第 45 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 3 月
Vol. 45 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.03.001

一类潜伏期和染病期均传染的SEIQR流行病模型的稳定性①

梁桂珍[1], 郝林莉[1,2]

1. 新乡学院 数学与信息科学学院,河南 新乡 453003;
2. 郑州大学 数学与统计学院,郑州 450000

摘要: 研究了一类潜伏期和染病期均传染的 SEIQR 流行病模型,定义了基本再生数 R_0. 并运用 Routh-Hurtwiz 判据、Lyapunov 函数及 LaSalle 不变集原理和第二加性复合矩阵证明了当 $R_0<1$ 时,模型存在唯一的无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$,且 $\boldsymbol{P}_0$ 全局渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,模型存在两个平衡点,无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$ 不稳定,地方病平衡点 $\boldsymbol{P}^*$ 全局渐近稳定. 最后进行了数值模拟.

关 键 词: 潜伏期;隔离;基本再生数;局部渐近稳定;全局渐近稳定

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)03-0001-09

流行病对人类的生存和社会发展构成很大威胁,是备受关注的热点问题. 利用数学模型对流行病进行理论研究可以预测流行病发展趋势并寻求控制疾病发展的最优策略,其中包括著名的SIR仓室模型[1-6]. 本文建立了一类潜伏期和染病期均传染的流行病模型,在模型中对潜伏者和染病者进行了隔离. 计算得到了疾病流行与否的阈值:当 $R_0>1$ 时疾病蔓延危害人类健康;当控制基本再生数 $R_0<1$ 时,疾病绝灭. 这为流行病的防控提供了理论依据.

1 模型的建立

本文将种群分为5个仓室,用 S,E,I,Q,R 分别表示易感者、潜伏者、染病者、隔离者、移除者的人数,建立如下数学模型:

$$\begin{cases}\dot{S}=A-\beta_1 SE-\beta_2 SI-dS\\ \dot{E}=\beta_1 SE+\beta_2 SI-(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)E\\ \dot{I}=\varepsilon E-(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)I\\ \dot{Q}=\mu_1 E+\mu_2 I-(d+\alpha+\delta_3)Q\\ \dot{R}=\delta_1 E+\delta_2 I+\delta_3 Q-dR\end{cases}\tag{1}$$

其中:A 表示种群的常数输入率;d 表示自然死亡率;$\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 分别表示潜伏者、染病者和隔离者的康复率;β_1 表示潜伏者与易感者之间的有效接触率,β_2 表示染病者与易感者之间的有效接触率;ε 表示潜伏者进入染病者的比率;α 表示潜伏者、染病者和隔离类的因病死亡率,μ_1 表示潜伏者被隔离的比率,μ_2 表示染病者被

① 收稿日期:2019-01-11
基金项目:国家自然科学基金项目(11871238);河南省科技厅科技攻关项目(132102310482);河南省高等学校重点科研项目(20B110014);新乡学院科技创新项目(12ZB17).
作者简介:梁桂珍(1964—),女,教授,主要从事生物数学研究.

隔离的比率. 从生物数学角度考虑，规定本文所有参数都是非负的.

把模型(1)中的几个方程相加可以得到$(S+E+I+Q+R)'=A-d(S+E+I+Q+R)-\alpha(E+I+Q)\leqslant A-d(S+E+I+Q+R)$ 即$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup(S+E+I+Q+R)\leqslant\dfrac{A}{d}$.

这表明对模型(1)来说，集合$\Omega=\left\{(S,E,I,Q,R)\in\mathbb{R}_+^5:S+E+I+Q+R\leqslant\dfrac{A}{d}\right\}$为模型(1)的正向不变集.

2 基本再生数的确定和平衡点的存在性

定义基本再生数[7]

$$R_0=\frac{\beta_1A(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2A\varepsilon}{d(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)}$$

定理 1 当$R_0<1$时，模型(1)仅存在无病平衡点$\boldsymbol{P}_0=\left(\dfrac{A}{d},0,0,0,0\right)$；当$R_0>1$时，模型(1)不仅存在无病平衡点$\boldsymbol{P}_0$，而且还存在唯一的地方病平衡点$\boldsymbol{P}^*=(S^*,E^*,I^*,Q^*,R^*)$.

证 显然模型(1)总有一个无病平衡点$\boldsymbol{P}_0=\left(\dfrac{A}{d},0,0,0,0\right)$. 地方病平衡点$\boldsymbol{P}^*=(S^*,E^*,I^*,Q^*,R^*)$应满足以下方程组

$$\begin{cases}A-\beta_1S^*E^*-\beta_2S^*I^*-dS^*=0\\ \beta_1S^*E^*+\beta_2S^*I^*-(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)E^*=0\\ \varepsilon E^*-(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)I^*=0\\ \mu_1E^*+\mu_2I^*-(d+\alpha+\delta_3)Q^*=0\\ \delta_1E^*+\delta_2I^*+\delta_3Q^*-dR^*=0\end{cases}\tag{2}$$

由第 3 个方程可推出

$$E^*=\frac{(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon}I^*$$

由第 4 个方程可推出

$$Q^*=\frac{(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)\mu_1+\varepsilon\mu_2}{\varepsilon(d+\alpha+\delta_3)}I^*$$

把E^*,Q^*,I^*代入第 5 个方程有

$$R^*=\left[\frac{\delta_1(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\delta_2\varepsilon}{d\varepsilon}+\frac{\mu_1\delta_3(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\delta_3\varepsilon\mu_2}{d\varepsilon(d+\alpha+\delta_3)}\right]I^*$$

第 1 个和第 2 个方程相加可得

$$A-dS^*-(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)E^*=0\tag{3}$$

把E^*代入(3)式有

$$S^*=\frac{A}{d}-\frac{(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{d\varepsilon}I^*$$

把S^*,E^*代入第一个方程计算可得

$$I^*=\frac{\beta_1A\varepsilon(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2A\varepsilon^2-\varepsilon d(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)}{(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(\beta_1\varepsilon(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2\varepsilon)}$$

易知，当$\beta_1A\varepsilon(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2A\varepsilon^2>\varepsilon d(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)$时，$I^*>0$. 即当$R_0>1$时，

$$I^*=\frac{\varepsilon d(R_0-1)}{\beta_1(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2\varepsilon}>0$$

$$S^* = \frac{A}{dR_0} > 0$$

$$E^* = \frac{(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon} I^* > 0$$

$$Q^* = \frac{(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)\mu_1+\varepsilon\mu_2}{\varepsilon(d+\alpha+\delta_3)} I^* > 0$$

$$R^* = \left[\frac{\delta_1(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\delta_2\varepsilon}{d\varepsilon} + \frac{\mu_1\delta_3(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\delta_3\varepsilon\mu_2}{d\varepsilon(d+\alpha+\delta_3)}\right] I^* > 0$$

所以模型(1) 存在唯一的地方病平衡点 $\boldsymbol{P}^* = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$，定理得证.

3　无病平衡点的稳定性

定理 2　当 $R_0 < 1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$ 局部渐近稳定；当 $R_0 > 1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$ 不稳定.

证　模型(1) 在无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0 = \left(\frac{A}{d}, 0, 0, 0, 0\right)$处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{P}_0) = \begin{bmatrix} -d & -\frac{\beta_1 A}{d} & -\frac{\beta_2 A}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1 A}{d} - (d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1) & \frac{\beta_2 A}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(d+\alpha+\delta_2+\mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & -(d+\alpha+\delta_3) & 0 \\ 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & -d \end{bmatrix}$$

显然特征根 $-d$(二重)，$-(d+\alpha+\delta_3)$ 均小于零. 另外两个特征根满足方程：

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{4}$$

其中

$$a_1 = 2d+\varepsilon+2\alpha+\delta_1+\mu_1+\delta_2+\mu_2 - \frac{\beta_1 A}{d}$$

$$a_2 = (d+\alpha+\delta_2+\mu_2)\left(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1 - \frac{\beta_1 A}{d}\right) - \frac{\beta_2 A\varepsilon}{d}$$

设其两个特征根为 λ_1, λ_2，则由韦达定理可知 λ_1, λ_2 满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\beta_1 A}{d} - 2d+\varepsilon+2\alpha+\delta_1+\mu_1+\delta_2+\mu_2$$

$$\lambda_1\lambda_2 = (d+\alpha+\delta_2+\mu_2)\left(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1 - \frac{\beta_1 A}{d}\right) - \frac{\beta_2 A\varepsilon}{d} = (d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(1-R_0)$$

由 $R_0 = \frac{\beta_1 A(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2 A\varepsilon}{d(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)}$ 容易得到：

1) 当 $R_0 < 1$ 时，有

$$\beta_1 A(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2 A\varepsilon < d(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)$$

即

$$\frac{\beta_1 A}{d} + \frac{\beta_2 A\varepsilon}{d(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)} < d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1$$

所以

$$\frac{\beta_1 A}{d} < d+\alpha+\delta_2+\mu_2+d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1$$

所以有 $\lambda_1+\lambda_2 < 0$，$\lambda_1\lambda_2 > 0$，即 $\lambda_1 < 0$，$\lambda_2 < 0$，由 Routh-Hurwitz 判据[8] 可知当 $R_0 < 1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$ 局部渐近稳定.

2) 当 $R_0>1$ 时，$\lambda_1\lambda_2<0$，方程(4) 存在一个正根，无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$ 不稳定. 定理得证.

定理 3 当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0$ 全局渐近稳定.

证 当 $R_0<1$ 时，构造 lyapunov 函数

$$V=E+\frac{d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1}{\varepsilon}I$$

则沿着模型(1) 的全导数为

$$\begin{aligned}
\dot V=&\dot E+\frac{d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1}{\varepsilon}\dot I=\\
&\beta_1SE+\beta_2SI-(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)E+\frac{d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1}{\varepsilon}(\varepsilon E-(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)I)=\\
&\beta_1SE+\beta_2SI-\frac{(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon}I=\\
&\beta_1S\frac{(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon}I-\frac{(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon}I+\beta_2SI\leqslant\\
&\frac{\beta_1A}{d\varepsilon}(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\frac{\beta_2A}{d}-\frac{(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon}=\\
&\frac{I}{d\varepsilon}[\beta_1A(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)+\beta_2A\varepsilon-d(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)]=\\
&\frac{(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)}{\varepsilon}I(R_0-1)\leqslant 0
\end{aligned}$$

当 $R_0<1$ 时，$\dot V\leqslant 0$. 又因为 $\boldsymbol{P}_0=\left(\frac{A}{d},0,0,0,0\right)$是集合$(S,E,I,Q,R)\mid \dot V=0$上的唯一平衡点，所以由 LaSalle 不变集定理[9] 可得，当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}_0=\left(\frac{A}{d},0,0,0,0\right)$是全局渐近稳定的.

4 地方病平衡点的稳定性

观察可知系统(1) 的前三个方程和后两个方程没有关系，所以先考虑如下子系统：

$$\begin{cases}\dot S=A-\beta_1SE-\beta_2SI-dS\\ \dot E=\beta_1SE+\beta_2SI-(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1)E\\ \dot I=\varepsilon E-(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)I\end{cases}\tag{5}$$

容易看出集合 $\Gamma=\left\{(S,E,I)\in\mathbb{R}_+^3:S+E+I\leqslant\frac{A}{d}\right\}$为系统(5) 的正向不变集. $\bar{\boldsymbol{P}}_0=\left(\frac{A}{d},0,0\right)$, $\bar{\boldsymbol{P}}^*=(\bar S^*,\bar E^*,\bar I^*)$分别是系统(5) 的无病平衡点和唯一的地方病平衡点，且当 $R_0>1$ 时，地方病平衡点才存在，其中

$$\bar S^*=S^*,\ \bar E^*=E^*,\ \bar I^*=I^*$$

定理 4 当 $R_0>1$ 时，系统(5) 的地方病平衡点 $\bar{\boldsymbol{P}}^*$ 是局部渐近稳定的.

证 系统(5) 在 $\bar{\boldsymbol{P}}^*$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(\bar{\boldsymbol{P}}^*)=\begin{pmatrix}-\beta_1E^*-\beta_2I^*-d & -\beta_1S^* & -\beta_2S^*\\ \beta_1E^*+\beta_2I^* & \beta_1S^*-(d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1) & \beta_2S^*\\ 0 & \varepsilon & -(d+\alpha+\delta_2+\mu_2)\end{pmatrix}$$

为方便计算令 $p=\beta_1E^*+\beta_2I^*$，$m=d+\varepsilon+\alpha+\delta_1+\mu_1$，$n=d+\alpha+\delta_2+\mu_2$，计算可得矩阵所对应的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}(\bar{\boldsymbol{P}}^*)|=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

其中

$$a_1 = m+n+p+d-\beta_1 S^*$$
$$a_2 = (m+n)(p+d)-d\beta_1 S^* + mn - n\beta_1 S^* - \beta_2 S^* \varepsilon$$
$$a_3 = mnp + mnd - nd\beta_1 S^* - \beta_2 S^* \varepsilon d$$

因为 $p = d(R_0 - 1)$，$S^* = \dfrac{A}{dR_0}$，所以

$$\begin{aligned} a_1 =& m+n+p+d-\beta_1 S^* = \\ & m+n+dR_0 - \frac{A\beta_1}{dR_0} = \\ & \frac{m(\beta_1 An + \beta_2 A\varepsilon)}{(\beta_1 An + \beta_2 A\varepsilon)} + n + \frac{\beta_1 An + \beta_2 A\varepsilon}{mn} - \frac{\beta_1 Amn}{\beta_1 An + \beta_2 A\varepsilon} = \\ & \frac{\beta_2 Am\varepsilon}{(\beta_1 An + \beta_2 A\varepsilon)} + n + \frac{\beta_1 An + \beta_2 A\varepsilon}{mn} > 0 \end{aligned}$$

因为 $S^* = \dfrac{A}{dR_0} = \dfrac{mn}{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}$，所以变形计算可得

$$-mnd + (\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon) S^* d = 0$$

所以

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 =& (m+n+p+d-\beta_1 S^*)[(m+n)(p+d) - d\beta_1 S^*] - mnp = \\ & (m+n+p+d-\beta_1 S^*)\left[(m+n)(p+d) - \frac{\beta_1 mnd}{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}\right] - mnp = \\ & \frac{1}{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}\{(m+n+p+d-\beta_1 S^*)[(m+n)(p+d)(\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon) - \beta_1 mnd] - mnp(\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon)\} = \\ & \frac{1}{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}\{(m+n+p+d-\beta_1 S^*)[(mp+np+nd)(\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon) + \beta_2 m\varepsilon d] - mnp(\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon)\} = \\ & \frac{1}{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}\{(m+p+d-\beta_1 S^*)[(mp+np+nd)(\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon) + \beta_2 m\varepsilon d] + n(np+nd)(\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon) + \beta_2 mn\varepsilon d\} \end{aligned}$$

由 $a_1 > 0$ 可知，$m+p+d-\beta_1 S^* > 0$，所以 $a_1 a_2 - a_3 > 0$. 由 Routh-Hurwitz 判据可知，当 $R_0 > 1$ 时，地方病平衡点 $\bar{\boldsymbol{P}}^*$ 是局部渐近稳定的，定理得证.

以下部分开始证 $\bar{\boldsymbol{P}}^*$ 的全局渐近稳定性.

考虑微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D \tag{6}$$

设 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ 是初始值为 $\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的方程(6)的解. 给出两个假设：

(H_1) 存在一个紧吸引子集 $K \subset D$；

(H_2) 方程(6)有唯一的平衡点 $\boldsymbol{x} \in D$.

设 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ 是一个 $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ 矩阵函数，$\boldsymbol{x} \in D$ 时，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \in C^1$. 假设 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 存在且在 $\boldsymbol{x} \in K$ 时是连续的，K 是一个紧的吸引集. 定义

$$q = \lim_{t \to +\infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{x}_0))) \mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_f \boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P} \dfrac{\partial f^{[2]}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{P}^{-1}$，矩阵 $\boldsymbol{P}_f$ 是 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ 沿着 f 方向的方向导数，$\mu(\boldsymbol{B})$ 是矩阵 Lozinskil 测度，

$$\mu(\boldsymbol{B}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\| \boldsymbol{I} + h\boldsymbol{B} \| - 1}{h}$$

引理 1[6,10]　系统(5)的无病平衡点 $\bar{\boldsymbol{P}}_0\left(\dfrac{A}{d}, 0, 0\right)$ 是系统的不变集 Γ 的边界上的唯一的 ω-极限点.

证　系统(5)的向量场横截不变集 Γ 的各个面，除了 S 轴是关于系统(5)不变的，在 S 轴上 S 满足的

方程为 $S' = A - dS$，易证 $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = \dfrac{A}{d}$，这样就证明了 $\bar{\boldsymbol{P}}_0$ 是不变集 Γ 的边界上的唯一的 ω-极限点.

引理 2[6,10] 当 $R_0 > 1$ 时，$\bar{\boldsymbol{P}}_0$ 不能成为始于不变集 Γ 内部的任何轨道的 ω-极限点.

证 构造 lyapunov 函数

$$V = \varepsilon E + (d + \varepsilon + \alpha + \delta_1 + \mu_1) I$$

则沿着系统(5)的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \beta_1 \varepsilon SE + \beta_2 \varepsilon SI - (d + \varepsilon + \alpha + \delta_1 + \mu_1)(d + \alpha + \delta_2 + \mu_2) I = \\ &\beta_1 S(d + \alpha + \delta_2 + \mu_2) I + \beta_2 \varepsilon SI - (d + \varepsilon + \alpha + \delta_1 + \mu_1)(d + \alpha + \delta_2 + \mu_2) I = \\ &I[\beta_1 (d + \alpha + \delta_2 + \mu_2) + \beta_2 \varepsilon]\left[S - \frac{(d + \varepsilon + \alpha + \delta_1 + \mu_1)(d + \alpha + \delta_2 + \mu_2)}{\beta_1 (d + \alpha + \delta_2 + \mu_2) + \beta_2 \varepsilon}\right] = \\ &I[\beta_1 (d + \alpha + \delta_2 + \mu_2) + \beta_2 \varepsilon]\left(S - \frac{A}{dR_0}\right)\end{aligned}$$

当 $R_0 > 1$ 时，$S = \dfrac{A}{d} > \dfrac{A}{dR_0}$，$\dot{V} > 0$. 即存在 $\bar{\boldsymbol{P}}_0\left(\dfrac{A}{d},\ 0,\ 0\right)$ 的一个邻域使得从该邻域出发的轨线均要跑出此邻域，引理得证.

引理 1 和引理 2 说明系统(5)是一致持续生存的，故在 Γ 内存在一个紧吸引子集 $K \subset \Gamma$. 且 $\bar{\boldsymbol{P}}^* = (\bar{S}^*,\ \bar{E}^*,\ \bar{I}^*)$ 是当 $R_0 > 1$ 时的唯一平衡点.

引理 3[11-13] 假设 D 是单连通的且满足(H_1)和(H_2)成立，如果 $q < 0$ 那么系统(5)的唯一平衡点是全局稳定的.

定理 5 当 $R_0 > 1$，且 $2A\beta_1 < d(d + \varepsilon + \alpha + \delta_1 + \mu_1)$ 时，系统(5)的地方病平衡点 $\bar{\boldsymbol{P}}^*$ 全局渐近稳定.

证 系统(5)的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -\beta_1 E - \beta_2 I - d & -\beta_1 S & -\beta_2 S \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - m & \beta_2 S \\ 0 & \varepsilon & -n \end{pmatrix}$$

其中 $m = d + \varepsilon + \alpha + \delta_1 + \mu_1$，$n = d + \alpha + \delta_2 + \mu_2$ 其对应的第二加性符合矩阵为

$$\boldsymbol{J}^{[2]} = \begin{pmatrix} \beta_1 S - \beta_1 E - \beta_2 I - (d + m) & \beta_2 S & \beta_2 S \\ \varepsilon & -\beta_1 E - \beta_2 I - (d + n) & -\beta_1 S \\ 0 & \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - (m + n) \end{pmatrix}$$

取 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(S,\ E,\ I) = \operatorname{diag}\left(1,\ \dfrac{E}{I},\ \dfrac{E}{I}\right)$，那么 $\boldsymbol{P}_f \boldsymbol{P}^{-1} = \operatorname{diag}\left\{0,\ \dfrac{E'}{E} - \dfrac{I'}{I},\ \dfrac{E'}{E} - \dfrac{I'}{I}\right\}$，矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_f \boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^{[2]}\boldsymbol{P}^{-1}$ 可以写成分块矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{11} = \beta_1 S - \beta_1 E - \beta_2 I - (d + m)$$

$$\boldsymbol{B}_{12} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_2 SI}{E} & \dfrac{\beta_2 SI}{E} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{21} = \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon E}{I} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{22} = \begin{pmatrix} \dfrac{E'}{E} - \dfrac{I'}{I} - \beta_1 E - \beta_2 I - (d + n) & -\beta_1 S \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \dfrac{E'}{E} - \dfrac{I'}{I} + \beta_1 S - (m + n) \end{pmatrix}$$

令(u, v, w)代表$R^3 \simeq R\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$中向量，其范数$\|\cdot\|$定义为$\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v|+|w|\}$. 相应于范数$\|\cdot\|$的 Lozinskil 测度是$\mu(\boldsymbol{B})$.

利用文献[14]的估值方法得$\mu(\boldsymbol{B}) \leqslant \sup\{g_1, g_2\}$，其中$g_1 = \mu_1(\boldsymbol{B}_{11}) + |\boldsymbol{B}_{12}|$，$g_2 = \mu_1(\boldsymbol{B}_{22}) + |\boldsymbol{B}_{21}|$，$|\boldsymbol{B}_{12}|$，$|\boldsymbol{B}_{21}|$是关于$\boldsymbol{l}_1$向量范数的矩阵范数，$\mu_1$是关于$\boldsymbol{l}_1$范数的 Lozinskil 测度.

$$\mu_1(\boldsymbol{B}_{11}) = \beta_1 S - \beta_1 E - \beta_2 I - (d+m),\ |\boldsymbol{B}_{12}| = \frac{\beta_2 SI}{E},\ |\boldsymbol{B}_{21}| = \frac{\varepsilon E}{I}$$

把$\boldsymbol{B}_{22}$的每一列非对角矩阵取绝对值加到相应的对角线元素上得

$$\boldsymbol{B}_{22}' = \begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (d+n) & -\beta_1 S \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + 2\beta_1 S - (m+n) \end{pmatrix}$$

取$\boldsymbol{B}_{22}'$的两个对角元素的最大值即得$\mu(\boldsymbol{B}_{22})$，则

$$\mu_1(\boldsymbol{B}_{22}) = \max\left\{\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (d+n),\ \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + 2\beta_1 S - (m+n)\right\}$$

$$g_1 = \mu_1(\boldsymbol{B}_{11}) + |\boldsymbol{B}_{12}| = \beta_1 S - \beta_1 E - \beta_2 I - (d+m) + \frac{\beta_2 SI}{E} \tag{7}$$

$$g_2 = \mu_1(\boldsymbol{B}_{22}) + |\boldsymbol{B}_{21}| = \mu_1(\boldsymbol{B}_{22}) + \frac{\varepsilon E}{I} \tag{8}$$

由系统(5)后两个方程可得

$$\begin{cases} \frac{\beta_2 SI}{E} = \frac{E'}{E} - \beta_1 S + m \\ \frac{\varepsilon E}{I} = \frac{I'}{I} + n \end{cases}$$

代入(7),(8)式可得

$$g_1 = \frac{E'}{E} - \beta_1 E - \beta_2 I - d,\ g'_2 = \frac{E'}{E} - d,\ g''_2 = \frac{E'}{E} + 2\beta_1 S - m$$

当$2A\beta_1 < md$且$R_0 > 1$时，有

$$S = \frac{A}{dR_0},\ S < \frac{A}{d},\ \frac{A}{S} > d$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{E'}{E} + \frac{S'}{S} - \frac{A}{S}\right)\mathrm{d}t \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left[\ln\frac{E(t)}{E(0)} + \ln\frac{S(t)}{S(0)}\right] - \lim_{t\to+\infty} d < 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g'_2\mathrm{d}t \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{E'}{E} - d\right)\mathrm{d}t \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{E(t)}{E(0)} - \lim_{t\to+\infty} d < 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g''_2\mathrm{d}t \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{E'}{E} + 2\beta_1 S - m\right)\mathrm{d}t \leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{E(t)}{E(0)} + \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2A\beta_1}{d} - m\right) < 0$$

$$\mu(\boldsymbol{B}) \leqslant \sup\{g_1, g'_2, g''_2\} < 0$$

可得

$$q = \lim_{t\to+\infty} \sup_{\boldsymbol{x}_0 \in K} \frac{1}{t}\int_0^t \mu(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{x}_0)))\mathrm{d}s < 0$$

由引理 3 可知，系统(5)地方病平衡点全局渐近稳定.

定理 6　当$R_0 > 1$时，地方病平衡点$\boldsymbol{P}^*(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$是全局渐近稳定的.

证　由定理(5)可知，当$t \to +\infty$时，$(S, E, I) \to (S^*, E^*, I^*)$，由模型(1)的极限系统

$$\begin{cases} Q' = \mu_1 E^* + \mu_2 I^* - (d + \alpha + \delta_3)Q \\ R' = \delta_1 E^* + \delta_2 I^* + \delta_3 Q - dR \end{cases}$$

易得，当 $t \to +\infty$ 时

$$Q(t) \to \frac{\mu_1 E^* + \mu_2 I^*}{d + \alpha + \delta_3},\ R(t) \to \frac{\delta_1 E^* + \delta_2 I^* + \delta_3 Q^*}{d}$$

所以，模型(1) 的地方病平衡点是全局渐近稳定的.

5　数值模拟

为了形象说明模型的稳定性，下面运用 Matlab 软件对模型(1) 进行数值模拟来验证所得到的结果. 选取参数 $A = 1$，$\beta_1 = 0.05$，$\beta_2 = 0.1$，$d = 0.16$，$\varepsilon = 0.2$，$\delta_1 = 0.08$，$\delta_2 = 0.09$，$\delta_3 = 0.1$，$\alpha = 0.07$，$\mu_1 = 0.4$，$\mu_2 = 0.5$，并选取一组初值(2，1.5，0.4，0.3，1).

当 $\mu_1 = 0.4$，$\mu_2 = 0.5$ 时，基本再生数 $R_0 = 0.511 < 1$. 表明无病平衡点是全局渐近稳定的，疾病将绝灭(图 1).

当 $\mu_1 = 0.12$，$\mu_2 = 0.05$ 时，基本再生数 $R_0 = 1.032 > 1$，表明地方病平衡点是全局渐近稳定的，疾病最终蔓延(图 2).

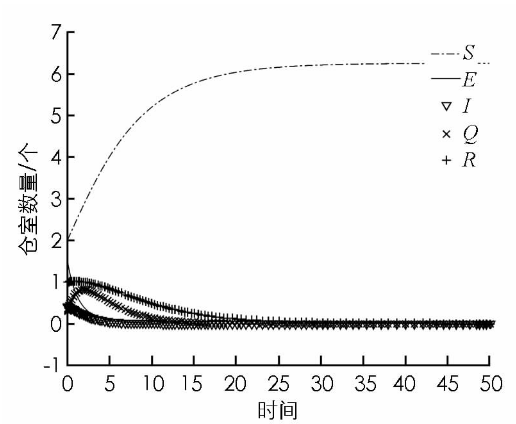

图 1　无病平衡点的全局渐近稳定性

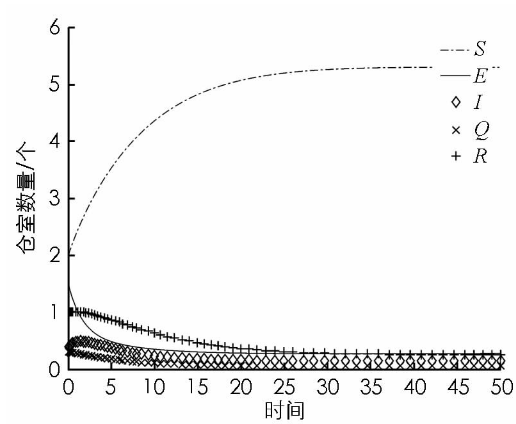

图 2　地方病平衡点的全局渐近稳定性

参考文献：

[1] 乔　杰，刘贤宁. 考虑疫苗时效及潜伏期的乙肝传染病模型分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(5)：101-106.

[2] 杜燕飞，肖　鹏，曹　慧. 具有周期发生率的 SVEIRS 传染病模型的动力学性态 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(9)：116-122.

[3] 原三领，韩丽涛，马知恩. 一类潜伏期和染病期均传染的流行病模型 [J]. 生物数学学报，2001，16(4)：392-398.

[4] 张　辉，徐文雄. 一类潜伏期和染病期均传染 SEIS 模型的渐近定性分析 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2008，36(6)：5-9.

[5] 胡新利，周义仓. 具有潜伏和隔离的传染病模型的全局稳定性 [J]. 生物数学学报，2009，24(3)：461-469.

[6] 王彩云，吉晓明，贾建文. 对潜伏期人口隔离的 SEIQR 模型的全局分析 [J]. 山西师范大学学报(自然科学版)，2015，29(4)：11-14.

[7] HUANG S Z. A New SEIR Epidemic Model with Applications to the Theory of Eradication and Control of Diseases，and to the Calculation of [J]. Mathematical Biosciences，2008，215(1)：84-104.

[8] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京：科学出版社，2001：79.

[9] 刘　薇. 具有潜伏期和隔离项的传染病模型及预防接种策略 [D]. 锦州：渤海大学，2014.

[10] 申素慧，原三领. 一类总人数变化的 SEIR 和 SEIS 组合传染病模型 [J]. 上海理工大学学报，2009，31(3)：223-227.

[11] LI M Y，MULDOWNEY J S. A Geometric Approach to the Global-Stability Problems [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，1996，27(4)：1070-1083.

[12] LI M Y. Dulac Criteria for Autonomous Systems Having an Invariant Affine Manifold [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications，1996，199(2)：374-390.

[13] LI M Y，MULDOWNEY J S. On R. A. Smith's Autonomous Convergence Theorem [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics，1995，25(1)：365-378.

[14] 芦雪娟，王伟华，堵秀凤. 具有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的研究 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2010，46(5)：6-9.

Stability of a SEIQR Epidemic Model with Infectious Incubation Period and Infectious Period

LIANG Gui-zhen[1]， HAO Lin-li[1,2]

1. Department of Mathematics and Information Science，Xinxiang University，Xinxiang Henan 453003，China；

2 . Department of Mathematics and Statistics，Zhengzhou University，Zhengzhou 450000，China

Abstract：In this paper，a SEIQR epidemic model of a class of diseases with infectious incubation period and infectious period has been studied，the basic regeneration number R_0 been defined，and the Routh-hurtwiz criterion，Lyapunov function，LaSalle invariant set principle and second additive complex matrix been used to prove that，when $R_0<1$，the model has a unique disease-free equilibrium point P_0，and P_0 is globally asymptotically stable；and when $R_0>1$，there are two equilibrium points in the model. Endemic equilibrium P^* is global asymptotic stability. And at the end of the article are numerically simulated.

Key words：incubation period；insulate；basic reproduction number；locally asymptotic stability；global asymptotic stability

责任编辑　张　构