DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.02.005

调和 Fock 空间①

陈　雪，　黄　穗

重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要：主要在解析 Fock 空间中函数的性质的基础上，讨论调和 Fock 空间中函数的性质结构. 首先计算了调和 Fock 空间的标准正交基、再生核，得到了投影算子的积分表示形式. 其次对调和 Fock 空间中的函数值进行了估计，证明了极值函数的存在性，得到了其基本性质，并且在此基础上讨论了不同调和 Fock 空间的关系.

关　键　词：调和 Fock 空间；再生核；投影算子；极值函数

中图分类号：O177.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1000-5471(2020)02-0026-05

令 $\mathbb{C}$ 表示复平面. 对于任意 $\alpha>0$，我们考虑 Gaussian 测度

$$\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)=\frac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z)$$

其中 $\mathrm{d}A(z)=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 面积测度.

设 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha(z))$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上关于 Gaussian 测度 $d\lambda_\alpha(z)$ 平方可积的 Lebesgue 可测函数全体. 经典 Fock 空间 F_α^2 是由 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha(z))$ 中的全体整函数构成的闭子空间；调和 Fock 空间 F_h^2 是由 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha(z))$ 中的全体调和函数构成的闭子空间. 因此 F_α^2 和 F_h^2 是 Hilbert 空间，其上的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(z)\overline{g}(z)\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)$$

范数定义为

$$\|f\|_{2,\alpha}^2=\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^2\mathrm{d}A(z)$$

设 $F_0^2=\{f\in F_\alpha^2: f(0)=0\}$，经典 Fock 空间 F_α^2 和调和 Fock 空间 F_h^2 有如下关系：

$$F_h^2=F_\alpha^2\oplus\overline{F_0^2}$$

即对 $\forall f\in F_h^2$，存在 $f_1\in F_\alpha^2$，$f_2\in F_0^2$，使得 $f=f_1+\overline{f_2}$.

与有界区域上经典的 Hardy 空间、Bergman 空间相比，作为定义在无界区域上的整函数空间，对 Fock 空间的研究相对要滞后一些. 为了刻画量子力学中由单粒子或多个全同粒子构成的量子态空间，文献[1]首次构造了一个无界区域上的全纯函数空间来表示 Heisenberg 群，其后称之为 Fock 空间. 文献[2-3]引入了 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 上关于 Gaussian 测度平方可积的整函数全体构成的 Hilbert 空间作为量子力学中算子的模型空间，并且证明了此空间与 Fock 空间同构，所以 Fock 空间又称为 Segal-Bargmann 空间. 在 Bargman 空间的基础上，不少学者研究讨论了调和 Bargman 空间的性质结构(如文献[4]). 近 20 年来，Fock 空间及其上的算子理论的研究吸引了越来越多学者的关注，研究成果越来越丰富. 文献[3,5-6]系统地研究了这类 Fock 空间的性质结构. 文献[7-9]将其推广成为 Fock-Sobolev 空间，并且对其性质结构进行了研究. 文献

① 收稿日期：2019-05-13

基金项目：重庆市科委面上项目(cstc2019jcyj-msxmX0295).

作者简介：陈　雪(1996-)，女，硕士研究生，主要从事函数论、算子理论的研究.

通信作者：黄　穗，教授.

[10]引入了一类由某类特殊函数所诱导的加权 Fock 型空间．文献[5]是关于 Fock 空间及其相关函数空间与算子理论的第一本专著．文献[11]对调和 Fock 空间上函数的 Berezin 变换进行了估计．

本文主要在解析 Fock 空间中函数的性质的基础上，讨论调和 Fock 空间中函数的基本性质．首先计算了调和 Fock 空间的标准正交基、再生核，得到了投影算子的积分表示形式．其次对调和 Fock 空间中的函数值进行了估计，证明了极值函数的存在性，得到了其基本性质结构，并且在此基础上讨论了不同调和 Fock 空间的关系．

调和 Fock 空间 F_h^2 是 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z))$ 的闭子空间，由其与 Fock 空间的关系，在 Fock 空间 F_α^2 的标准正交基的基础上得到 F_h^2 的标准正交基．

引理 1　对任意非负整数 n，令 $e_n(z) = \sqrt{\dfrac{\alpha^n}{n!}} z^n$，$\overline{e}_n(z) = \sqrt{\dfrac{\alpha^n}{n!}}\,\overline{z}^n$，则 $\{e_n\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\overline{e}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 F_h^2 的规范正交基．

证　$\{e_n\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\overline{e}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 显然是 F_h^2 中的规范正交集．下面证 $\{e_n\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\overline{e}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 F_h^2 上是完全的．设 $f \in F_h^2$，$\langle f, e_n\rangle = 0$，$\langle f, \overline{e_n}\rangle = 0$，因为 f 是调和函数，所以可以表示为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \overline{z}^m$$

通过直接计算得

$$\begin{aligned}\langle f, e_k\rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \overline{z}^m, e_k\right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, e_k\right\rangle + \left\langle \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \overline{z}^m, e_k\right\rangle = \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \langle z^n, e_k\rangle + 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left\langle z^n, \sqrt{\frac{\alpha^k}{k!}}\right\rangle = \\ &a_k \left\langle z^k, \sqrt{\frac{\alpha^k}{k!}}\right\rangle = 0\end{aligned}$$

故 $a_k = 0$．又因为

$$\begin{aligned}\langle f, e_k\rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \overline{z}^m, e_k\right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, e_k\right\rangle + \left\langle \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \overline{z}^m, e_k\right\rangle = \\ &0 + \left\langle \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \overline{z}^m, e_k\right\rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \left\langle \overline{z}^m, \sqrt{\frac{\alpha^k}{k!}}\right\rangle = \\ &b_k \left\langle \overline{z}^k, \sqrt{\frac{\alpha^k}{k!}}\right\rangle = 0\end{aligned}$$

故 $b_k = 0$，从而 $f = 0$．因此 $\{e_n\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\overline{e}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 F_h^2 上是完全的．证明完毕．

对固定的 $\omega \in \mathbb{C}$，由于映射 $f \longmapsto f(\omega)$ 是 F_h^2 上的有界线性泛函，所以由 Riesz 表示定理，存在唯一的函数 $H_\omega \in F_h^2$，使得对 $\forall f \in F_h^2$ 有 $f(\omega) = \langle f, H_\omega\rangle$，函数 $H(z, \omega) = H_z(\omega)$ 叫作 F_h^2 的再生核．下面通过标准正交基计算出调和 Fock 空间的再生核．

定理 1　F_h^2 的再生核为 $H_z(\omega) = \mathrm{e}^{\alpha z\overline{\omega}} + \mathrm{e}^{\alpha\overline{z}\omega} - 1$．

证　设 $f \in F_h^2$，则 $f = f_1 + \overline{f}_2$，其中 $f_1 \in F_\alpha^2$，$f_2 \in F_0^2$．由于 F_h^2 是 Hilbert 空间，故

$$\begin{aligned}H_z(\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z)\,\overline{e_n(\omega)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)}\,\overline{\overline{e_n(\omega)}} = \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z)\,\overline{e_n(\omega)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(z)}\,\overline{\overline{e_n(\omega)}} - \overline{e_0(z)}\,\overline{\overline{e_0(\omega)}} = \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n z^n \overline{\omega}^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \overline{z}^n \omega^n}{n!} - 1 = \\ &\mathrm{e}^{\alpha z\overline{\omega}} + \mathrm{e}^{\alpha\overline{z}\omega} - 1\end{aligned}$$

由于 F_h^2 是 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z))$ 的闭子空间，由 Hilbert 空间的性质结构，存在从 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z))$ 到 F_h^2 的唯一正交投影 Q_α．

推论1 投影算子 $Q_\alpha: L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha) \longrightarrow F_h^2$ 可以表示为

$$Q_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} f(\omega) \overline{H_z(\omega)} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)$$

其中 $f \in L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$.

证 设 $f \in L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$,有

$$Q_\alpha f(z) = \langle Q_\alpha f, H_z \rangle = \langle f, H_z \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(\omega) \overline{H_z(\omega)} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)$$

其中 $z \in \mathbb{C}$,这就证明了投影算子 Q_α 是以 $H_z(\omega)$ 为核的积分算子.

现在将 F_h^2 推广到 $F_h^p(1 \leqslant p < +\infty)$. 对 $\forall \alpha > 0$,$p > 0$,用 L_α^p 表示所有复平面 $\mathbb{C}$ 上满足 $f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}} \in L^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}A)$ 的 Lebesgue 可测函数全体. 对 $f \in L_\alpha^p$,定义

$$\| f \|_{p,\alpha}^p = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}} \right|^p \mathrm{d}A(z)$$

类似地,对 $\alpha > 0$,$p = +\infty$,用 L_α^∞ 来表示所有复平面 $\mathbb{C}$ 上满足

$$\| f \|_{\infty,\alpha} = \operatorname{esssup}\{ | f(z) | \mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}} : z \in \mathbb{C} \} < +\infty$$

的函数全体.

对 $\alpha > 0$,$1 \leqslant p \leqslant +\infty$,定义 F_h^p 是由所有调和函数 $f \in L_\alpha^p$ 构成的空间,称之为调和 Fock 空间. 显然 F_h^p 是 L_α^p 的闭子空间. 关于 F_h^p 的结构,有以下结果:

定理2 设 $f \in F_h^p(1 \leqslant p < +\infty)$,$f_r(z) = f(rz)$. 则:

(i) $\| f_r - f \|_{p,\alpha} \to 0$,$r \to 1^-$;

(ii) 存在调和多项式 $\{g_n\}$,使得 $\| g_n - f \|_{p,\alpha} \to 0$,$n \to +\infty$.

证 (i) 设 $f \in F_h^p$,则存在 $f_1 \in F_\alpha^p$,$f_2 \in F_0^p$,使得 $f = f_1 + \overline{f_2}$,那么 $f_r = f_{1r} + \overline{f_{2r}}$. 由解析 Fock 空间 F_α^p 的性质可得

$$\| f_{1r} - f_1 \|_{p,\alpha} \to 0 \qquad r \to 1^-$$

$$\| f_{2r} - f_2 \|_{p,\alpha} \to 0 \qquad r \to 1^-$$

因此

$$\| f_r - f \|_{p,\alpha} \to 0 \qquad r \to 1^-$$

(ii) 由于解析多项式在 Fock 空间 F_α^p 中稠密,故存在 $p_n \in F_\alpha^p$,$q_m \in F_\alpha^p$,使得

$$\| p_n - f_1 \|_{p,\alpha} \to 0 \qquad n \to +\infty$$

$$\| q_m - f_2 \|_{p,\alpha} \to 0 \qquad m \to +\infty$$

设 $g_{n,m} = p_n + \overline{q_m}$,则

$$\| g_{n,m} - f \|_{p,\alpha} \to 0 \qquad n, m \to +\infty$$

由定理2的证明,可知调和多项式在 F_h^p 中稠密.

下面将对函数值进行估计.

定理3 设 $f \in F_h^p(1 \leqslant p < +\infty)$,则 $\sup\{ | f(z) | : \| f \|_{p,\alpha} \leqslant 1 \} = \mathrm{e}^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}$.

证 由于 $f \in F_h^p$,则由 $| f |^p$ 的次调和性可得

$$| f(0) |^p \leqslant \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(\omega) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}} \right|^p \mathrm{d}A(\omega) = \| f \|_{p,\alpha}^p$$

记 $\tau_z(\omega) = z - \omega$,从而

$$| f(z) |^p = | f \circ \tau_z(0) | \leqslant \int_{\mathbb{C}} \left| f \circ \tau_z(0) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}} \right|^p \mathrm{d}A(\omega) =$$

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(z - \omega) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}} \right|^p \mathrm{d}A(\omega) =$$

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(\omega') \mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z-\omega'|^2}{2}} \right|^p \mathrm{d}A(\omega) =$$

$$\int_{\mathbb{C}} |f(\omega)|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}(|z|^2+|\omega|^2-\bar{z}\omega-z\bar{\omega})}\mathrm{d}A(\omega)=$$
$$e^{-\frac{\alpha p|z|^2}{2}}\int_{\mathbb{C}} |f(\omega)|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}(|\omega|^2-\bar{z}\omega-z\bar{\omega})}\mathrm{d}A(\omega)=$$
$$e^{-\frac{\alpha p|z|^2}{2}}\int_{\mathbb{C}} \left|f(\omega)e^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}}\right|^p e^{\frac{\alpha p}{2}(\bar{z}\omega+z\bar{\omega})}\mathrm{d}A(\omega)$$

设 $F(\omega)=f(\omega)e^{-\frac{\alpha\bar{z}\omega}{2}-\frac{\alpha\bar{\omega}z}{2}}$，则

$$\left|f(z)e^{-\alpha|z|^2}\right|^p\leqslant e^{-\frac{\alpha p|z|^2}{2}}\int_{\mathbb{C}}\left|f(\omega)e^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}}\right|^p\mathrm{d}A(\omega)$$

那么

$$|f(z)|^p\leqslant e^{\frac{\alpha p|z|^2}{2}}\int_{\mathbb{C}}\left|f(\omega)e^{-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}}\right|^p\mathrm{d}A(\omega)$$

当 $f(\omega)=e^{\alpha\bar{z}\omega-\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right)+\mathrm{i}\theta}$ 时，不等式取等号，从而有 $\sup\{|f(z)|:\|f\|_{p,\alpha}\leqslant 1\}=e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}$.

推论 2　设 $f\in F_h^p$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，则 $|f(z)|\leqslant\|f\|_{p,\alpha}e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}(\forall z\in\mathbb{C})$.

上面对单个函数值的估计是最精确的，也就是说 $e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}$ 是一个极值函数. 在此估计上定义以下函数空间：用 f_h^∞ 表示由调和函数 $f(z)$ 构成的空间，其中 $f(z)$ 满足 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)e^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}=0$. 显然，$f_h^\infty$ 是 F_h^∞ 的闭子空间. 实际上关于 $\{F_h^p\}_{p\geqslant 1}$ 有以下关系：

定理 4　设 $1\leqslant p<q<+\infty$，则 $F_h^p\subset F_h^q\subset F_h^\infty$.

证　对 $f\in F_h^p$，通过计算，得

$$\|f\|_{q,\alpha}^q=\frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^p|f(z)|^{q-p}e^{-\frac{q\alpha|z|^2}{2}}\mathrm{d}A(z)\leqslant$$
$$\frac{q\alpha}{2\pi}\|f\|_{q,\alpha}^{p-q}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z)e^{-\frac{q\alpha|z|^2}{2}}\right|\mathrm{d}A(z)=$$
$$\frac{q}{p}\|f\|_{p,\alpha}^q$$

故 $\|f\|_{q,\alpha}\leqslant\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\alpha}$，因此可得 $F_h^p\subset F_h^q$. 由推论 2 有 $|f(z)|\leqslant\|f\|_{p,\alpha}e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}$，故 $|f(z)|e^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}\leqslant\|f\|_{p,\alpha}$，因此 $\|f\|_{\infty,\alpha}\leqslant\|f\|_{p,\alpha}$，从而有 $F_h^p\subset F_h^\infty$.

实际上，我们还有以下结果：

推论 3　设 $1\leqslant p<+\infty$，则 $F_h^p\subset f_h^\infty$.

证　由于调和多项式 P 包含在 f_h^∞ 中，并且调和多项式 P 在 F_h^p 中稠密，所以 $F_h^p\subset f_h^\infty$.

由于 F_α^2 是 $L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 的闭子空间，故存在唯一的投影算子 P_α：$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)\longrightarrow F_\alpha^2$，其表示为

$$P_\alpha(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(\omega)\overline{K_z(\omega)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)$$

文献[5]已证明了解析 Fock 空间 F_α^2 上的投影 P_α 是有界的，因此，由 P_α 与 Q_α 的关系有以下结果：

定理 5　投影算子 Q_α：$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)\longrightarrow F_h^2$ 有界.

证　由于投影算子 P_α：$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\lambda_\alpha)\longrightarrow F_\alpha^2$ 有界，且

$$Q_\alpha f(z)=\langle f,H_z\rangle=\langle f,K_z+\overline{K_z}-1\rangle=$$
$$\langle f,K_z\rangle+\langle f,\overline{K_z}\rangle-\langle f,1\rangle=$$
$$(P_\alpha f)(z)+\overline{(P\bar{f})(z)}-Pf(0)$$

所以

$$\|Q_\alpha f\|\leqslant\|P_\alpha f\|+\|\overline{P_\alpha\bar{f}}\|+\|f\|\leqslant$$
$$(2\|P_\alpha\|-1)\|f\|$$

因此 Q_α 有界.

参考文献:

[1] 胡璋剑,吕小芬. Fock空间及其相关算子[J]. 中国科学(数学),2015,45(11):1759-1778.

[2] JAHN J. Harmonic Bergman Spaces and Related Problems [D]. Slezskě: MathematickÝ ústav Slezskě Univerzity, 2015.

[3] BARGMANN V. On a Hilbert Space of Analytic Function and Associated Integral Transform Part 1 [J]. Comm Pure Appl Math, 1961, 14(3): 187-214.

[4] AXLER S J, BOURDON P, RAMEY W. Harmonic Function Theory [M]. New York: Springer, 2004.

[5] ZHU K H. Analysis on Fock Spaces [M]. New York: Springer, 2010: 32-89.

[6] BAUER W, ISRALOWITZ J. Compactness Charaterization of Operators in the Toeplitz Algebra of the Fock Space F_α^p [J]. J Funct Anal, 2012, 263(5): 1323-1355.

[7] CHO H R, ZHU K H. Fock-Sobolev Spaces and Their Carleson Measures [J]. J Funct Anal, 2012, 263(8): 2483-2506.

[8] CHO H R, CHOE B R, KOO H. Fock-Sobolev Spaces of Fractional Order [J]. Potential Anal, 2015, 43(2): 199-240.

[9] CHO H R, CHOE B R, KOO H. Linear Combinations of Composition Operators on the Fock-Sobolev Spaces [J]. Potential Analysis, 2014, 41(4): 1223-1246.

[10] SCHUSTER A P, VAROLIN D. Toeplitz Operators and Carleson Measures on Generalized Bargmann-Fock Spaces [J]. Integral Equations Operator Theory, 2012, 72(3): 363-392.

[11] ENGLIŠ M. Berezin Transform on the Harmonic Fock Space [J]. J Math Anal Appl, 2010, 367(1): 75-97.

On Harmonic Fock Space

CHEN Xue, HUANG Sui

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: In this paper, the structure of harmonic Fock space has been studied on the basis of analytic Fock space. Firstly, the orthonormal basis of space has been calculated, and kernel and integration form of orthogonal projection been reproduced. Secondly, the value of functions and obtain extremal functions have been estimated. Moreover, the relations among different harmonic Fock Spaces have also been discussed.

Key words: harmonic Fock space; reproducing kernel; projection operator; the extremal functions

责任编辑 廖 坤