第 45 卷　第 2 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2020 年 2 月
Vol. 45　No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.02.003

含临界指数项和双重奇异项的 Kirchhoff 型椭圆边值方程的正解①

张　黔[1,2]，　邓志颖[1]

1. 重庆邮电大学 理学院 应用数学系，重庆 400065；2. 重庆数联铭信科技有限公司，重庆 401121

摘要：讨论了一类含临界指数项和双重奇异项的 Kirchhoff 型椭圆边值方程. 应用 Lions 集中紧性原理和 Ekeland 变分原理，证明了该方程在适当条件下正解的存在性与多重性，推广和改进了一些最近的结果.

关　键　词：Kirchhoff 型方程；Sobolev 临界指数；奇异项；集中紧性原理；正解

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2020)02－0011－09

讨论一类含有 Sobolev 临界指数项和双重奇异项的 Kirchhoff 型椭圆边值方程

$$\begin{cases} -\left(1+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u-\mu \dfrac{u}{|x|^2}=\lambda u^{2^*-1}+f(x)u^{-\gamma} & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 中包含原点的有界光滑区域，$b>0$，$\lambda>0$，$0<\gamma<1$ 均为常数，$0\leqslant\mu<\overline{\mu}=\left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$，$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 嵌入临界指数，$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中给定的非负非平凡函数.

形如(1)式的这类方程在理论探索和实际运用中具有重要意义，最早由文献[1]提出了数学模型

$$u_{tt}-\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u) \tag{2}$$

这是一类经典的自由振动的弹性 D′Alembert 方程. 在方程(2)中，u 代表位移，$f(x,u)$ 代表外力作用，b 代表初始张力，a 与弦的固有性质有关. 文献[2]提出了关于方程(2)的一个抽象框架，对 Kirchhoff 型方程引入了泛函分析的研究方式，在此之后，学者们广泛应用变分方法研究方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

特别是当方程(3)中的非线性项 $f(x,u)$ 含有 Sobolev 临界指数项时，方程(3)引起了学者们的广泛关注. 文献[3]应用 Ekeland 变分原理、山路定理等变分方法得到了方程(3)多解的存在性；文献[4]应用 Nehari 流形和 Ljusternik-Schnirelmann 畴数理论得到了方程(3)多解的存在性. 然而，关于含奇异项和临界指数项的 Kirchhoff 型椭圆方程的结果很少，文献[5]研究了这类问题，应用扰动方法、临界点理论得到了两个不同的正解. 文献[6]讨论了一类含奇异项和临界指数项的 p-Kirchhoff 型椭圆边值方程

$$\begin{cases} -M\|u\|^2\Delta_p u=\lambda u^{p^*-1}+\rho(x)u^{-\gamma} & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

---

① 收稿日期：2018－10－25

基金项目：国家自然科学基金项目(11471235，11601052，11971339)；重庆市基础与前沿研究计划重点项目(cstcjcyjBX0037).

作者简介：张　黔(1993－)，女，硕士研究生，主要从事非线性椭圆边值方程的研究.

通信作者：邓志颖，教授.

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$，$M(s)=a+bs^m$，$a>0$，$b>0$，$\Delta_p u=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p-Laplace 算子，作者应用 Lions 集中紧性原理、Vitali 定理和 Ekeland 变分原理得到了方程(4)的两个正解. 关于这类 Kirchhoff 型方程更进一步的研究参见文献[7-9].

受文献[5-6]的启发，本文很自然地提出一个问题：对于方程(1)，是否还存在正解以及多个正解?据我们所知，目前人们尚未研究过. 解决方程(1)将面临3个方面的困难：首先，方程(1)含有非局部项 $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u$，使得方程本身不再点点恒等；同时，嵌入 $W_0^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ 是非紧的；最后，负指数项 $f(x)u^{-\gamma}$ 导致能量泛函不可微，从而不能直接应用临界点理论处理这类问题. 本文应用 Lions 集中紧性原理、Brézis-Lieb 引理、Vitali 定理和 Ekeland 变分原理克服了上述困难. 本文得到的主要结果概括为：

定理1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是包含原点的有界光滑区域，$0<\gamma<1$，$f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中给定的非负非平凡函数，则存在 $\lambda^*,\Theta>0$，使得当 $|f|_2 \leqslant \Theta$，$\lambda \in (0,\lambda^*)$ 时，方程(1)至少存在两个正解.

注1 当 $a=1$，$b=0$，$\mu=0$ 时，方程(1)转化为半线性奇异椭圆边值方程，文献[10]应用 Lions 集中紧性原理和 Ekeland 变分原理得到了该方程的两个正解.

1 方程(1)正解的存在性

本节主要目的是证明方程(1)正解的存在性. 首先，设 $p>1$，定义 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 中的范数分别为 $\|u\|=\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，$|u|_p=\left(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$. 讨论方程(1)的出发点是下述 Hardy 不等式[11]：

$$\int_\Omega |x|^{-2}|u|^2\mathrm{d}x \leqslant \|u\|^2/\bar{\mu} \qquad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

当 $0 \leqslant \mu < \bar{\mu}$ 时，在 $H_0^1(\Omega)$ 中可定义范数

$$\|u\|_\mu=\left[\int_\Omega (|\nabla u|^2-\mu|x|^{-2}|u|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

由此可知，$\|u\|_\mu$ 与通常的范数 $\|u\|$ 等价. 定义嵌入 $W_0^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ 的最佳临界常数为

$$S_\mu=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_\mu^2}{|u|_{2^*}^2} \tag{5}$$

由文献[12]可知，S_μ 与 Ω 无关. 当 $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ 时，S_μ 不可达到.

定义方程(1)所对应的能量泛函为 $I_\lambda:H_0^1(\Omega)\longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\|u\|_\mu^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x$$

注意到，方程(1)中的奇异项 $f(x)u^{-\gamma}$ 会导致泛函 I_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上不可微，即 $I_\lambda \notin C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$. 通常，对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$，方程(1)的弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega (\nabla u\nabla v-\mu|x|^{-2}uv)\mathrm{d}x+b\|u\|^2\int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u^{2^*-1}v\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)|u|^{-\gamma}v\mathrm{d}x=0 \tag{6}$$

由(6)式，定义集合

$$\Lambda=\left\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|_\mu^2+b\|u\|^4-\lambda|u|_{2^*}^{2^*}-\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x=0\right\}$$

考虑

$$\varphi_u(t)=\frac{t^2}{2}\|u\|_\mu^2+\frac{bt^4}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda t^{2^*}}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}-\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x$$

从而可得

$$\varphi_u''(1)=(1+\gamma)\|u\|_\mu^2+b(3+\gamma)\|u\|^4-\lambda(2^*-1+\gamma)|u|_{2^*}^{2^*}$$

可将 Λ 拆分成3部分，分别为 Λ 的局部极小值点、拐点和局部极大值点的集合：

$$\Lambda^+=\{u\in\Lambda:\varphi_u''(1)>0\} \qquad \Lambda^0=\{u\in\Lambda:\varphi_u''(1)=0\} \qquad \Lambda^-=\{u\in\Lambda:\varphi_u''(1)<0\}$$

在全文中，若无特别说明，C，C_0，C_1，C_2，… 均表示正常数，“$\rightarrow$”和“$\rightharpoonup$”分别表示相应空间中的强收

敛和弱收敛，$B_r(x)$ 表示以 x 为球心，r 为半径的开球．为证明方程(1)正解的存在性，给出下述引理：

引理 1　泛函 I_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有局部极小值 m，且 $m<0$.

证　由(5)式和 Hölder 不等式可得

$$\int_\Omega |u|^{2^*}\mathrm{d}x \leqslant S_\mu^{-\frac{2^*}{2}} \|u\|_\mu^{2^*} \tag{7}$$

$$\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x \leqslant |f|_2 |\Omega|^{\frac{2^*-2+2\gamma}{2\cdot 2^*}} |u|_{2^*}^{1-\gamma} \leqslant C_0 |f|_2 |u|_{2^*}^{1-\gamma} \leqslant C_1 |f|_2 \|u\|_\mu^{1-\gamma} \tag{8}$$

则

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 + \frac{b}{4}\|u\|_\mu^4 - C_2|f|_2\|u\|_\mu^{1-\gamma} - \lambda C_3\|u\|_\mu^{2^*} \qquad \forall u\in H_0^1(\Omega) \tag{9}$$

由 $1-\gamma<2$ 及(9)式可得，存在 $\lambda_1>0$，对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_1)$，存在 $\rho,R>0$，使得 I_λ 在 $S_R=\{u\in H_0^1(\Omega)：\|u\|_\mu=R\}$ 上 $I_\lambda(u)\geqslant\rho$，并且 I_λ 在 $B_R=\{u\in H_0^1(\Omega)：\|u\|_\mu\leqslant R\}$ 上下方有界．从而对固定的 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，可以定义 $m=\inf\limits_{u\in B_R} I_\lambda(u)$．由于 $0<1-\gamma<1$，从而由(9)式可知，对 $\forall\omega\neq 0$ 及充分小的 $t>0$，有 $I_\lambda(t\omega)<0$．从而可得 $m<0$.

引理 2　存在 $u^1\in B_R$，使得 $I_\lambda(u^1)=m$.

证　由引理 1，对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_1)$，有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} \geqslant \rho & \forall u\in S_R \\ \frac{1}{2}\|u\|_\mu^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} \geqslant 0 & \forall u\in B_R \end{cases} \tag{10}$$

由 m 的定义可知，存在极小化序列$\{u_k\}\subset B_R$，使得 $I_\lambda(u_k)\to m<0(k\to\infty)$．显然 $I_\lambda(u_k)=I_\lambda(|u_k|)$，从而可设 $u_k\geqslant 0$．又因为 $\|u\|_\mu\leqslant R$，由有界集的弱紧性，存在子序列(仍记为$\{u_k\}$)，当 $k\to\infty$ 时满足 $u_k\rightharpoonup u^1(x\in H_0^1(\Omega))$，$u_k\rightharpoonup u^1(x\in L^s(\Omega)(1\leqslant s<6))$，$u_k(x)\to u^1(x)(\text{a.e. } x\in\Omega)$．由(7)式知，$u_k$ 在 $L^{2^*}(\Omega)$ 中有界．又因 $H_0^1(\Omega)$ 是自反空间，且 B_R 是闭凸的，所以 $u^1\in B_R$．再由 Vitali 定理可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f(x)|u_k|^{1-\gamma}\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)|u^1|^{1-\gamma}\mathrm{d}x \tag{11}$$

令 $\omega_k=u_k-u^1$，则由 Brézis-Lieb 引理，有

$$\|u_k\|^2 = \|\omega_k\|^2 + \|u^1\|^2 + o(1) \tag{12}$$

$$\|u_k\|^4 = \|\omega_k\|^4 + \|u^1\|^4 + 2\|\omega_k\|^2\|u^1\|^2 + o(1) \tag{13}$$

$$|u_k|_{2^*}^{2^*} = |\omega_k|_{2^*}^{2^*} + |u^1|_{2^*}^{2^*} + o(1) \tag{14}$$

注意到 $\|u^1\|_\mu^2 = \|u^1\|^2 - \mu\left|\frac{u^1}{x}\right|_2^2$，故

$$\|u_k\|_\mu^2 = \|\omega_k\|_\mu^2 + \|u^1\|_\mu^2 + o(1) \tag{15}$$

若 $u^1=0$，则 $\omega_k=u_k$，那么 $\omega_k\in B_R$；若 $u^1\neq 0$，由(12)式知，当 k 充分大时有 $\omega_k\in B_R$．因此，由(10)式得

$$\frac{1}{2}\|\omega_k\|_\mu^2 + \frac{b}{4}\|\omega_k\|_\mu^4 - \frac{\lambda}{2^*}|\omega_k|_{2^*}^{2^*} \geqslant 0 \tag{16}$$

从而由(11)－(16)式可得

$$m = I_\lambda(u^1)+o(1) = I_\lambda(u^1) + \frac{1}{2}\|\omega_k\|_\mu^2 + \frac{b}{4}\|\omega_k\|_\mu^4 + \frac{b}{2}\|\omega_k\|^2\|u^1\|^2 - \frac{\lambda}{2^*}|\omega_k|_{2^*}^{2^*} + o(1) \geqslant$$

$$I_\lambda(u^1) + \frac{b}{2}\|\omega_k\|^2\|u^1\|^2 + o(1) \geqslant I_\lambda(u^1) + o(1)$$

令 $k\to\infty$，可知 $m\geqslant I_\lambda(u^1)$．再由 m 的定义，可得 $m\leqslant I_\lambda(u^1)$．故 $I_\lambda(u^1)=m<0$，且 u^1 不恒等于 0，故 u^1 是 I_λ 的局部极小解.

定理 1 正解存在性的证明　显然，对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_1)$，引理 1 和引理 2 都成立．现只需证明 u^1 是方程(1)

的正弱解. 由引理 2 可知

$$\min_{t\in\mathbb{R}} I_\lambda(u^1+t\varphi)=I_\lambda(u^1+t\varphi)\mid_{t=0}=I_\lambda(u^1)\qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$$

因此

$$0=\int_\Omega(\nabla u^1\ \nabla\varphi-\mu\mid x\mid^{-2}u^1\varphi)\mathrm{d}x+b\ \|u^1\|^2\int_\Omega\nabla u^1\ \nabla\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega(u^1)^{2^*-1}\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)\mid u^1\mid^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x$$

其中 $\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$. 由此可知 u^1 是方程(1)的弱解. 对 $\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $u^1\geqslant 0$, $\varphi\geqslant 0$, $t>0$, 可得 $0\leqslant I_\lambda(u^1+t\varphi)-I_\lambda(u^1)$. 易知

$$\frac{1}{2}\ \|u^1+t\varphi\|_\mu^2-\frac{1}{2}\ \|u^1\|_\mu^2+\frac{b}{4}\ \|u^1+t\varphi\|^4-\frac{b}{4}\ \|u^1\|^4\geqslant 0\qquad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega),\ \varphi\geqslant 0 \tag{17}$$

将(17)式两边同时除以 $t(t>0)$, 再令 $t\to 0$, 可得 $u^1\in H_0^1(\Omega)$, 且

$$-(1+b\ \|u^1\|^2)\Delta u^1-\mu\mid x\mid^{-2}u^1\geqslant 0$$

由强极大值原理知 $u^1>0(x\in\Omega)$.

2 方程(1)正解的多重性

本节主要证明方程(1)正解的多重性, 主要在 Λ^- 上讨论方程(1)的正解, 并由 Lions 集中紧性原理、Vitali 定理和 Ekeland 变分原理等方法证明得到.

引理 3 I_λ 在 Λ 上强制.

证 对 $\forall u\in\Lambda$, 有

$$\|u\|_\mu^2+b\ \|u\|^4-\lambda\mid u\mid_{2^*}^{2^*}-\int_\Omega f(x)\mid u\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x=0$$

从而可得

$$I_\lambda(u)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\|u\|_\mu^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^*}\right)b\ \|u\|_\mu^4-\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{2^*}\right)C_1\mid f\mid_2\ \|u\|_\mu^{1-\gamma}$$

由于 $0<1-\gamma<2$, 则 $\lim\limits_{\|u\|_\mu\to\infty}I_\lambda(u)=+\infty$, 即 I_λ 在 Λ 上强制, 且下方有界.

引理 4 存在 $\Theta>0$, $\lambda_2>0$, 使得当 $\lambda\in(0,\lambda_2)$, $0<\mid f\mid_2\leqslant\Theta$ 时, 有 $\Lambda^-\neq\varnothing$, $\Lambda^0=\{0\}$, 且 Λ^- 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是闭集.

证 设 $\varphi(t)=t^{1+\gamma}\ \|u\|_\mu^2+bt^{3+\gamma}\ \|u\|^4-\lambda t^{2^*-1+\gamma}\mid u\mid_{2^*}^{2^*}$. 令 t_ε 满足 $\varphi'(t_\varepsilon)=0$, 则有

$$t_\varepsilon>t_0=\left[\frac{(1+\gamma)\ \|u\|_\mu^2}{\lambda(2^*-1+\gamma)\mid u\mid_{2^*}^{2^*}}\right]^{\frac{1}{2^*-2}}$$

注意到: 对 $\forall 0<t<t_\varepsilon$, 有 $\varphi'(t)>0$; 对 $\forall t>t_\varepsilon$, 有 $\varphi'(t)<0$. 那么 φ 在 $0<t<t_\varepsilon$ 上递增, 在 $t>t_\varepsilon$ 上递减. 于是 $\varphi(t)$ 可在 t_ε 点处取得最大值. 因此, 取 λ 充分小, 推断可得

$$\varphi_{\max}=\varphi(t_\varepsilon)>\varphi(t_0)>\left(\frac{2^*-2}{2^*-1+\gamma}\right)\left(\frac{1+\gamma}{2^*-1+\gamma}\right)^{\frac{1+\gamma}{2^*-2}}S_\mu^{\frac{2^*-1+\gamma}{2^*-2}}\mid u\mid_{2^*}^{1-\gamma}$$

再由(7)式和(8)式有

$$\varphi_{\max}-\int_\Omega f(x)\mid u\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x>0 \tag{18}$$

那么对 $\forall 0<\mid f\mid_2\leqslant\Theta$, 有(18)式成立, 其中

$$\Theta=\mid\Omega\mid^{\frac{2^*-2+2\gamma}{2\cdot 2^*}}\left(\frac{2^*-2}{2^*-1+\gamma}\right)\left(\frac{1+\gamma}{2^*-1+\gamma}\right)^{\frac{1+\gamma}{2^*-2}}S_\mu^{\frac{2^*-1+\gamma}{2^*-2}}$$

因此, 存在唯一的正数 $t^-=t^-(u)>t_\varepsilon$, 使得 $\varphi(t^-)=\int_\Omega f(x)\mid u\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x$, $\varphi'(t^-)<0$, 这就意味着 $t^-u\in\Lambda^-$, 即对 $\forall 0<\mid f\mid_2\leqslant\Theta$, 有 $\Lambda^-\neq\varnothing$.

用反证法证明 $\Lambda^0=\{0\}$. 假设 $u\in\Lambda^0\backslash\{0\}$, 则

$$0=(1+\gamma)\ \|u\|_\mu^2+b(3+\gamma)\ \|u\|^4-\lambda(2^*-1+\gamma)\mid u\mid_{2^*}^{2^*}=$$

$$\|u\|_{\mu}^{2}+b\|u\|^{4}-\lambda|u|_{2^*}^{2^*}-\int_{\Omega}f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x \tag{19}$$

因此

$$\frac{2^*-2}{2^*-1+\gamma}\|u\|_{\mu}^{2}+\frac{2^*-4}{2^*-1+\gamma}b\|u\|_{\mu}^{4}-\int_{\Omega}f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x=0 \tag{20}$$

由(7),(19) 式及 Young 不等式可得

$$2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}\|u\|_{\mu}^{3}\leqslant\lambda(2^*-1+\gamma)S_{\mu}^{-\frac{2^*}{2}}\|u\|_{\mu}^{2^*}$$

即

$$\|u\|_{\mu}\geqslant\left\{\frac{2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}}{\lambda(2^*-1+\gamma)}S_{\mu}^{\frac{2^*}{2}}\right\}^{\frac{1}{2^*-3}} \tag{21}$$

由(8),(20) 式及 Young 不等式可得

$$\frac{2\sqrt{(2^*-2)(2^*-4)b}}{2^*-1+\gamma}\|u\|_{\mu}^{3}\leqslant\int_{\Omega}f(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\leqslant C_1|f|_2\|u\|_{\mu}^{1-\gamma}$$

由于 $0<1-\gamma<1$，则

$$\|u\|_{\mu}\leqslant\left\{\frac{C_1|f|_2(2^*-1+\gamma)}{2\sqrt{(2^*-2)(2^*-4)b}}\right\}^{\frac{1}{2+\gamma}} \tag{22}$$

当

$$\lambda<\lambda_3=\frac{2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}}{2^*-1+\gamma}S_{\mu}^{\frac{2^*}{2}}\cdot\left\{\frac{C_1|f|_2(2^*-1+\gamma)}{2\sqrt{(2^*-2)(2^*-4)b}}\right\}^{\frac{3-2^*}{2+\gamma}}$$

时，(22) 式与(21) 式矛盾. 综上所述，对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_2)$，有 $\Lambda^0=\{0\}$.

下证 Λ^- 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是闭集. 令$\{u_n\}\subset\Lambda^-$ 使得 $u_n\to u(x\in H_0^1(\Omega))$，存在子序列(仍记为$\{u_n\}$)，使得 $u_n\to u(\text{a. e. } x\in\Omega)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|_{2^*}=|u|_{2^*}$. 再由 Λ^- 的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\{(1+\gamma)\|u_n\|_{\mu}^{2}+b(3+\gamma)\|u_n\|^{4}-\lambda(2^*-1+\gamma)|u|_{2^*}^{2^*}\}\leqslant 0 \tag{23}$$

由(23) 式可知 $u\in\Lambda^0\cup\Lambda^-$. 若 Λ^- 不是闭集，则 $u\in\Lambda^0$，此时 $u\equiv 0$. 对 $\forall\{u_n\}\subset\Lambda^-$，

$$|u_n|_{2^*}>\left\{\frac{2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}}{\lambda(2^*-1+\gamma)}\right\}^{\frac{1}{2^*-3}}S_{\mu}^{\frac{3}{2\cdot 2^*-6}}$$

从而，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|_{2^*}\geqslant\left\{\frac{2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}}{\lambda(2^*-1+\gamma)}\right\}^{\frac{1}{2^*-3}}S_{\mu}^{\frac{3}{2\cdot 2^*-6}}>0 \tag{24}$$

(24) 式与 $u=0$ 矛盾. 因此对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_2)$，有 $u\in\Lambda^-$，且 Λ^- 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是闭集.

引理 5　存在 $\lambda_3>0$，使得对 $\forall u\in\Lambda^-$，$\lambda\in(0,\lambda_3)$，有 $I_\lambda(u)\geqslant 0$.

证　用反证法. 假设存在 $\bar{u}\in\Lambda^-$，使得 $I_\lambda(\bar{u})<0$，即

$$\frac{1}{2}\|\bar{u}\|_{\mu}^{2}+\frac{b}{4}\|\bar{u}\|^{4}-\frac{\lambda}{2^*}|\bar{u}|_{2^*}^{2^*}-\frac{1}{1-\gamma}\int_{\Omega}f(x)|\bar{u}|^{1-\gamma}\mathrm{d}x<0$$

由 $u\in\Lambda^-\subset\Lambda$，则

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\|\bar{u}\|_{\mu}^{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^*}\right)b\|\bar{u}\|^{4}-\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\Omega}f(x)|\bar{u}|^{1-\gamma}\mathrm{d}x<0$$

再由(7),(8) 式及 Young 不等式，可得

$$\sqrt{\frac{b(2^*-2)(2^*-4)}{2(2^*)^2}}(S_{\mu}^{3}|\bar{u}|_{2^*}^{2^*})^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{2^*}\right)C_0|f|_2|\bar{u}|_{2^*}^{1-\gamma}$$

则

$$|\bar{u}|_{2^*}<\left\{\frac{(2^*-1+\gamma)C_0|f|_2}{\sqrt{\frac{b(2^*-2)(2^*-4)}{2}}(1-\gamma)S_{\mu}^{\frac{3}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2+\gamma}}$$

取

$$\lambda_3=\left\{\frac{\sqrt{\frac{b(2^*-2)(2^*-4)}{2}}(1-\gamma)S_\mu^{\frac{3}{2}}}{C_0\mid f\mid_2(2^*-1+\gamma)}\right\}^{\frac{2^*-3}{2+\gamma}}\left\{\frac{2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}S_\mu^{\frac{3}{2}}}{2^*-1+\gamma}\right\}$$

则对任意的 $\lambda<\lambda_3$，有

$$\mid\bar{u}\mid_{2^*}<\left\{\frac{2\sqrt{b(1+\gamma)(3+\gamma)}}{\lambda(2^*-1+\gamma)}\right\}^{\frac{1}{2^*-3}}S_\mu^{\frac{3}{2\cdot 2^*-6}}$$

这与(24)式矛盾.因此，引理5得证.

引理6 若 $u\in\Lambda^-$，则存在 $\varepsilon>0$ 及可微函数 $f=f(\omega)>0$，其中 $\omega\in H_0^1(\Omega)$，$\|\omega\|<\varepsilon$，使得

$$f(0)=1\qquad f(\omega)(u+\omega)\in\Lambda^-,\ \forall\,\omega\in H_0^1(\Omega)$$

证 定义 $F:\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$，有

$$F(t,\omega)=t^{1+\gamma}\ \|u+\omega\|_\mu^2\mathrm{d}x+bt^{3+\gamma}\ \|u+\omega\|^4-\lambda t^{2^*-1+\gamma}\mid u+\omega\mid_{2^*}^{2^*}-\int_\Omega f(x)\mid u+\omega\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x$$

由于 $u\in\Lambda^-\subset\Lambda$，可知 $F(1,0)=0$，且

$$F_t(1,0)=(1+\gamma)\ \|u\|_\mu^2+b(3+\gamma)\ \|u\|^4-\lambda(2^*-1+\gamma)\mid u\mid_{2^*}^{2^*}<0$$

由隐函数定理，存在 $\bar{\varepsilon}>0$ 及可微函数 $f=f(\omega)>0$，使得 $f(0)=1$，$f(\omega)(u+\omega)\in\Lambda$，$\forall\,\omega\in H_0^1(\Omega)$，$\|\omega\|<\bar{\varepsilon}$. 显然，给定充分小的 $\varepsilon>0(\varepsilon<\bar{\varepsilon})$，满足

$$f(\omega)(u+\omega)\in\Lambda^-\qquad\forall\,\omega\in H_0^1(\Omega),\ \|\omega\|<\varepsilon$$

引理7 对 $\forall\,\lambda>0$，方程(1)在 $H_0^1(\Omega)$ 中有弱解 u^2.

证 由 $0<\mid f\mid_2\leqslant\Theta$ 及引理4可知 $\Lambda^-\neq\varnothing$，$m_-=\inf\limits_{u\in\Lambda^-}I_\lambda(u)>-\infty$. 由 Ekeland 变分原理，存在一个极小化序列 $\{v_n\}\subset\Lambda^-$，满足

$$I_\lambda(v_n)<m_-+\frac{1}{n}\qquad I_\lambda(v_n)\leqslant I_\lambda(v)+\frac{1}{n}\|v-v_n\|\qquad\forall\,v\in\Lambda^-$$

由 $I_\lambda(v_n)=I_\lambda(\mid v_n\mid)$，可设 $v_n\geqslant 0$ 在 Ω 中，且 $\{v_n\}$ 收敛到一个函数(有必要时收敛到子序列)，记作 $u^2\geqslant 0$，且满足：$v_n\rightharpoonup u^2(x\in H_0^1(\Omega))$，$v_n\rightarrow u^2(\text{a.e. }x\in\Omega)$. 令 $u=v_n\in\Lambda^-$，$\omega=t\varphi$，$\varphi\in H_0^1(\Omega)$，$t>0$ 充分小，可得可微函数 $f_n(t)=f_n(t\varphi)$，满足 $f_n(0)=1$，$f_n(t)(v_n+t\varphi)\in\Lambda^-$. 由于 $\Lambda^-\subset\Lambda$，可得

$$f_n^2(t)\ \|v_n+t\varphi\|_\mu^2+bf_n^4(t)\ \|v_n+t\varphi\|^4-\lambda f_n^{2^*}(t)\mid v_n+t\varphi\mid_{2^*}^{2^*}-f_n^{1-\gamma}(t)\int_\Omega f(x)\mid v_n+t\varphi\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x=0$$

$$\|v_n\|_\mu^2+b\ \|v_n\|^4-\lambda\mid v_n\mid_{2^*}^{2^*}-\int_\Omega f(x)\mid v_n\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x=0$$

由 Ekeland 变分原理可得

$$\frac{1}{n}[\mid f_n(t)-1\mid\ \|v_n\|_\mu+tf_n(t)\ \|\varphi\|_\mu]\geqslant$$

$$\frac{1}{n}\ \|f_n(t)(v_n+t\varphi)-v_n\|_\mu\geqslant I_\lambda(v_n)-I_\lambda[f_n(t)(v_n+t\varphi)]=$$

$$\frac{1-f_n^2(t)}{2}\ \|v_n\|_\mu^2+b\frac{1-f_n^4(t)}{4}\ \|v_n\|^4-\lambda\frac{1-f_n^{2^*}(t)}{2^*}\mid v_n+t\varphi\mid_{2^*}^{2^*}-\frac{1-f_n^{1-\gamma}(t)}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)\mid v_n+t\varphi\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{f_n^2(t)}{2}(\|v_n\|_\mu^2-\|v_n+t\varphi\|_\mu^2)+\frac{bf_n^4(t)}{4}(\|v_n\|^4-\|v_n+t\varphi\|^4)-\frac{\lambda}{2^*}(\mid v_n\mid_{2^*}^{2^*}-\mid v_n+t\varphi\mid_{2^*}^{2^*})-$$

$$\frac{1}{1-\gamma}\left[\int_\Omega f(x)\mid v_n\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)\mid v_n+t\varphi\mid^{1-\gamma}\mathrm{d}x\right]\tag{25}$$

将(25)式两边同时除以 $t(t>0)$，再令 $t\rightarrow 0$，由此可得

$$\int_\Omega f(x)\mid v_n\mid^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{n}[\mid f_n'(0)\mid\ \|v_n\|_\mu+\|\varphi\|_\mu]+\int_\Omega(\nabla v_n\nabla\varphi-\mu\mid x\mid^{-2}v_n\varphi)\mathrm{d}x+b\ \|v_n\|^2\int_\Omega\nabla v_n\nabla\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega v_n^{2^*-1}\varphi\mathrm{d}x$$

再由文献[13]，存在 $C_4>0$ 使得 $|f_n'(0)|\leqslant C_4$. 当 $n\to\infty$ 时，由 Fatou 引理可得

$$\int_\Omega f(x)(u^2)^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)|v_n|^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega(\nabla u^2\ \nabla\varphi-\mu|x|^{-2}u^2\varphi)\mathrm{d}x+b\|u^2\|\int_\Omega\nabla u^2\ \nabla\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega(u^2)^{2^*-1}\varphi\mathrm{d}x$$

由于 φ 的任意性，该不等式对 $-\varphi$ 也成立，因此可得

$$\int_\Omega(\nabla u^2\ \nabla\varphi-\mu|x|^{-2}u^2\varphi)\mathrm{d}x+b\|u^2\|^2\int_\Omega\nabla u^2\ \nabla\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega(u^2)^{2^*-1}\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(u^2)^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x=0$$

这意味着 u^2 是方程(1) 的弱解.

引理 8　存在 $\lambda_4>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_4$ 时，有 $u^2\in\Lambda^-$.

证　对 $\forall u\in\Lambda^-\subset\Lambda$，可知

$$I_\lambda(u)<\frac{1}{4(1-\gamma)}[(1+\gamma)\|u\|_\mu^2+b(3+\gamma)\|u\|^4]+\frac{\lambda(2^*-1+\gamma)}{2^*(1-\gamma)}|u|_{2^*}^{2^*}=\frac{\lambda(2^*+4)(2^*-1+\gamma)}{4\cdot2^*(1-\gamma)}|u|_{2^*}^{2^*}$$

易知，取 $\lambda<\tilde{\lambda}_4$，当 $\tilde{\lambda}_4$ 满足

$$\frac{\tilde{\lambda}_4(2^*+4)(2^*-1+\gamma)}{4\cdot2^*(1-\gamma)}|u|_{2^*}^{2^*}<\frac{1}{N}S_\mu^{\frac{N}{2}}$$

时，我们有 $m_-<\frac{1}{N}S_\mu^{\frac{N}{2}}$.

下证 $u^2\in\Lambda^-$，由于 Λ^- 是闭集，且 $v_n\rightharpoonup u^2(x\in H_0^1(\Omega))$，现只需证 $\|v_n\|_\mu\to\|u^2\|_\mu$. 由 Lions 集中紧性原理[14]，存在非负有界测度 $\eta,\nu,\tilde{\nu}$，使得 $|\nabla v_n|^2\rightharpoonup\eta$，$|v_n|^{2^*}\rightharpoonup\nu$，$|x|^{-2}|v_n|^2\rightharpoonup\tilde{\nu}$ 在测度意义下成立，并存在至多可数集 $\mathscr{J}$，点集 $\{x_j\}_{j\in\mathscr{J}}\subset\overline{\Omega}\backslash\{0\}$，$\{\eta_j\geqslant0\}_{j\in\mathscr{J}\cup\{0\}}$，$\{\nu_j\geqslant0\}_{j\in\mathscr{J}\cup\{0\}}$，$\tilde{\nu}_0\geqslant0$，使得：

(a) $\eta\geqslant|\nabla u^2|^2+\sum_{j\in\mathscr{J}}\eta_j\delta_{x_j}+\eta_0\delta_0$；

(b) $\nu=|u^2|^{2^*}+\sum_{j\in\mathscr{J}}\nu_j\delta_{x_j}+\nu_0\delta_0$；

(c) $\tilde{\nu}=|x|^{-2}|v_n|^2+\tilde{\nu}_0\delta_0$；

(d) $S_0\nu_j^{\frac{2}{2^*}}\leqslant\eta_j$；

(e) $S_\mu\nu_0^{\frac{2}{2^*}}\leqslant\eta_0-\mu\tilde{\nu}_0$.

其中 $\delta_{x_j}(j\in\mathscr{J}\cup\{0\})$ 是 x_j 处的 Dirac 测度. 令 $n\to\infty$，可得

$$\|v_n\|^2\to\int_\Omega\mathrm{d}\eta\geqslant\|u^2\|^2+\sum_{j\in\mathscr{J}}S_0\nu_j^{\frac{2}{2^*}}+\eta_0\tag{26}$$

$$|v_n|_{2^*}^{2^*}\to\int_\Omega\mathrm{d}\nu=|u^2|_{2^*}^{2^*}+\sum_{j\in\mathscr{J}}\nu_j+\nu_0\tag{27}$$

$$\int_\Omega|x|^{-2}|v_n|^2\mathrm{d}x\to\int_\Omega\mathrm{d}\tilde{\nu}=\int_\Omega|x|^{-2}|u^2|^2\mathrm{d}x+\tilde{\nu}_0\tag{28}$$

再由 Vitali 定理，可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)|u^2|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\tag{29}$$

设 $x_j\neq0$ 是测度 η 和 ν 的一个奇异点，因为对 $\forall j\in\mathscr{J}$，有 $x_j\neq0$，选取充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $0\in B_{x_j}(\varepsilon)$ 且 $B_{x_i}(\varepsilon)\cap B_{x_j}(\varepsilon)=\varnothing$，其中 $i\neq j$，$i,j\in\mathscr{J}$. 现定义 ψ_ε 是以 x_j 为中心的光滑截断函数，且 $0\leqslant\psi_\varepsilon\leqslant1$. 当 $|x-x_j|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时，$\psi_\varepsilon=1$；当 $|x-x_j|\geqslant\varepsilon$ 时，$\psi_\varepsilon=0$，并且有 $|\nabla\psi_\varepsilon|\leqslant\frac{4}{\varepsilon}$.

显然，类似于引理 7 的证明方法，对 $\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_\Omega\left(\nabla v_n\ \nabla\varphi-\mu\frac{v_n\varphi}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x+b\|v_n\|^2\int_\Omega\nabla v_n\ \nabla\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega(v_n)^{2^*-1}\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(v_n)^{-\gamma}\varphi\mathrm{d}x=o(1)$$

由于 $\psi_\varepsilon v_n\in H_0^1(\Omega)$，则

$$\int_\Omega\left(\nabla v_n\nabla(\psi_\varepsilon v_n)-\mu\frac{v_n\psi_\varepsilon v_n}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x+b\ \|v_n\|^2\int_\Omega\nabla v_n\ \nabla(\psi_\varepsilon v_n)\mathrm{d}x$$
$$-\lambda\int_\Omega(v_n)^{2^*-1}\psi_\varepsilon v_n\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)(v_n)^{-\gamma}\psi_\varepsilon v_n\mathrm{d}x=o(1)$$

依据(26)－(29)式可推断出

$$-\left(b\int_\Omega\mathrm{d}\eta+1\right)\int_\Omega\psi_\varepsilon\mathrm{d}\eta+\mu\int_\Omega\psi_\varepsilon\mathrm{d}\tilde{\nu}+\int_\Omega f(x)(u^2)^{1-\gamma}\psi_\varepsilon\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega\psi_\varepsilon\mathrm{d}\nu=$$
$$\left(b\int_\Omega\mathrm{d}\eta+1\right)\int_\Omega(\nabla v_n\ \nabla\psi_\varepsilon)v_n\mathrm{d}x+o(1)\qquad n\to\infty$$

即 $n\to\infty$ 时，有

$$0=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\left(b\int_\Omega\mathrm{d}\eta+1\right)\int_\Omega\psi_\varepsilon\mathrm{d}\eta-\mu\int_\Omega\psi_\varepsilon\mathrm{d}\tilde{\nu}-\int_\Omega f(x)\ (u^2)^{1-\gamma}\psi_\varepsilon\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\psi_\varepsilon\mathrm{d}\nu\right]\geqslant\eta_j-\lambda\nu_j\tag{30}$$

由(30)式可得 $\lambda\nu_j\geqslant\eta_j$，$\lambda\nu_j\geqslant S_0\nu_j^{\frac{2}{2^*}}$. 从而再由(d)得出：要么(i) $\nu_j=0$；要么(ii) $\nu_j\geqslant\left(\frac{S_0}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}$. 同理，对于 $x=0$ 的集中情形，由(e)可得：要么(iii) $\nu_0=0$；要么(iv) $\nu_0\geqslant\left(\frac{S_\mu}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}$.

下证情形(ii)及(iv)不成立. 用反证法，假设存在 j_0，使得 $\nu_{j_0}\geqslant\left(\frac{S_0}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}$.

$$m_-=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ \|v_n\|_\mu^2+\frac{b}{4}\ \|v_n\|^4-\frac{\lambda}{2^*}\ |v_n|_{2^*}^{2^*}-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)\ |v_n|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(\|u^2\|^2+\sum_{j\in\mathscr{J}\cup\{0\}}\eta_j-\mu\int_\Omega\frac{|u^2|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x-\mu\tilde{\nu}_0\right)-\frac{\lambda}{2^*}\left(|u^2|_{2^*}^{2^*}+\sum_{j\in\mathscr{J}\cup\{0\}}\nu_j\right)-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)\ |u^2|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$I_\lambda(u^2)+\frac{1}{N}S_0^{\frac{N}{2}}\lambda^{1-\frac{N}{2}}>I_\lambda(u^2)+\frac{1}{N}S_0^{\frac{N}{2}}$$

事实上，$m_-<\frac{1}{N}S_\mu^{\frac{N}{2}}$，由此可知 $I_\lambda(u^2)<0$，故 $u^2\neq0$，且

$$0<\frac{b}{4}\ \|u^2\|^4<\frac{1}{2}\ \|u^2\|_\mu^2+\frac{b}{4}\ \|u^2\|^4<\frac{\lambda}{2^*}\ |u^2|_{2^*}^{2^*}+\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)\ |u^2|^{1-\gamma}\mathrm{d}x$$

因此

$$m_-=\lim_{n\to\infty}I_\lambda(v_n)=\lim_{n\to\infty}\left[I_\lambda(v_n)-\frac{1}{2}\left(\|v_n\|_\mu^2+b\ \|v_n\|^4-\lambda\ |v_n|_{2^*}^{2^*}-\int_\Omega f(x)\ |v_n|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\right)\right]\geqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\ |u^2|_{2^*}^{2^*}+\frac{1}{2}\int_\Omega f(x)\ |u^2|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\right)\geqslant\frac{\lambda}{2}\left(|u^2|_{2^*}^{2^*}+\sum_{j\in\mathscr{J}\cup\{0\}}\nu_j\right)+\frac{1}{2}\int_\Omega f(x)\ |u^2|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u^2|^{2^*}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}C_0\ |f|_2\ |u^2|_{2^*}^{1-\gamma}+\frac{1}{2}S_0^{\frac{N}{2}}\lambda^{1-\frac{N}{2}}>\frac{1}{N}S_0^{\frac{N}{2}}\tag{31}$$

取 $\bar{\lambda}_4>0$，使得

$$\frac{\bar{\lambda}_4}{2}\ |u^2|_{2^*}^{2^*}+\frac{1}{2}C_0\ |f|_2\ |u^2|_{2^*}^{1-\gamma}<0$$

对 $\forall\lambda<\bar{\lambda}_4$，使得(31)式最后一个不等式成立. 这与 $m_-<\frac{1}{N}S_\mu^{\frac{N}{2}}$ 矛盾. 同理，对 $x=0$ 的情形，(iv)可得 $m_->\frac{1}{N}S_\mu^{\frac{N}{2}}$. 因此 $\lambda_4=\min\{\tilde{\lambda}_4,\bar{\lambda}_4\}$，那么对 $\forall j\in\mathscr{J}\cup\{0\}$ 都有 $\nu_j=0$，则 $|v_n|^{2^*}\rightharpoonup|u^2|^{2^*}$，且对 $\forall\lambda\in(0,\lambda_4)$，有 $u\in\Lambda^-$.

定理 1 正解多重性的证明 令 $\lambda'=\min\{\lambda_i\}(i=2,3,4)$. 显然，对 $\forall\lambda\in(0,\lambda')$，引理 3－引理 8 都成立. 现只需要证明 $u^2>0(x\in\Omega)$. 由引理 7 和引理 8 可知：u^2 是 I_λ 在 Λ^- 中的极小解. 类似方程(1)正解存在性的证明方法，可证得：$u^2>0(x\in\Omega)$. 综上所述，取 $\lambda^*=\min\{\lambda_1,\lambda'\}$，定理 1 得证.

参考文献：

[1] KIRCHHOFF G. Mechanik [M]. Leipzig：Teuhner，1883.

[2] LIONS J L. On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics [J]. North-Holland Mathematics Studies，1978，30：284-346.

[3] CHU C M. Multiplicity of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problem Involving Critical Exponent and Sign-Changing Weight Functions [J]. Boundary Value Problems，2014，2014(1)：1-10.

[4] FAN H N. Multiple Positive Solutions for A Class of Kirchhoff Type Problems Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，431(1)：150-168.

[5] LEI C Y，LIAO J F，TANG C L. Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type of Problems with Singularity and Critical Exponents [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，421(1)：521-538.

[6] LI Q，YANG Z D，FENG Z S. Multiple Solutions of A p-Kirchhoff Equation with Singular and Critical Nonlinearities [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，84：1-14.

[7] WANG L，XIE K，ZHANG B L. Existence and Multiplicity of Solutions for Critical Kirchhoff-Type p-Laplacian Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2018，458(1)：361-378.

[8] LIAO J F，LI H Y，ZHANG P. Existence and Multiplicity of Solutions for a Nonlocal Problem with Critical Sobolev Exponent [J]. Computers and Mathematics with Applications，2018，75(3)：787-797.

[9] ANSARI H，VAEZPOUR S M，HESAARAKI M. Existence of Positive Solution for Nonlocal Singular Fourth Order Kirchhoff Equation with Hardy Potential [J]. Positivity，2017，21(4)：1545-1562.

[10] WANG X，ZHAO L，ZHAO P H. Combined Effects of Singular and Critical Nonlinearities in Elliptic Problems [J]. Nonlinear Analysis，2013，87(4)：1-10.

[11] GHOUSSOUB N，YUAN C G. Multiple Solutions for Quasi-Linear PDEs Involving the Critical Sobolev and Hardy Exponents [J]. Transactions of the American Mathematical Society，2000，352(12)：5703-5743.

[12] JANNELLI E. The Role Played by Space Dimension in Elliptic Critical Problems [J]. Journal of Differential Equations，1999，156(2)：407-426.

[13] SUN Y J，WU S P，LONG Y M. Combined Effects of Singular and Superlinear Nonlinearities in Some Singular Boundary Value Problems [J]. Journal of Differential Equations，2001，176(2)：511-531.

[14] LIONS P L，The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations [J]. Revista Matematica Iberoamericana，1985，1(1)：145-201.

Positive Solutions for Kirchhoff-Type Elliptic Boundary Value Equations with Critical Exponent and Double Singular Terms

ZHANG Qian[1,2]，　DENG Zhi-ying[1]

1. *Department of Applied Mathematics，School of Science，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，China*；

2. *Chongqing Shulian Mingxin Technology Limited Company，Chongqing 401121，China*

Abstract：This paper deals with a class of Kirchhoff-type elliptic boundary value equations involving critical exponent and double singular terms. Based upon the Lions concentration compactness principle and the Ekeland variational principle，we obtain the existence and multiplicity of positive solutions for the problem under the appropriate conditions，some recent results are generalized and significantly improved.

Key words：Kirchhoff-type equation；Sobolev critical exponent；singular terms；the concentration compactness principle；positive solution

责任编辑　廖　坤