第 45 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 2 月
Vol. 45 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.02.022

基于函数$\frac{\sin x}{x}$的高等数学教学探索[①]

朱俊蕾[1], 郭艳凤[2]

1. 嘉兴学院 数理与信息工程学院,浙江 嘉兴 314001;2. 广西科技大学 理学院,广西 柳州 545006

摘要: 主要基于高等数学中的重要函数$\frac{\sin x}{x}$的教学作一些探讨. 该函数在整个高等数学中扮演着极其重要的角色,它与重要极限、Jordan 不等式、Dirichlet 积分等有着紧密的联系. 围绕该函数选取和设计了若干相关的教学实例,并对极限论、微分学、积分学、级数理论等模块中的重要知识点展开讨论,力争用一个函数将高等数学中的主要内容贯穿起来,展现知识体系的一脉相承性. 实际教学中可利用启发式教学、探究式教学等多种手段,并结合数学软件讲深讲透这些案例,提高学生学习的兴趣和积极主动性,增强学生的创新思维能力,从而提高高等数学教学质量.

关 键 词: 重要极限;Jordan 不等式;未定式;反常积分

中图分类号: G642.0 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)02-0143-06

在互联网+时代和创新创业教育背景下,很多普通本科院校都以应用型创新人才为培养目标,高等数学作为大学本科教育中的一门非常重要的通识课,需要寻找一系列适合应用型本科创新人才培养的教学模式,更好地为社会培养出高质量的应用型创新型人才. 关于新教育背景下该课程的教学方式、教学手段和教学内容的改革,一些学者提出了许多具有实际意义的教学探索与思考[1-5]. 本文以函数$\frac{\sin x}{x}$作为出发点,在教学素材的选取和使用上作了一些探讨与实践.

函数$\frac{\sin x}{x}$是由正弦函数 $\sin x$ 与幂函数 x 通过作商运算得到的一个初等函数,尽管它在形式上非常简单,但纵观整个高等数学的知识模块,该函数都扮演着极其重要的角色,例如:在极限论中,它作为重要极限形式之一出现在教学内容中;在微分学中,通过 Jordan 不等式紧密地联系着函数的单调性、凹凸性等知识点;在积分学中,它是初等函数范畴下求不出原函数的典型代表,也是反常积分中阐述条件收敛概念的绝好例子,同时也联系着著名的 Dirichlet 积分. 以上这些事实充分表明$\frac{\sin x}{x}$本身蕴含着许多丰富的内在信息,它可贯穿于函数、极限、微分和积分的整个教学过程,衔接着高等数学各个模块的教学内容. 为此,在少而精的原则下,笔者梳理了一些与之相关的教学例子来阐明其中所关联的知识点,展现知识体系的一脉相承性,进一步提高学生学习的兴趣和积极主动性,增强学生的创新思维能力.

1 实例分析

本节从 Jordan 不等式、未定式极限和反常积分的收敛性等方面开展基于函数$\frac{\sin x}{x}$的高等数学教学

① 收稿日期:2019-06-22
基金项目:国家自然科学基金项目(11901243);浙江省自然科学青年基金项目(LQ19A010005);广西省高等教育本科教学改革工程项目(2016JGB274).
作者简介:朱俊蕾(1983-),女,讲师,主要从事图论与组合优化的研究.

探讨.

1.1 Jordan 不等式

例 1 设 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则有 $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

凹凸性是函数的一个重要性质，其应用很广[6-7]. 例 1 直接与函数的凹凸性、单调性等知识点紧密相关，教学中可侧重向这些知识点引导.

Jordan 不等式的几何含义是：由于正弦函数 $\sin x$ 在区间 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是上凸函数，故曲线 $\sin x$ 应位于它在原点处的切线下方，同时又位于连接 $(0, 0)$ 和 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ 这两点的弦的上方，如图 1.

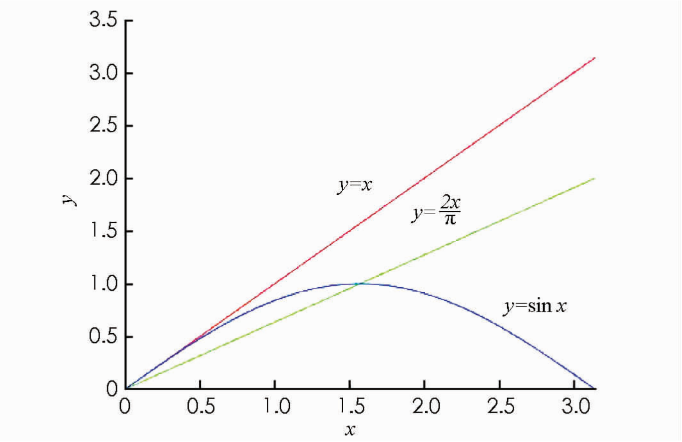

图 1 Jordan 不等式的几何意义

借助于 Jordan 不等式，可以小结不等式的证明方法. 以左边不等式 $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x$ 为例，可令

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

则有

$$f'(x) = \frac{(x - \tan x)\cos x}{x^2}$$

由此不难得到 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减(图 2)，故所需结论得证.

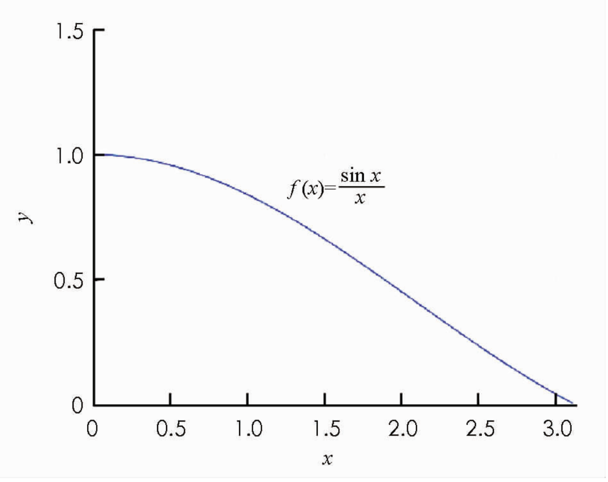

图 2 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

另外，我们亦可令

$$g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$$

利用分析函数$g(x)$的最小值来证明所需不等式. 从不同角度分析同一个问题，可较好地帮助学生巩固所学的方法.

同时根据二阶导数

$$f''(x)=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}=\frac{(2-x^2)\cos x}{x^3}\cdot\left(\tan x-\frac{2x}{2-x^2}\right)$$

还可分析函数f的拐点分布情况，这归结为讨论方程$\tan x-\frac{2x}{2-x^2}=0$的根的分布，于是又可结合零点存在定理去讨论. 这样就把前后的知识点贯穿起来，循序引导学生想象出该函数的大致图像. 最后通过 Matlab 数学软件画出$f(x)$的函数图像(图 3)，将理论分析结果通过展现的图像从几何直观上进行验证.

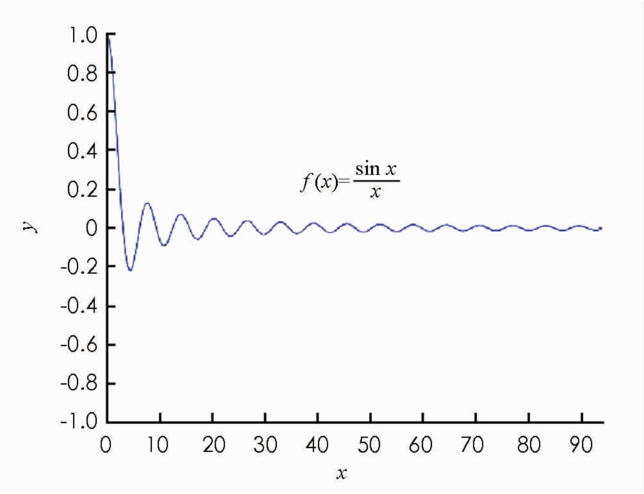

图 3　Matlab 画出的$f(x)$的函数图像

进一步，在实践中可采用启发式教学，从图 1 可以看出$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是严格大于 0 的，因此是否可以将不等式$\sin x>\frac{2}{\pi}x$改进到$\sin x>h(x)$呢?这里的函数$h(x)$为满足条件$h(0)=h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$的高次多项式，这就涉及到 Jordan 不等式的改进[8-10]，为感兴趣的同学留下了进一步探讨的空间.

1.2　未定式极限

众所周知，有重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 基于此，教学中可构造许多相关求极限的例子.

例 2　设$\alpha>0$，试分析极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^\alpha}}$.

解法 1　运用洛必达法则和等价无穷小替换原理，有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{\alpha x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{\alpha(\alpha+1)x^\alpha}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-2}}=\begin{cases}-\infty & \alpha>2\\ -\frac{1}{6} & \alpha=2\\ 0 & 0<\alpha<2\end{cases}$$

易见

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^\alpha}}==\begin{cases}0 & \alpha>2\\ e^{-\frac{1}{6}} & \alpha=2\\ 1 & 0<\alpha<2\end{cases}$$

解法2　由于

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^{\alpha+1}}}$$

利用泰勒公式，有

$$\sin x-x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\qquad x\to 0^+$$

由此不难得到解法1中的结果.

例2的极限是 1^∞ -型形式，上述结果(极限值依赖于参数 α)让学生进一步体会了未定式极限的含义，更重要的是在极限求解过程中运用了洛必达法则、等价无穷小替换、重要极限、泰勒公式等理论，可较好地对已学知识点进行巩固和理解.

下面一例是北京大学2018年硕士研究生入学考试数学分析科目中的一道题，实际教学中可以通过各种形式灵活设计成供学生练习提高的题目.

例3　试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n=+\infty$.

注意，对任意充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x=\int_0^\varepsilon\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x+\int_\varepsilon^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon+\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$$

对此固定的 ε，有 $0<\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}<1$，故可取 n 充分大，使得 $\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n<\varepsilon$，由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x=0$$

因此上述极限也是 1^∞ -型未定式.

证　要证明所需结论，等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)=+\infty$$

也等价于

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x=+\infty$$

利用 $\frac{\sin x}{x}$ 的单调递减性质，有

$$n\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\geqslant n\int_0^\delta\frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\geqslant n\delta\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)^n$$

现取 $\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$，根据例2的结果可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n^{-\frac{1}{2}})}{n^{-\frac{1}{2}}}\right)^n=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$

由此立即可证明出所需结论.

当然以上证明方法并非是唯一的，可鼓励学生积极探索其它方法.

1.3　反常积分的敛散性

例4　试分析反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

这是条件收敛的一个经典例子. 证明加绝对值发散时，利用了不等式[11-12]

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

在教学中，可结合几何图形加以讲解. 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

在区间$(n\pi, (n+1)\pi)$上，可考虑$(n\pi, 0)$，$\left(n\pi+\frac{\pi}{2}, 0\right)$和$\left(n\pi+\frac{\pi}{2}, \left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\right)$这三点围成的直角三角形面积，根据前述的几何图形，易见

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4n+2}$$

由此可得积分$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$是发散的.

为说明原积分的收敛性，除用 Dirichlet 判别法外，也可借助于图形进行讲授. 对充分大的$0<A_1<A_2$，存在正整数k, l，满足

$$k\pi \leqslant A_1<(k+1)\pi \qquad l\pi \leqslant A_2<(l+1)\pi$$

设$l>k$，且无妨设：在$(k\pi, (k+1)\pi)$上$\sin x>0$(即k为偶数)；在$(l\pi, (l+1)\pi)$上$\sin x<0$(即l为奇数). 其它情形可类似分析. 于是有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{A_1}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{l\pi}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant I_1+I_2+I_3$$

其中

$$I_1=\left|\int_{A_1}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{A_1}$$

$$I_3=\left|\int_{l\pi}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{l\pi} \leqslant \frac{2}{A_1}$$

对于I_2，通过平移变换，有

$$\begin{aligned} I_2= & \left|\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{(k+2)\pi}^{(k+3)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{(l-1)\pi}^{l\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|= \\ & \left|\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\sin x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}+\frac{1}{x+2\pi}-\cdots\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \\ & \left|\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{2}{A_1} \end{aligned}$$

联合以上估计，得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{6}{A_1}$$

再结合 Cauchy 收敛准则即可证明原反常积分收敛. 上述直接分析方式法看似繁琐，但却是一种较为直观的处理办法，学生易于接受，同时也温习了 Cauchy 收敛准则，可以更深层次理解 Dirichlet 判别法的应用价值. 得到该积分的收敛性之后，也为后续 Dirichlet 积分的计算作了铺垫.

2　结束语

本文对高等数学中的重要函数$\frac{\sin x}{x}$的教学进行了探索，通过精心选择和设计与之相关的例子，在极限论、微分学、积分学、级数理论等模块都结合该函数展开了相关知识点的探讨，由浅入深，环环相扣. 利用启发式教学、探究式教学等多种手段并结合数学软件讲深讲透，提高了学生学习的兴趣和积极主动性. 通过本文的讨论，希望可起到抛砖引玉的作用，将该类函数及其诸多变形贯穿于整个高等数学教学体系的始终，循序引导，激发学生的数学潜力，提高高等数学教学质量.

参考文献：

[1]　朱晓杰，赵玉荣. 注重应用实例提高高等数学课程的教学质量与效果 [J]. 大学数学，2007，23(3)：182-186.

[2]　陶菊春，王芬娥，曹文泉. 利用信息技术优化“高等数学”教学的探索与思考 [J]. 现代教育技术，2007，17(6)：67-70.

[3]　李　朗，石啊莲. 应用型人才培养模式下高等数学教学改革探索 [J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版)，2015，14(3)：272-274.

[4] 余达锦，杨淑玲．创新创业教育背景下高等数学教学方法研究［J］．江西财经大学学报，2013(4)：122-129.
[5] 黄玉梅．农学类《高等数学》课程教学改革探索［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(9)：143-146.
[6] 蔺友江．凸函数Steiner对称化的一个等价特征［J］．西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：122-127.
[7] 王海英，符祖峰，何 芝．α-预不变凸函数的若干性质［J］．西南大学学报(自然科学版)，2015，37(3)：99-105.
[8] 邓 康．Jordan不等式及其推广［J］．湘潭矿业学院学报，1995，10(4)：60-63.
[9] WU S H，DEBNATH L. A New Generalized and Sharp Version of Jordan's Inequality and Its Applications to the Improvements of the Yang Le Inequality，Ⅱ［J］. Appl Math Lett，2007，20(5)：532-538.
[10] ÖZBAN Y A. A New Refined Form of Jordan's Inequality and Its Applications［J］. Appl Math Lett，2006，19(2)：155-160.
[11] 欧阳光中，朱学炎，金福临，等．数学分析-下册［M］．北京：高等教育出版社，2007.
[12] 华东师范大学数学系．数学分析［M］．北京：高等教育出版社，2010.

Teaching Exploration for Advanced Mathematics Based on the Function $\frac{\sin x}{x}$

ZHU Jun-lei[1]， GUO Yan-feng[2]

1. College of Mathematics，Physics and Information Engineering，Jiaxing University，Jiaxing Zhejiang 314001，China；
2. College of Science，Guangxi University of Science and Technology，Liuzhou Guangxi 545006，China

Abstract：In this paper，an exploration has been made on the teaching methodology for advanced mathematics based on the important function $\frac{\sin x}{x}$，which plays rather important role in the calculus，as it has close connections with the important limit，Jordan's inequality and Dirichlet integral. By choosing and designing some related examples for this function，the accompanied knowledge in the limit theory，differentiation theory，integration theory and infinite series theory has been explained. The using of one function to run through the main contents in advanced mathematics reveals the coherence property of the knowledge. In real teaching activities，we can use the methods of heuristic teaching，inquiry teaching and other means as well as some mathematical software to improve the interest and activity of learning and enhance the innovative thinking ability for students，and thus to improve the teaching quality for the course of higher mathematics.

Key words：important limit；Jordan's inequality；indeterminate form；improper integral

责任编辑 廖 坤