第 45 卷　第 2 期　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　2020 年 2 月
Vol. 45　No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2020

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2020.02.002

Gorenstein 投射复形范畴中的纯正合列①

魏宝军，　于春艳，　杨晓燕

重庆师范大学涉外商贸学院 数学与计算机学院，重庆 合川 401520

摘要：引入了 Gorenstein 投射复形范畴中的纯正合列. 通过 Gorenstein 投射复形范畴中绝对纯性的研究，引入了 Gorenstein 投射复形范畴中的 FP-投射复形，给出了 FP-投射复形的等价刻画.

关　键　词：Gorenstein 投射复形；纯正合列；FP-投射复形

中图分类号：O153.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2020)02－0007－04

文献[1]首次在左 R- 模范畴中提出了纯的概念，将纯性推广到有单位元的结合环上，用同调的方法定义了纯内射、纯投射以及纯分解等概念. 文献[2]定义了 FP- 内射模，证明了 FP- 内射模同绝对纯模等价，脱离了通过正合列定义模的方法. 文献[3]给出了 FP- 内射维数的一系列等价刻画. 文献[4]研究了 Mod R 范畴中的纯正合列，给出了纯正合列的一系列刻画. 文献[5]把模上的纯正合序列推广到复形范畴，引入了纯正合复形，并且得到了纯正合复形的刻画及性质. 复形范畴是一个有足够多投射对象和足够多内射对象的 Abel 范畴，因此 Gorenstein 同调理论在复形范畴中可以形成一种新的理论体系. 文献[6]定义了相对于 Gorenstein 投射模范畴的纯正合列，即 G-纯正合列，并得到了相关的一系列性质和应用. 随着纯领域的深入研究，一些学者逐渐转向纯分解的研究. 基于以上工作的启发，本文主要研究了 Gorenstein 投射复形范畴中的纯正合列，即定义了 G-纯正合复形，并且对 G-纯正合复形相关的等价刻画作了研究.

1　预备知识

除非特别声明，环 R 是具有单位元的结合环，所有涉及的模均是酉模，Mod R 表示左 R- 模范畴.

定义 1[7]　设 $\mathscr{X}$ 是 R- 模类，M 是左 R- 模. 同态 $\varphi: M \longrightarrow C$，$C \in \mathscr{X}$，如果对任意的 $f: M \longrightarrow C'$，其中 $C' \in \mathscr{X}$，都有同态 $g: C \longrightarrow C'$，使得 $g\varphi = f$，则称 φ 是 M 的 $\mathscr{X}$- 预包络. 若 $C = C'$，$f = \varphi$，且满足 $g\varphi = \varphi$ 的 g 是自同构，则称 $\mathscr{X}$- 预包络是 M 的 $\mathscr{X}$- 包络.

定义 2[7]　如果复形 P 是投射的，则 P 是正合的，且对任意的整数 n，Z_nP 是投射模.

定义 3[8]　如果左 R- 模 M 是 Gorenstein 投射模，则存在一个投射左 R- 模的正合列

$$P = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \longrightarrow P_{-1})$，并且对任意投射左 R- 模 Q，$\mathrm{Hom}_R(P, Q)$ 是正合的. 我们用 GProj R 记所有 Gorenstein 投射左 R- 模构成的范畴.

定义 4[8]　如果复形 G 是 Gorenstein 投射的，则存在复形的正合序列 $X: \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^2 \longrightarrow \cdots$，满足以下条件：

(a) 对 $\forall i \in \mathbb{Z}$，P^i 是投射复形；

(b) $\mathrm{Ker}(P^0 \longrightarrow P^1) = G$；

---

① 收稿日期：2019－06－20

基金项目：重庆师范大学涉外商贸学院校级科研项目(KY2018014).

作者简介：魏宝军(1991－)，男，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究.

(c) 对任意的投射复形 P，$\mathrm{Hom}_{C(R)}(X, P)$ 是正合的.

我们用 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 记所有 Gorenstein 投射复形构成的范畴，用 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 记所有有限表示 Gorenstein 投射复形构成的范畴.

定义 5[6] (a) 设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是 $\mathrm{Mod}\,R$ 中的正合列. 如果对任意的有限表示模 N，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, C) \longrightarrow 0$ 是正合的，那么称正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是纯正合的.

(b) 如果 B 的子模 A 为 B 的纯子模，则 $0 \longrightarrow A \cup B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$ 是纯的.

(c) 如果单同态 $f: A \longrightarrow B$ 是纯单的，则 f 的象是 B 的纯子摸.

(d) 如果满同态 $g: C \longrightarrow D$ 是纯满的，则 g 的核是 C 的纯子摸.

通常，R- 模复形的正合性被定义为逐点的正合，这种定义方法为理解有界导出范畴提供了方便.

定义 6[9] 如果零调复形 X 在某个层次 n 处是纯正合的，则该点处的短正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,d_{X_n} \longrightarrow X_n \longrightarrow \mathrm{Ker}\,d_{X_{n-1}} \longrightarrow 0$ 是纯正合的. 如果对任意的整数 n，X 在 n 处纯正合，则复形 X 是纯零调复形.

定义 7[9] M 如果为 $\mathrm{Mod}\,R$ 中的纯投射(或内射)模，则 M 关于每一个纯正合序列是投射的(或内射的). 我们将 $\mathrm{Mod}\,R$ 中的纯投射模和纯内射模构成 $\mathrm{Mod}\,R$ 的全子范畴分别记为 PP，PI.

定义 8[6] (a) 如果 $\mathrm{GProj}\,R$ 中的正合序列 $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$ 是 G- 纯正合的，则对任意的有限表示 Gorenstein 投射模 G，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, G_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, G_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, G_3) \longrightarrow 0$ 是正合的.

(b) H 如果为 $\mathrm{GProj}\,R$ 中的纯投射模，则对任意 G- 纯正合列 $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H, G_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H, G_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H, G_3) \longrightarrow 0$ 是正合的.

(c) E 如果为 $\mathrm{GProj}\,R$ 中的纯内射模，则对任意 G- 纯正合列 $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G_3, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G_2, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G_1, E) \longrightarrow 0$ 是正合的.

(d) A 如果为 $\mathrm{GProj}\,R$ 中的绝对纯模，则 $\mathrm{GProj}\,R$ 中的任意正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$ 是 G- 纯正合的.

我们将 $\mathrm{GProj}\,R$ 中的纯投射、纯内射和绝对纯模构成的 $\mathrm{GProj}\,R$ 的全子范畴分别记为 PP-$\mathrm{GProj}\,R$，PI-$\mathrm{GProj}\,R$ 和 Abs-$\mathrm{GProj}\,R$.

2 Gorenstein 投射复形范畴中的纯正合列

定义 9 (a) 如果正合复形 $F: \cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots$ 是 G- 纯正合的，则满足以下两条：

(a_1) 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$，F_n 是 Gorenstein 投射的；

(a_2) 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$，模的短正合列 $0 \longrightarrow Z_nF \longrightarrow F_n \longrightarrow Z_{n-1}F \longrightarrow 0$ 是 G- 纯正合的.

(b) H 如果为 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的纯投射复形，则对复形的任意 G- 纯正合列 $0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow F^3 \longrightarrow 0$，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(H, F^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(H, F^2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(H, F^3) \longrightarrow 0$ 是正合的.

(c) E 如果为 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的纯内射复形，则对复形的任意 G- 纯正合列 $0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow F^3 \longrightarrow 0$，序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(F^3, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(F^2, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(F^1, E) \longrightarrow 0$ 是正合的.

(d) A 如果为 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的绝对纯复形，则 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中任意的正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow F^2 \longrightarrow F^3 \longrightarrow 0$ 是 G- 纯正合的.

我们将 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的纯投射、纯内射和绝对纯复形构成的 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 的全子范畴分别记为 PP-$\mathrm{GProj}\,C(R)$，PI-$\mathrm{GProj}\,C(R)$ 和 Abs-$\mathrm{GProj}\,C(R)$.

定理 1 设 $A \in \mathrm{GProj}\,C(R)$，则下列叙述等价：

(i) $A \in Abs$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$；

(ii) 存在 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的 G- 纯正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow G^1 \longrightarrow 0$，其中 P 是投射复形；

(iii) 对任意有限表示 Gorenstein 投射复形 N，有 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(N, A) = 0$.

证 (i)⇒(ii) 由 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中绝对纯复形的定义可以得证.

(ii)⇒(i) 对 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中任意的正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow G^2 \longrightarrow G^3 \longrightarrow 0$，有如下行列正合交换图(图1)：

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & G^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & G^2 \arrow[r] \arrow[d] & G^4 \arrow[r] \arrow[d] & G^1 \arrow[r] & 0 \\
 & G^3 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G^3 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

图 1　行列正合交换图

因为 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G^3, P)=0$，所以图 1 第二列可裂．对任意的 $G\in \mathrm{GProj}\,C(R)$，用 $\mathrm{Hom}(G,-)$ 作用于图 1，由蛇引理可知

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, G^2)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, G^3)\longrightarrow 0$$

是正合的．于是 $0\longrightarrow A\longrightarrow G^2\longrightarrow G^3\longrightarrow 0$ 是 G- 纯正合的．故 $A\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．

(ii)⇔(iii) 对 $\forall G\in \mathrm{Gproj}\,C(R)$ 和 G- 纯正合序列 $0\longrightarrow A\longrightarrow P\longrightarrow G^1\longrightarrow 0$，用 $\mathrm{Hom}_{C(R)}(G,-)$ 作用此正合列得长正合序列 $0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, P)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, G^1)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, A)\longrightarrow 0$．于是(ii) 与(iii) 的等价易证．

下面我们给出定理 1 的一些应用．

推论 1　Abs-GProj $C(R)$ 关于扩张、直和、G- 纯子复形封闭．

证　设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是 GProj $C(R)$ 中的 G- 纯正合列，其中$\{A^i\}_{i\in I}$ 是范畴 Abs-GProj $C(R)$ 中的一族绝对纯复形．对 $\forall G\in \mathrm{GProj}\,C(R)$，用 $\mathrm{Hom}_{C(R)}(G,-)$ 作用此正合列，可得正合序列 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, C)$．因为

$$\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, A)=\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, C)=0$$

所以 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, B)=0$．于是 $B\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．故 Abs-GProj $C(R)$ 关于扩张封闭．

设$\{A^i\}_{i\in I}\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．对 $\forall G\in \mathrm{GProj}\,C(R)$，由同构

$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, A^i)\cong \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, \bigoplus_{i\in I}A^i)$$

可知 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, \bigoplus_{i\in I}A^i)=0$．于是 $\bigoplus_{i\in I}A^i\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．故 Abs-GProj $C(R)$ 关于直和封闭．

设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是 GProj $C(R)$ 中的 G- 纯正合列，其中 $B\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．对 $\forall G\in \mathrm{GProj}\,C(R)$，用 $\mathrm{Hom}_{C(R)}(G,-)$ 作用此正合列可得长正合序列 $0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, B)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(G, C)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, B)\longrightarrow \cdots$．因为 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, B)=0$，所以 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(G, A)=0$．于是 $A\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．故 Abs-GProj $C(R)$ 关于 G- 纯子复形封闭．

定义 10　如果Gorenstein投射复形 M 是 FP- 投射的，则对任意的 $N\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$，有 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(M, N)=0$．GProj $C(R)$ 中的所有 FP- 投射复形构成的类记为 FP-GProj $C(R)$．

命题 1　设 R 是环，$M\in GProj\ C(R)$．则以下条件等价：

(i) $M\in FP\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$；

(ii) M 相对于 GProj $C(R)$ 中的任意正合序列 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是投射的，其中 $A\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$；

(iii) 对 GProj $C(R)$ 中的任意正合序列 $0\longrightarrow K\longrightarrow F\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中 $F\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$，$K\longrightarrow F$ 是 K 的 Abs-GProj $C(R)$- 预包络；

(iv) M 是 Abs-GProj $C(R)$- 预包络 $K\longrightarrow P$ 的余核，其中 P 是投射复形，K 是 Gorenstein 投射复形．

证　(i)⇒(ii)　设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是 GProj $C(R)$ 中的正合序列，其中 $A\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$．因为 $M\in FP\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$，所以 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(M, A)=0$．于是 $0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M, B)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M, C)\longrightarrow 0$ 是正合的．故(ii) 得证．

(ii)⇒(i)　对 $\forall A\in Abs\text{-}\mathrm{GProj}\,C(R)$，存在 GProj $C(R)$ 中的短正合序列 $0\longrightarrow A\longrightarrow P\longrightarrow L\longrightarrow 0$，

其中 P 是投射复形. 则序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(M,A) \longrightarrow 0$$

是正合的. 由(ii) 知序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,L) \longrightarrow 0$$

是正合的. 则 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(M,A)=0$. 故 $M \in FP$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$.

(i)⇒(iii) 设 $E \in Abs$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$. 对 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$, 其中 $F \in Abs$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$, 由(i) 知 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(F,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(K,E) \longrightarrow 0$ 是正合的. 故(iii) 成立.

(iii)⇒(iv) 对 M 存在正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的正合列, 其中 P 是投射复形, K 是Gorenstein投射复形. 由定义知 $P \in Abs$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$. 因此 $K \longrightarrow P$ 是 K 的 Abs-$\mathrm{GProj}\,C(R)$-预包络.

(iv)⇒(i) 由(iv) 可知, 存在 $\mathrm{GProj}\,C(R)$ 中的正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$, 其中 $K \longrightarrow P$ 是 K 的 Abs-$\mathrm{GProj}\,C(R)$-预包络, P 是投射复形. 任取 $N \in Abs$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$, 则序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(P,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(K,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C(R)}(M,N) \longrightarrow 0$ 是正合的. 再次由(iv) 可知

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(P,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(R)}(K,N) \longrightarrow 0$$

是正合的. 因此 $\mathrm{Ext}^1_{C(R)}(M,N)=0$. 故 $M \in FP$-$\mathrm{GProj}\,C(R)$.

参考文献:

[1] COHN P M. On the Free Product of Associative Ring I [J]. Mathematische Zeitschrift, 1959, 71(1): 380-389.

[2] MADDOX B H. Absolutely Pure Modules [J]. Proc Amer Math Soc, 1967, 18: 155-158.

[3] STENSTERÖM M B. Coherent Rings and *FP*-Injective Modules [J]. J Lond Math Soc, 1970, 2(S2): 323-329.

[4] GÖBEL R, TRLIFAJ J. Approximations and Endomorphism Algebras of Modules [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2006.

[5] EMMANOUIL I. On Pure Acyclic Complexes [J]. J Algebra, 2016, 465: 190-213.

[6] YU P, HUANG Z Y. Pure-Injectivity in the Category of Gorenstein Projective Modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2017, 16(8): 170-191.

[7] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[8] ENOCHS E E, CARCÍA ROZAS J R. Gorenstein Injective and Projective Complexes [J]. Comm Algebra, 1998, 26: 1657-1674.

[9] ZHENG Y F, HUANG Z Y. On Pure Derived Categories [J]. J Algebra, 2016, 454: 252-272.

Pure Exact Sequence in the Category of Gorenstein Projective Complexes

WEI Bao-Jun, YU Chun-Yan, YANG Xiao-Yan

College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University Foreign Trade and Business College, Hechuan Chongqing 401520, China

Abstract: In this paper, the pure exact properties in the category of Gorenstein projective complexes has been studied. With the study of absolutely pure properties in Gorenstein projective complexes, *FP*-projective complexes in Gorenstein projective complexes have been introduced, and some equivalent characterizations given.

Key words: Gorenstein projective complexes; pure exact; *FP*-projective complexes

责任编辑 廖 坤