第 45 卷　第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 2 月
Vol. 45　No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.02.004

# 高维空间中带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程的正解①

吉　蕾

晋中学院 数理学院，山西 晋中 030619

**摘要：** 在高维空间中，研究了一类带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程. 利用变分方法，当 $N=4$ 时，获得该方程的两个正解；当 $N>4$ 时，获得该方程正解的存在性. 结论补充并完善了近期相关文献的结果.

**关 键 词：** Kirchhoff 型方程；临界指数；变分法；正解

**中图分类号：** O176.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2020)02－0020－06

考虑如下一类具有临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \mu |u|^{2^*-2}u+\lambda f(x) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 4)$ 是非空有界开集，$a,b,\lambda>0$ 为参量，$f\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ 是非零非负函数.

近期，如下带临界指数的 Kirchhoff 型方程被广泛研究：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \mu |u|^{2^*-2}u+\lambda f(x)u^q & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3(N\geqslant 3)$ 是非空有界开集，$0\leqslant q<2^*-1$. 当 $N=3$，$q=0$ 时，文献[1-3] 先后利用变分法和临界点理论研究了方程(2)，其中文献[3] 完善了文献[1] 的结果，补充了文献[2] 的结果. 本文在文献[1-3] 的基础上研究方程(1) 正解的存在情况. 当 $N=4$，$1\leqslant q<3$ 时，文献[4] 获得了方程(2) 正解的存在性结果和正解存在的条件. 随后，文献[5] 在 $N\geqslant 4$，$1<q<3$ 的情况下获得了方程(2) 正解的存在性以及解的多重性，补充完善了文献[4] 中相应的结果. 文献[6] 补充了文献[4] 中 $q=1$ 的结果. 当 $N\geqslant 4$，$0<q<1$ 时，文献[7] 研究了方程(2) 正解的存在性与解的多重性. 当 $N=4$，$-1<q<0$ 时，文献[8] 研究了方程(2) 正解的存在性和多解性条件. 特别地，文献[9] 证明了文献[4] 提出的部分公开方程. 文献[10-11] 也研究了 Kirchhoff 型方程正解的存在性.

为了寻找方程(1) 的正解，定义其对应的能量泛函 $I$ 为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\mu}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x$$

其中 $\|u\|=\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 为Sobolev空间 $H_0^1(\Omega)$ 的范数，$u^\pm=\max\{\pm u, 0\}$. 显然，$I\in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$，

① 收稿日期：2019－05－04
基金项目：四川省教育厅自然科学重点资助科研项目(18ZA0471).
作者简介：吉　蕾(1982－)，女，讲师，主要从事非线性泛函分析的研究.

且 $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ 有

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = (a + b\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u, \nabla \varphi)\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}\varphi\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x)\varphi\mathrm{d}x$$

众所周知，方程(1)的解与其能量泛函 $I$ 的临界点是一一对应的．记 $|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 为空间 $L^p(\Omega)$ 的范数，且 $S$ 为最佳 Soboleve 嵌入常数，即

$$S = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \tag{3}$$

**定理 1**　假设 $a,b,\mu > 0$，$N \geqslant 4$，$f \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ 是非零非负函数，则存在 $\lambda_* > 0$，使得对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_*$，方程(1)都存在一个正局部极小解 $u_*$，满足 $I(u_*) < 0$.

**证**　根据 Hölder 不等式和(3)式，可得

$$\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x \leqslant |u|_{2^*}\,|f|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \leqslant |f|_{\frac{2^*}{2^*-1}}S^{-\frac{2}{2^*}}\|u\| \tag{4}$$

从而结合(3)式和(4)式，有

$$\begin{aligned} I(u) &\geqslant \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{2^*}S^{-\frac{2}{2^*}}\|u\|^{2^*} - \lambda|f|_{\frac{2^*}{2^*-1}}S^{-\frac{2}{2^*}}\|u\| = \\ &\|u\|\left(\frac{a}{2}\|u\| + \frac{b}{4}\|u\|^3 - \frac{\mu}{2^*}S^{-\frac{2}{2^*}}\|u\|^{2^*-1} - \lambda|f|_{\frac{2^*}{2^*-1}}S^{-\frac{2}{2^*}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

一方面，当 $N = 4$ 时，$2^* = 4$．根据(5)式，可得

$$I(u) \geqslant \|u\|\left(\frac{a}{2}\|u\| + \frac{bS^2 - \mu}{4}\|u\|^3 - \lambda|f|_{\frac{4}{3}}S^{-\frac{1}{2}}\right)$$

当 $0 < \mu \leqslant bS^2$ 时，$I$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上是强制的．从而结合(5)式，容易得证：存在正数 $R$，$\rho$，$\lambda_*$，使得对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_*$ 都有

$$I(u)\,|_{S_R} > \rho \tag{6}$$

其中 $S_R = \{u \in H_0^1(\Omega): \|u\| = R\}$．当 $\mu > bS^2$ 时，对 $\forall\, t > 0$，令

$$g(t) = \frac{a}{2}t - \frac{\mu - bS^2}{4}t^3 - \lambda|f|_{\frac{4}{3}}S^{-\frac{1}{2}}$$

容易得到 $g'(t) = \frac{a}{2} - \frac{3(\mu - bS^2)}{4}t^2$．令 $g'(t) = 0$，可得 $t_{\max} = \left[\frac{2a}{3(\mu - bS^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$，且

$$\max_{t\geqslant 0} g(t) = g(t_{\max}) = \frac{a}{3}\left[\frac{2a}{3(\mu - bS^2)}\right]^{\frac{1}{2}} - \lambda|f|_{\frac{4}{3}}S^{-\frac{1}{2}}$$

取 $R = t_{\max} > 0$，有

$$\lambda_* = \frac{aS^{\frac{1}{2}}}{3|f|_{\frac{4}{3}}}\left[\frac{2a}{3(\mu - bS^2)}\right]^{\frac{1}{2}} > 0$$

从而，结合(5)式，存在 $\rho > 0$，使得对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_*$ 都有(6)式成立.

另一方面，当 $N \geqslant 5$ 时，$2^* < 4$．故对 $\forall\, \mu > 0$，$I$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上是强制的．从而，容易得到(6)式成立.

因此，对 $\forall\, N \geqslant 4$，$\mu > 0$，存在正数 $R$，$\rho$，$\lambda_*$，使得对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_*$ 都有(6)式成立．对 $\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $u^+ \neq 0$，有 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{I(tu)}{t} = -\lambda\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x < 0$．因此，对 $\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $u^+ \neq 0$，当 $t > 0$ 充分小时有 $I(tu) < 0$．从而，$m = \inf\limits_{u\in \overline{B_R}} I(u) < 0$ 有定义．接下来，证明泛函 $I$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中能达到局部极小值 $m$，即存在 $u_* \in \overline{B_R}$ 使得 $I(u_*) = m$，其中 $\overline{B_R} = \{u \in H_0^1(\Omega)\}: \|u\| \leqslant R\}$ 为一个闭球.

根据下确界的定义，存在极小化序列 $\{u_n\} \subset \overline{B_R}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = m < 0$．从而，对 $\{u_n\}$ 的一个子列(仍记为 $\{u_n\}$)，存在一个 $u_* \in H_0^1(\Omega)$，使得当 $n \to \infty$ 时有

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_* & x \in H_0^1 \\ u_n \to u_* & x \in L^p(\Omega)(1 \leqslant p < 2^*) \\ u_n(x) \to u_*(x) & \text{a. e. } x \in \Omega \end{cases} \tag{7}$$

注意到$\overline{B_R}$是闭凸集，从而$\overline{B_R}$是弱闭的，因此 $u_* \in \overline{B_R}$. 下证 $I(u_*) = m$. 根据控制收敛定理，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)u_n^+ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)u_*^+ \mathrm{d}x \tag{8}$$

不妨假设 $w_n = u_n - u_*$，根据 $u_n \rightharpoonup u_*(x \in H_0^1(\Omega))$ 以及 Brézis-Lieb 引理，可得

$$\| u_n \|^2 = \| w_n \|^2 + \| u_* \|^2 + o(1)$$

$$\| u_n \|^4 = \| w_n \|^4 + \| u_* \|^4 + 2\| w_n \|^2 \| u_* \|^2 + o(1) \tag{9}$$

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x = \int_\Omega (w_n^+)^{2^*} \mathrm{d}x + \int_\Omega (u_*^+)^{2^*} \mathrm{d}x + o(1) \tag{10}$$

其中 $o(1)$ 是 $n \to \infty$ 时的无穷小量. 由(6)式，对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_*$ 有

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}\| u \|^2 + \dfrac{b}{4}\| u \|^4 - \dfrac{\mu}{2^*}\displaystyle\int_\Omega (u^+)^{2^*} \mathrm{d}x \geqslant 2\delta & \forall\, u \in S_R \\ \dfrac{a}{2}\| u \|^2 + \dfrac{b}{4}\| u \|^4 - \dfrac{\mu}{2^*}\displaystyle\int_\Omega (u^+)^{2^*} \mathrm{d}x \geqslant 0 & \forall\, u \in \overline{B_R} \end{cases} \tag{11}$$

由(11)式和 $m < 0$ 可知，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对 $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\| u_n \| \leqslant R - \varepsilon_0$. 从而，结合 $u_* \in \overline{B_R}$ 以及(9)式可知，当 $n$ 充分大时有 $w_n \in \overline{B_R}$. 再次用(6)式，可得

$$\frac{a}{2}\| w_n \|^2 + \frac{b}{4}\| w_n \|^4 - \frac{\mu}{2^*}| w_n^+ |_{2^*}^{2^*} \geqslant 0$$

再结合(8)－(10)式，有

$$m = I(u_n) + o(1) = I(u_*) + \frac{a}{2}\| w_n \|^2 + \frac{b}{4}\| w_n \|^4 + \frac{b}{2}\| w_n \|^2 \| u_* \|^2 - \frac{\mu}{2^*}| w_n^+ |_{2^*}^{2^*} + o(1) \geqslant$$

$$I(u_*) + \frac{b}{2}\| w_n \|^2 \| u_* \|^2 + o(1) \geqslant I(u_*) + o(1)$$

从而，当 $n \to \infty$ 时，有 $m \geqslant I(u_*)$. 又因为 $u_* \in \overline{B_R}$，从而有 $I(u_*) \geqslant m$. 因此 $I(u_*) = m$. 即 $u_*$ 是方程(1)的非零解. 从而，对 $\forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ 有

$$(a + b\| u_* \|^2)\int_\Omega (\nabla u_*, \nabla \varphi)\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega (u_*^+)^{2^*-1}\varphi \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x)\varphi \mathrm{d}x = 0$$

特别地，取 $\varphi = u_*^-$，可得

$$-(a + b\| u_*^- \|^2)\| u_*^- \|^2 - \lambda\int_\Omega f(x)u_*^- \mathrm{d}x = 0$$

从而 $u_*^- = 0$，即 $u_* \geqslant 0$ 在 $\Omega$ 中几乎处处成立. 因此，$u_*$ 是一个非零非负解. 再由强极大值原理可得，$u_*$ 是方程(1)的正解且 $I(u_*) = m < 0$. 定理1证毕.

接下来，假设 $N = 4$，$\mu > bS^2$，研究方程(1)的山路解. 首先证明泛函 $I$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足局部$(\mathrm{PS})_c$条件. 此时，$I(u) = \dfrac{a}{2}\| u \|^2 + \dfrac{b}{4}\| u \|^4 - \dfrac{\mu}{4}| u^+ |_4^4 - \lambda\displaystyle\int_\Omega f(x)u^+ \mathrm{d}x$.

**引理1**　假设 $a, b > 0$，$\mu > bS^2$，$f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$ 是一个非零非负函数，则对任意的 $c < \dfrac{a^2S^2}{4(\mu - bS^2)} - D\lambda^2$，$I$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足局部$(\mathrm{PS})_c$条件，其中 $D = \dfrac{9| f |_{\frac{4}{3}}^2}{16aS}$.

**证**　假设$\{u_n\}$使得 $I$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足局部$(\mathrm{PS})_c$条件，即当 $n \to +\infty$ 有

$$I(u_n) \to c \qquad I'(u_n) \to 0 \tag{12}$$

我们断言：$\{u_n\}$是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界序列. 事实上，根据(12)式、(3)式以及 Hölder 不等式，可得

$$1 + c + o(1)\| u_n \| \geqslant I(u_n) - \frac{1}{4}\langle I'(u_n), u_n \rangle = \frac{a}{4}\| u_n \|^2 - \frac{3\lambda}{4}\int_\Omega f(x)u_n^+ \mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{4}\| u_n \|^2 - \frac{3\lambda | f |_{\frac{4}{3}}}{4S^{\frac{1}{2}}}\| u_n \|$$

这就意味着$\{u_n\}$在$H_0^1(\Omega)$上有界. 从而存在子列，仍记为$\{u_n\}$，以及$u \in H_0^1(\Omega)$为其弱极限，记$w_n = u_n - u$. 当$n \to \infty$时，将$u_*$换成$u$，则(7)－(10)式都成立. 由(8)式和(12)式，可得

$$a\|u_n\|^2 + b\|u_n\|^4 - \mu|u_n^+|_4^4 - \lambda\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x = o(1)$$

进一步，结合(9)－(10)式，可得

$$a\|u\|^2 + a\|w_n\|^2 + b\|u\|^4 + b\|w_n\|^4 + 2b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu|w_n^+|_4^4 - \mu|u^+|_4^4 - \lambda\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x = o(1) \tag{13}$$

再次利用(12)式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n), u\rangle = a\|u\|^2 + b\|u\|^4 + bl^2\|u\|^2 - \mu|u^+|_4^4 - \lambda\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x = 0 \tag{14}$$

一方面，根据(14)式以及 Young 不等式，可得

$$I(u) = \frac{a}{4}\|u\|^2 - \frac{bl^2}{4}\|u\|^2 - \frac{3\lambda}{4}\int_\Omega f(x)u^+\mathrm{d}x \geqslant -D\lambda^2 - \frac{bl^2}{4}\|u\|^2 \tag{15}$$

另一方面，根据(13)式和(14)式，可得

$$a\|w_n\|^2 + b\|w_n\|^4 + b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu|w_n^+|_4{}^4 = o(1) \tag{16}$$

$$I(u_n) = I(u) + \frac{a}{2}\|w_n\|^2 + \frac{b}{4}\|w_n\|^4 + \frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u\|^2 - \frac{\mu}{4}|w_n^+|_4^4 + o(1) \tag{17}$$

由(3)式，可得$\int_\Omega (w_n^+)^4\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |w_n|^4\mathrm{d}x \leqslant \frac{\|w_n\|^4}{S^2}$. 从而根据(16)式，可得$al^2 + bl^4 + bl^2\|u\|^2 \leqslant \frac{\mu l^4}{S^2}$，这就意味着$l^2 \geqslant \frac{(a+b\|u\|^2)S^2}{\mu - bS^2}$. 从而，结合(16)式和(17)式，可得

$$\begin{aligned} I(u) &= \lim_{n\to\infty}\left[I(u_n) - \frac{a}{2}\|w_n\|^2 - \frac{b}{4}\|w_n\|^4 - \frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u\|^2 + \frac{\mu}{4}|w_n^+|_4^4\right] = \\ &c - \frac{a}{4}\frac{(a+b\|u\|^2)S^2}{\mu - bS^2} - \frac{bl^2}{4}\|u\|^2 \leqslant c - \frac{a^2S^2}{4(\mu - bS^2)} - \frac{bl^2}{4}\|u\|^2 < -D\lambda^2 - \frac{bl^2}{4}\|u\|^2 \end{aligned}$$

这与(15)式矛盾. 故$l \equiv 0$. 即当$n \to \infty$时，$u_n \to u\,(x \in H_0^1(\Omega))$. 即对$\forall\, c < \frac{a^2S^2}{4(\mu - bS^2)} - D\lambda^2$，$I$在$H_0^1(\Omega)$上满足局部$(\mathrm{PS})_c$条件. 引理 1 证毕.

众所周知，$U(x) = \frac{2\sqrt{2}}{1+|x|^2}\,(x \in \mathbb{R}^4)$是临界方程$-\Delta u = u^3\,(x \in \mathbb{R}^4)$的正解，且$\|U\|^2 = |U|_4^4 = S^2$. 记$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$为截断函数，使得$0 \leqslant \eta \leqslant 1$，$|\nabla\eta| \leqslant C_1$. 当$|x| \leqslant \delta$时，$\eta(x) = 1$；当$|x| \geqslant 2\delta$时，$\eta(x) = 0$. 令$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\eta(x)U(\frac{x}{\varepsilon}) = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon\eta(x)}{\varepsilon^2 + |x|^2}$. 根据文献[12]，可得

$$|u_\varepsilon|_4^2 = |U|_4^2 + O(\varepsilon^4) = S + O(\varepsilon^4) \qquad \|u_\varepsilon\|^2 = \|U\|^2 + O(\varepsilon^2) = S^2 + O(\varepsilon^2) \tag{18}$$

**引理 2**　假设$a, b > 0$，$\mu > bS^2$，$f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$是非零非负函数且满足条件(F)：

(F) 存在$\delta, \rho > 0$和$1 < \beta < 2$，使得对$\forall\ |x| < \rho$有$f(x) \geqslant \delta|x|^{-\beta}$.

则存在$\lambda^* > 0$以及$u_0 \in H_0^1(\Omega)$，使得对$\forall\, 0 < \lambda < \lambda^*$有$\sup_{t\geqslant 0} I(tu_0) < \frac{a^2S^2}{4(\mu - bS^2)} - D\lambda^2$.

**证**　对任意的$0 < \lambda < \left[\frac{a^2S^2}{4D(\mu - bS^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$，有$\frac{a^2S^2}{4(\mu - bS^2)} - D\lambda^2 > 0$. $\forall\, t \geqslant 0$，定义

$$I(tu_\varepsilon) = \frac{a}{2}t^2\|u_\varepsilon\|^2 + \frac{b}{4}t^4\|u_\varepsilon\|^4 - \frac{\mu t^4}{4}|u_\varepsilon|_4^4 - \lambda t\int_\Omega f(x)u_\varepsilon\mathrm{d}x$$

进一步，根据(18)式，可得

$$I(tu_\varepsilon) \leqslant \frac{a}{2}t^2\|u_\varepsilon\|^2 + \frac{b}{4}t^4\|u_\varepsilon\|^4 - \frac{\mu t^4}{4}|u_\varepsilon|_4^4 \leqslant aS^2t^2 - \frac{(\mu - bS^2)S^2}{8}t^4 \tag{19}$$

因此，类似于文献[3]中引理2.3的证明可得，存在 $t_\varepsilon > 0$ 使得 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon) = I(t_\varepsilon u_\varepsilon)$，且存在与 ε 无关的正常数 $t_0$ 和 $T_0$ 使得 $t_0 < t_\varepsilon < T_0$. 令

$$I_\varepsilon(t) = \frac{a}{2}t^2 \| u_\varepsilon \|^2 + \frac{b}{4}t^4 \| u_\varepsilon \|^4 - \frac{\mu t^4}{4} | u_\varepsilon |_4^4$$

则有 $I'_\varepsilon(t) = at \| u_\varepsilon \|^2 + bt^3 \| u_\varepsilon \|^4 - \mu t^3 | u_\varepsilon |_4^4$. 令 $I'_\varepsilon(t) = 0$，则

$$a \| u_\varepsilon \|^2 + bt^2 \| u_\varepsilon \|^4 - \mu t^2 | u_\varepsilon |_4^4 = 0 \tag{20}$$

可得 $T_\varepsilon^2 = \dfrac{a \| u_\varepsilon \|^2}{\mu\int_\Omega u_\varepsilon^4 \mathrm{d}x - b \| u_\varepsilon \|^4}$. 因此，对 $\forall\, 0 < t < T_\varepsilon$，$I'_\varepsilon(t) > 0$. 而当 $t > T_\varepsilon$ 时有 $I'_\varepsilon(t) < 0$，且 $I_\varepsilon(t)$ 在 $T_\varepsilon$ 处达到最大值. 从而，根据(20)式，可得

$$I_\varepsilon(t) \leqslant I_\varepsilon(T_\varepsilon) = \frac{a}{4} \| u_\varepsilon \|^2 T_\varepsilon^2 = \frac{a^2[S^2 + O(\varepsilon^2)]^2}{4[\mu(S + O(\varepsilon^4))^2 - b(S^2 + O(\varepsilon^2))^2]} = \frac{a^2 S^2}{4(\mu - bS^2)} + O(\varepsilon^2) \tag{21}$$

根据条件(F)以及 $u_\varepsilon$ 的定义，对 $\forall\, 0 < \varepsilon < \sqrt{\delta}$，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x) u_\varepsilon \mathrm{d}x \geqslant & C\int_{|x|<\delta} \frac{\varepsilon\, |x|^{-\beta}}{\varepsilon^2 + |x|^2}\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant\Delta} f(x) u_\varepsilon \mathrm{d}x \geqslant \\ & C\varepsilon\int_0^\delta \frac{r^3}{r^\beta(\varepsilon^2 + r^2)}\mathrm{d}r = C\varepsilon^{2-\beta}\int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{t^3}{t^\beta(1 + t^2)}\mathrm{d}t \geqslant \\ & C\varepsilon^{2-\beta}\left[\int_0^1 \frac{t^3}{2t^\beta}\mathrm{d}t + \int_1^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{t^3}{2t^{\beta+2}}\mathrm{d}t\right] \geqslant C\varepsilon^{2-\beta}\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $C$ 表示不同的正常数. 因此，根据(21)式和(22)式，可得

$$I(tu_\varepsilon) \leqslant I_\varepsilon(t_\varepsilon) - \lambda t_\varepsilon\int_\Omega f(x) u_\varepsilon \mathrm{d}x \leqslant I_\varepsilon(T_\varepsilon) - \lambda t_0\int_\Omega f(x) u_\varepsilon \mathrm{d}x \leqslant \frac{a^2 S^2}{4(\mu - bS^2)} + C_1\varepsilon^2 - C_2\lambda\varepsilon^{2-\beta}$$

其中 $C_1, C_2 > 0$ 为正常数. 取 $\lambda = \varepsilon$ 且 $0 < \lambda < \left(\dfrac{C_2}{C_1 + D}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$，由于 $1 < \beta < 2$，可得 $C_1\varepsilon^2 - C_2\lambda\varepsilon^{2-\beta} = \lambda^2(C_1 - C_2\lambda^{1-\beta}) < -D\lambda^2$. 取

$$\lambda^* = \min\left\{\left[\frac{a^2 S^2}{4D(\mu - bS^2)}\right]^{\frac{1}{2}},\ \left(\frac{C_2}{C_1 + D}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right\}$$

当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时，有 $I(tu_\varepsilon) < \dfrac{a^2 S^2}{4(\mu - bS^2)} - D\lambda^2$. 因此，取 $u_0 = u_\varepsilon$，当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时，有 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tu_0) < \dfrac{a^2 S^2}{4(\mu - bS^2)} - D\lambda^2$. 引理2证毕.

**定理2** 假设 $a, b > 0$，$N = 4$，$\mu > bS^2$，$f \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$ 是非零非负函数，且满足条件(F)，则存在 $\lambda_{**} > 0$ ($\lambda_{**} \leqslant \lambda_*$)，使得对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_{**}$，方程(1)还存在一个正山路解 $u_{**}$，且 $I(u_{**}) > 0$.

**证** 取 $\lambda_{**} = \min\{\lambda_*, \lambda^*\}$，则对 $\forall\, 0 < \lambda < \lambda_{**}$，定理1以及引理1、引理2均成立. 从而，根据(6)式和(19)式，容易得到泛函 $I$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足山路几何结构. 即当 $u \in S_R$ 时，有 $I(u)|_{S_R} > \rho > 0$；存在 $e \in H_0^1(\Omega)$ 使得 $\| e \| > R$ 且 $I(e) < 0$. 定义

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$$

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0, 1]} I(\gamma(t))$$

根据引理1和引理2，存在 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 使得 $I(u_n) \to c > \rho > 0$ 且 $I'(u_n) \to 0$，则序列 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在收敛子列(仍记为 $\{u_n\}$). 不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \to u_{**}$. 根据山路定理，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = I(u_{**}) = c > 0$ 且 $I'(u_{**}) = 0$. 因此 $u_{**}$ 是方程(1)的非零解. 根据 $u_*$ 的证明，同理可证，$u_{**}$ 是方程(1)的正解.

**参考文献：**

[1] BENMANSOUR S, BOUCHEKIF M. Nonhomogeneous Elliptic Problems of Kirchhoff Type Involving Critical Sobolev

Exponents [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2015, 2015(69): 1-11.

[2] 丁　瑶，廖家锋. 一类带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(12): 17-21.

[3] 吉　蕾，廖家锋. 一类带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型问题第二个正解的存在性 [J]. 数学物理学报(A 辑), 2019, 39(5): 1094-1101.

[4] NAIMEN D. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four [J]. J Differential Equations, 2014, 257(4): 1168-1193.

[5] 廖家锋，李红英. 带 Sobolev 临界指数的超线性 Kirchhoff 型方程正解的存在性与多解性 [J]. 数学物理学报(A 辑), 2017, 37(6): 1119-1124.

[6] LIAO J F, KE X F, LIU J, et al. The Brezis-Nirenberg Result for the Kirchhoff-Type Equation in Dimension Four [J]. Appl Anal, 2018, 97(15): 2720-2726.

[7] LIAO J F, LI H Y, ZHANG P. Existence and Multiplicity of Solutions for a Nonlocal Problem with Critical Sobolev Exponent [J]. Comput Math Appl, 2018, 75(3): 787-797.

[8] LIU R Q, TANG C L, LIAO J F, et al. Positive Solutions of Kirchhoff Type Problem with Singular and Critical Nonlinearities in Dimension Four [J]. Commun Pure Appl Anal, 2016, 15(5): 1841-1856.

[9] HUANG Y S, LIU Z, WU Y Z. On Kirchhoff Type Equations with Critical Sobolev Exponent [J]. J Math Anal Appl, 2018, 462(1): 483-504.

[10] 刘芮琪，吴行平，唐春雷. 高维空间中一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(4): 67-71.

[11] 唐榆婷，唐春雷. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(6): 81-86.

[12] BRÉZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(4): 437-477.

# Positive Solutions for a Class of Nonhomogeneous Kirchhoff Type Equation with Critical Exponent in High Dimension

JI　Lei

*College of Science, Jingzhong University, Jingzhong Shanxi 030619, China*

**Abstract**: A class of nonhomogeneous Kirchhoff type equations with critical exponent is considered in high dimension. By the variational method, when $N=4$, two positive solutions are obtained; while $N>4$, the existence of positive solutions is obtained. The results complete and improve some results of the correlative references.

**Key words**: Kirchhoff type equation; critical exponent; variational method; positive solution

责任编辑　廖　坤