 2$ 时，$|G/H| = 2 \cdot |K/H| = 2 \cdot |M_{12}| = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$，与 $|G| = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 11^r$ 矛盾. 故 $|G/K| = 1$，此时 $G/H \cong M_{12}$，$|H| = 3^{\alpha-3} \cdot 5^{\beta-1}$ $(\alpha \geqslant 3, \beta \geqslant 1)$. 当 $\alpha > 3$，$\beta = 1$ 时，H 为方指数整除9的 $3^{\alpha-3}$ 阶幂零群；当 $\alpha = 3$，$\beta > 1$ 时，H 是方指数为5的 $5^{\beta-1}$ 阶幂零群；当 $\alpha > 3$，$\beta > 1$ 时，H 为方指数整除15的 $3^{\alpha-3} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群. 证毕.

参考文献：

[1] 何立官，陈贵云. 关于一些交错单群的新刻画[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(2)：46-49.

[2] 何立官，陈贵云. 关于一些对称群的新刻画[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(6)：1-3.

[3] 何立官. 关于单 K_3-群 $L_3(3)$ 和 $U_3(3)$[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(4)：77-79.

[4] HE L G，CHEN G Y. A New Characterization of Some Simple Groups [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2012，35(5)：589-594.

[5] 李　月，曹洪平. 交错群 A_5，A_6，A_7 的新刻画[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：47-50.

[6] 陈　梦，陈贵云. 最高阶元的阶为5及Sylow 2-子群的阶为2,4,8时的有限群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：52-55.

[7] 陈　梦，刘正龙，陈贵云. 最高阶元的阶为7及Sylow 2-子群的阶为8的有限群的结构[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：22-25.

[8] WILLIAMS J. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra，1981，69(2)：487-513.

[9] CHEN G Y. A New Characterization of Sporadic Simple Groups [J]. Algebra Colloq，1996，3(1)：49-58.

[10] 陈贵云. Frobenius群与2-Frobenius群的结构[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485-487.

[11] 徐明曜. 有限群导引-下册[M]. 北京：科学出版社，1999.

[12] 施武杰. 关于单 K_4-群[J]. 科学通报，1991，36(17)：1281-1283.

Finite Groups with the Order of Its 2-Sylow Subgroup, the Largest and Second Largest Element Orders Being the Same as Those of A_9

YU Bao-juan，　WU　Lian，　CHEN Gui-yun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The finite group with the same order of its 2-Sylow subgroup and the same largest element order and the same second largeat element order as those of A_9 have been discussed in this paper. And some necessary properties have been given.

Key words: 2-Sylow subgroup; the largest element order; the second largest element order; group structure

责任编辑　廖　坤