

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.03.002

# 基于信噪比检验的病态总体最小二乘谱修正迭代法<sup>①</sup>

郭 杰, 郭淑妹, 张 宁

信息工程大学 基础部, 郑州 450001

**摘要:** 针对病态总体最小二乘谱修正迭代算法的不足, 基于复共线性综合诊断, 合理判断参数估计是否受到复共线性危害及危害程度, 然后制定精准的正则化策略, 提出了基于信噪比检验的病态总体最小二乘谱修正迭代算法, 根据信噪比检验结果确定谱修正矩阵, 根据改造的 L 曲线法确定谱修正参数. 最后通过模拟算例验证了该算法求解病态总体最小二乘问题的数值稳定性和有效性.

**关键词:** 总体最小二乘; 病态模型; 谱修正迭代; 复共线性; 信噪比

**中图分类号:** P207

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5471(2020)03-0010-06

经典最小二乘只考虑观测向量的随机误差, 假设设计矩阵没有误差或者不考虑其误差. 但是设计矩阵包含误差的情况确实存在, 此时需用到总体最小二乘算法. 总体最小二乘解的几何特性可以用统计学上的正交距离回归来解释, 应用于线性回归模型时则同时兼顾了自变量和因变量方向上的误差, 达到了整体最优<sup>[1]</sup>. 经过近二十年的发展, 总体最小二乘广泛应用于曲线拟合<sup>[2-3]</sup>、图像处理<sup>[4-5]</sup>、GPS 数据处理<sup>[6-8]</sup>等. 总体最小二乘算法主要有两大类: 一是基于奇异值分解(SVD)的方法, 二是基于拉格朗日求极值的迭代方法<sup>[9]</sup>. 而病态情形下的总体最小二乘平差的处理方法也是两大类: 一是在 Tikhonov 正则化基础上演变而来的各种正则化算法, 另一种是基于总体最小二乘奇异值分解算法的截断奇异值方法<sup>[10]</sup>. 正则化方法是通过附加条件, 补充(先验)信息来克服病态性, 使得解唯一且稳定<sup>[11]</sup>, 也即是以近似解去逼近问题的真值, 因此, 在处理的过程中破坏了法方程原有的等量关系, 进而得到的是有偏估计. 奇异值分解的基本思想是将奇异值依据大小顺序排列, 而异常小的奇异值引起解的严重失真. 截断奇异值算法则直接去掉小奇异值而得到相对稳定解, 但是截断奇异值算法中需人为给定截断参数, 没有严密的理论根据, 过于主观.

文献[12]提出的病态问题的最小二乘谱修正迭代法不仅保持了法方程的等量关系, 也不附加任何条件, 而且理论上迭代总是收敛于最优解, 因而是解决病态问题的较好算法. 文献[13-14]讨论了迭代速度与谱修正参数的关系及收敛于精确值的性质. 目前谱修正迭代算法及其改进方法在快速静态定位<sup>[15]</sup>、解高病态法方程<sup>[16]</sup>等众多方面得到应用. 文献[17]借用岭估计的思想得到了总体最小二乘谱修正迭代的改进算法, 正像岭估计一样, 谱修正参数是对所有待估参数不加区别统一进行修正, 这个过程可能会严重影响解的精确性. 为了实施更精准有效的修正方案, 必须弄清楚法方程的病态性到底危害了哪些待估参数, 而哪些是没有受到污染的, 在修正过程中要避免没有受到污染的参数, 仅仅对受到污染的且亟需改进的参数进行估计, 提高解的稳定性和有效性. 由此本文提出基于信噪比检验的病态总体最小二乘谱修正迭代算法.

## 1 总体最小二乘谱修正迭代法

考虑函数模型

① 收稿日期: 2018-08-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(41174005, 41474009).

作者简介: 郭 杰(1979—), 女, 副教授, 主要从事统计学应用及数据处理的研究.

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Delta \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{L}$  为  $n \times 1$  维观测向量,  $\mathbf{A}$  为  $n \times t$  维设计矩阵,  $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \leq t$ ,  $\mathbf{X}$  为  $t \times 1$  未知参数向量,  $n \times 1$  维向量  $\Delta$  为随机向量的观测误差. 依据最小二乘原理得到法方程为

$$\hat{\mathbf{N}}\mathbf{X} = \mathbf{W} \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{A}^T\mathbf{L}$ . (2) 式两边加上  $\hat{\mathbf{X}}$ , 利用迭代求解得<sup>[12]</sup>

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = (\mathbf{N} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{W} + \hat{\mathbf{X}}^{(k-1)}) \quad (3)$$

若记  $\mathbf{q} = (\mathbf{N} + \mathbf{E})^{-1}$ , 则(3)式转化为

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = (\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 + \cdots + \mathbf{q}^k)\mathbf{W} + \mathbf{q}^k\hat{\mathbf{X}}^{(0)} \quad (4)$$

(3), (4) 式称为谱修正迭代公式. 谱修正迭代法既改善法方程的病态性, 又不改变方程的等量关系, 而且保留了最小二乘估计无偏的优良性质.

总体最小二乘平差函数模型为

$$(\mathbf{A} + \Delta_A)\mathbf{X} = \mathbf{L} + \Delta_L \quad (5)$$

其中  $\Delta_L, \Delta_A$  分别为观测向量随机误差和系数矩阵误差. 为了便于讨论问题, 设

$$\begin{bmatrix} \Delta_L \\ \text{vec}(\Delta_A) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_L & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \Sigma_A \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right) = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_t \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (6)$$

$\text{vec}(\cdot)$  表示矩阵的拉直变换算子. 将(5)式表示为误差方程式形式

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{e} \quad (7)$$

记  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_A \mathbf{e})$ , 限制约束条件  $\|\mathbf{E}\|_F = (\text{tr}(\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E}))^{\frac{1}{2}} = \min$  等价于

$$\text{vec}(\mathbf{E}_A)^T \text{vec}(\mathbf{E}_A) + \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \min \quad (8)$$

整理得

$$\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{A}^T \mathbf{L} = \frac{(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})^T (\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}) \hat{\mathbf{X}}}{1 + \hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}}} \quad (9)$$

将(9)式两边加上  $\hat{\mathbf{X}}$  整理得

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{I}_t)^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L} + \mu \hat{\mathbf{X}}^{(k-1)}) \quad (10)$$

其中  $\mu = 1 + \frac{(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})^T (\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})}{1 + \hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}}}$ , 由此得到病态总体最小二乘的谱修正迭代法计算公式. 从(10)式可以

看出, 病态总体最小二乘的谱修正迭代解在一定程度上减少了法矩阵的条件数, 从而法方程的病态性得到相应的改善, 但是病态性仍然存在. 在此基础上文献[17]借用岭估计的思想对(10)式进行了修正, 得到了

总体最小二乘谱修正迭代的改进算法. 将(9)式两边加上  $\delta \hat{\mathbf{X}}$  整理得

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \delta \mathbf{I}_t)^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L} + \mu \hat{\mathbf{X}}^{(k-1)}) \quad (11)$$

其中:  $\mu = \delta + \frac{(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})^T (\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})}{1 + \hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}}}$ ,  $\delta$  为谱修正参数. 谱修正迭代的改进算法很大程度上减少了法矩阵的

条件数, 使得法方程的病态性得到有效改善.

## 2 基于信噪比检验的病态总体最小二乘谱修正迭代法

上述两种病态总体最小二乘谱修正迭代算法减少了法矩阵的条件数, 改善了法方程的病态性, 但是过于粗略, 降低了解的精确性. 线性模型中的病态性则表现为复共线性, 这些算法明显缺乏对复共线性危害的诊断和度量. 为了实施更精准的正则化策略, 必须理清哪些参数估计受到复共线性危害. 文献[18]通过计算如下的信噪比估计量将每个待估参数的估计效果区分开来,

$$F_k = \frac{\hat{X}_k^2 \cdot \text{Var}(\hat{X}_k)^{-1}}{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} \cdot [(n-t)\sigma_0^2]^{-1}} \quad (12)$$

其中:  $\hat{X}_k$  为第  $k$  个参数的 LS 估计,  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{L} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$  为残差向量. 文献[18] 给出检验法则为: 当  $F_k \leq F_{1, n-r, \chi_1^2(\gamma)}(\alpha)$  时, 复共线性对相应参数估计  $\hat{X}_k$  的危害比较严重, 其估计效果不好; 当  $F_k > F_{1, n-r, \chi_1^2(\gamma)}(\alpha)$  时, 复共线性对相应参数估计  $\hat{X}_k$  的危害比较小, 其估计效果较好( $\alpha$  为显著性水平,  $F_{1, n-r, \chi_1^2(\gamma)}(\alpha)$  是非中心  $F$  分布  $F_{1, n-r, \chi_1^2(\gamma)}$  的上侧  $\alpha$  分位点).

由此对(9)式两边加上  $\sigma\mathbf{R}\hat{\mathbf{X}}$  整理得

$$\hat{\mathbf{X}}^{(k)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \sigma\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L} + \mu\hat{\mathbf{X}}^{(k-1)} + \sigma\mathbf{R}\hat{\mathbf{X}}^{(k-1)}) \quad (13)$$

其中:  $\mu = \frac{(\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})^T (\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L})}{1 + \hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}}}$ ,  $\sigma$  为谱修正参数,  $\mathbf{R}$  为谱修正矩阵. 根据信噪比检验, 谱修正矩阵  $\mathbf{R} =$

$\begin{bmatrix} \mathbf{o}_{t_1} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{I}_{t-t_1} \end{bmatrix}$  位于法矩阵中亟待修正的部位, 修正达到什么程度取决于谱修正参数  $\sigma$ . (13) 式称为基于信噪

比检验的病态总体最小二乘谱修正迭代法, 该方法针对设计阵的部分数据列的复共线性关系构建了精准有效的修正策略, 从而有节制地减少法矩阵的条件数, 最大程度上改善法方程的病态性.

基于信噪比检验的病态总体最小二乘谱修正迭代法的算法步骤如下:

- 1) 选取适当的参数初始迭代值  $\hat{\mathbf{X}}^{(0)}$ ;
- 2) 计算  $\mathbf{M} \triangleq \frac{(\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}^{(i)} - \mathbf{L})^T (\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}^{(i)} - \mathbf{L})}{1 + \hat{\mathbf{X}}^{(i)T} \hat{\mathbf{X}}^{(i)}} \hat{\mathbf{X}}^{(i)} + \sigma\mathbf{R}\hat{\mathbf{X}}^{(i)}$ ;
- 3) 计算  $\hat{\mathbf{X}}^{(i+1)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \sigma\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L} + \mathbf{M})$ ;
- 4) 重复 2), 3) 两个过程, 当  $\|\hat{\mathbf{X}}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{X}}^{(i)}\| < \epsilon$  时, 迭代停止,  $\epsilon$  为给定的较小阈值.

### 3 数值模拟分析

**算例 1** 考虑模拟空间测边网<sup>[19]</sup>,  $P_1, \dots, P_{10}$  为 10 个已知点, 而且知道 10 个已知点到 3 个未知点  $P_{11}, P_{12}, P_{13}$  (假设模拟值分别为  $(0, 0, 0), (68, -26, 9), (14, 41, -11)$ ) 的观测距离及 3 个未知点之间的观测距离. 要求根据 33 个观测距离确定 3 个未知点的 9 个坐标, 其中观测量为等精度, 中误差为  $\pm 0.01$  m. 令设计阵  $\mathbf{A}$  和观测量  $\mathbf{L}$  模拟均值都为零, 单位权方差分别为 0.001, 0.01, 满足正态分布的偶然误差. 若计算中 3 个坐标近似值分别取为  $P_{11}(-0.01, 0.02, 0.00)$ ,  $P_{12}(68.01, -25.98, 8.98)$ ,  $P_{13}(14.02, 41.02, -10.98)$ , 则法矩阵的奇异值为 11.264 8, 8.830 0, 7.997 5, 3.932 4, 2.677 3, 1.243 6, 0.045 6, 0.003 7, 0.000 5, 其法矩阵的条件数约为  $2.4 \times 10^4$ , 病态性严重. 通过计算 LS 估计的信噪比估值, 根据文献[18] 中的做法取阈值  $d = 121.34$ , 显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 临界值  $c = F_{1, 24, 121.34}(0.05) = 71.88$ , 结果如表 1 所示, 其中 3 个 LS 估计的分量所对应的信噪比估值(0, 26, 65) 较小, 而有 6 个 LS 估计的分量所对应的信噪比估值较大, 超过临界值. 说明有 6 个参数的估计效果较好, 3 个参数的估计效果不好. 谱修正矩阵  $\mathbf{R} =$

$\begin{bmatrix} \mathbf{o}_6 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$ ,  $L$  曲线法的谱修正参数  $\sigma = 1.95$ . 对未知点的坐标估值结果见表 2, 其中: 方法 1 为总体最小二

乘解法; 方法 2 为总体最小二乘谱修正迭代解法; 方法 3 为总体最小二乘谱修正迭代改进解法; 方法 4 为基于信噪比检验的总体最小二乘谱修正迭代解法. 从表 2 看出, 基于信噪比检验的总体最小二乘谱修正迭代解法的相对误差最小, 效果最好.

表 1 LS 估计及信噪比估值

参数	$x_{11}$	$y_{11}$	$z_{11}$	$x_{12}$	$y_{12}$	$z_{12}$	$x_{13}$	$y_{13}$	$z_{13}$
真值	0	0	0	68	-26	9	14	41	-11
信噪比估值	65	144	4 649	26	114	51 262	0	1 678	504

表 2 未知点的坐标估值

方案	$x_{11}$	$y_{11}$	$z_{11}$	$x_{12}$	$y_{12}$	$z_{12}$	$x_{13}$	$y_{13}$	$z_{13}$	相对误差
真值	0	0	0	68	-26	9	14	41	-11	
LS 估值	-0.033 2	0.064 8	0.799 8	67.982 8	-26.007 4	9.258 4	14.026 6	41.198 9	-10.340 2	1.145 2
方法 1	-0.030 5	0.066 8	0.806 2	67.970 8	-26.046 1	9.119 0	14.022 7	41.122 3	-10.593 3	1.053 2
方法 2	-0.006	0.128 5	0.488	68.060	-25.830 6	9.113	14.012	41.611	-9.034 0	1.959 5
方法 3	-0.003 7	0.135 9	0.949 0	68.053 3	-25.669 9	9.773 6	13.996 9	41.032 3	-10.874 9	1.058 6
方法 4	-0.001 8	0.103 5	0.642 3	68.032 1	-25.456 8	9.071	14.003 7	41.023 3	-10.889 5	0.929 9

例 2 卫星导航定位、信号图像处理等问题模型为如下第一类 Fredholm 积分方程<sup>[20]</sup>

$$z(y) = \int_a^b K(x, y)f(x)dx$$

核函数为  $K(x, y) = e^{xy}$ ,  $f(x)$  的精确解函数为  $f(x) = e^x$ , 在区间  $[0, 2.5]$  内的形状如图 1 所示. 采用数值解法离散核函数算子, 得到线性方程组  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}$  的元素为  $a_{ij} = e^{x_i y_j}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  分别是在  $x \in [0, 1]$  区间内采用间隔为 0.02 的  $f(x_i), z(y_j)$ . 采样点数  $i = 201, j = 101$ . 构造  $201 \times 51$  的矩阵  $\mathbf{A}_1$ , 条件数为  $6.11 \times 10^2$ ,  $\mathbf{A}_1$  为病态矩阵; 构造  $201 \times 50$  的随机矩阵  $\mathbf{A}_2$  的元素, 条件数为 2.34,  $\mathbf{A}_2$  为非病态矩阵. 对设计阵与  $z(y_j)$  分别模拟零均值, 单位权方差为 0.001, 满足正态分布的偶然误差, 得到总体最小二乘平差模型. 5 种解的精度比较见表 3, 其中: 方法 1 为最小二乘解法; 方法 2 为总体最小二乘解法; 方法 3 为总体最小二乘谱修正迭代解法; 方法 4 为总体最小二乘谱修正迭代改进解法; 方法 5 为基于信噪比检验的总体最小二乘谱修正迭代解法. 利用以上 5 种解法求解离散化的函数  $f(x_i)$ , 计算结果如图 2-6 所示.

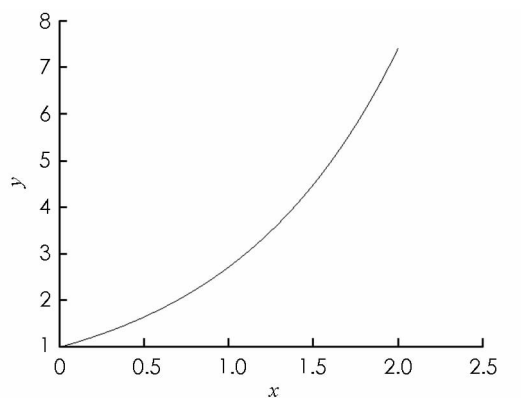


图 1 函数  $f(x)$

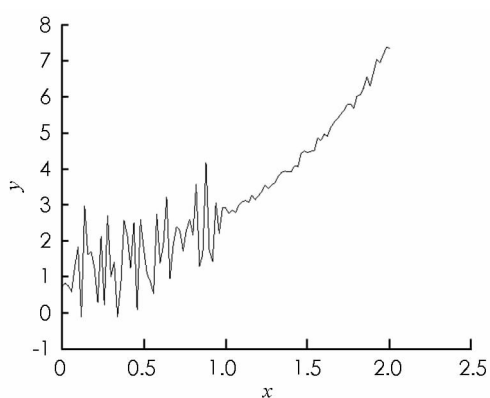


图 2 最小二乘解

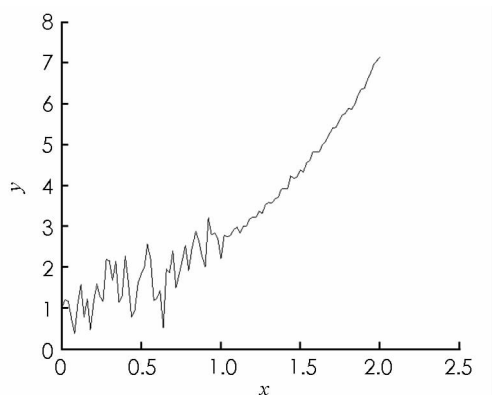


图 3 总体最小二乘解

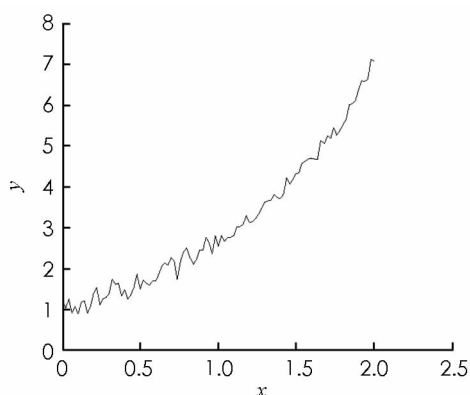


图 4 总体最小二乘谱修正解

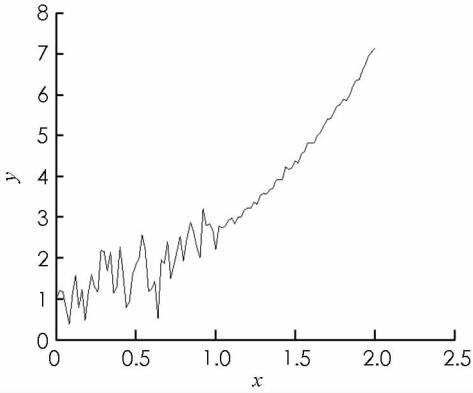


图 5 总体最小二乘谱修正改进解

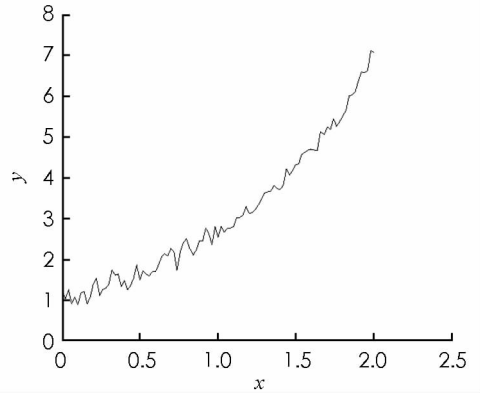
图 6 基于信噪比检验的  
总体最小二乘谱修正迭代解

表 3 5 种解的精度比较

方法	解的精度	矩阵 $A_1$ 对应参数的精度	矩阵 $A_2$ 对应参数的精度
方法 1	0.975 4	2.390 2	0.231
方法 2	0.135 1	0.390 3	0.202
方法 3	0.133 3	0.302 1	0.251
方法 4	0.125 4	0.295 2	0.230
方法 5	0.123 0	0.240 3	0.212

对于病态积分方程,最小二乘和总体最小二乘的计算效果都不理想,通过谱修正迭代之后得到的函数解有所改善,相比较而言基于信噪比检验的总体最小二乘谱修正迭代算法的效果最好,得到的函数图形和真值最接近.另外,由表 3 可以看出,基于复共线性诊断的谱修正迭代法仅仅是对受到复共线性危害的参数起作用,而对没受到危害的参数尽量减少修正过程对其产生的负面影响,相应的谱修正方案精准而有效.

## 4 结 语

分析算例 1 中的表 1、表 2 和算例 2 中的表 3、图 2-6 可以得出如下结论:

- 1) 法矩阵病态时,最小二乘解和总体最小二乘解严重偏离函数真值,谱修正迭代算法对函数估值有所改善,而基于信噪比检验的总体最小二乘谱修正解效果最优.
- 2) 法矩阵严重病态时,最小二乘解和总体最小二乘解很不稳定,一般谱修正迭代算法也没有很好提高数值稳定性,而是更具针对性的修正策略方法达到误差最小.
- 3) 法矩阵严重病态时,基于复共线性诊断的谱修正迭代法所得估值的相对误差最小,说明估计效果较好,有效地减少了法矩阵的条件数,很好消除了法矩阵病态性的危害,提高了参数估值的有效性和稳定性.
- 4) 在实施谱修正迭代的过程中要避开没有受到复共线性危害的参数,正常求解算法已经很好,不需要干扰这些参数求解过程.

## 参考文献:

- [1] 丁克良. 整体最小二乘理论及其在测绘数据处理中的若干应用研究 [D]. 武汉: 中科院测量与地球物理研究所, 2006.
- [2] DAVIS T G. Total Least Squares Curve Fitting [D]. Tampa: University of South Florida, 1998.
- [3] FELUS Y A. Application of Total Least Squares for Spatial Point Process Analysis [J]. Journal of Surveying Engineering, 2004, 130(3): 126-133.
- [4] HIRAKAWA K, PARKS T W. Image Denoising Using Total Least Squares [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(9): 2730-2742.
- [5] JAEHOONK. High Resolution Image Reconstruction from Multiple Degraded Image [D]. Pennsylvania: the Pennsylvania State University, 2003.

- [6] 杨旭海,卢晓春,胡永辉,等. GPS 共视接收机短期观测资料处理算法研究 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(3): 205-209.
- [7] JEON C W, JEE G I, LACHAPELLE G. Development of a Sequential Algorithm for GNSS- Based Multi-Sensor Vehicle Navigation System [J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2004, 2(2): 165-170.
- [8] JUANG J C. On GPS Positioning and Integrity Monitoring [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2000, 36(1): 327-336.
- [9] 刘经南,曾文宪,徐培亮. 整体最小二乘估计的研究进展 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(5): 505-512.
- [10] 鲁铁定. 总体最小二乘平差理论及其在测绘数据处理中的应用 [D]. 武汉: 武汉大学, 2010.
- [11] 王振杰. 测量中不适定问题的正则化解法 [M]. 北京: 科学出版社, 2006: 70-71.
- [12] 王新洲,刘丁酉,张前勇,等. 谱修正迭代法及其在测量数据处理中的应用 [J]. 黑龙江工程学院学报, 2001, 15(2): 3-6.
- [13] 黄德伦,史经俭,廉琦,等. 基于法方程病态的谱修正迭代算法的探讨 [J]. 测绘科学, 2013, 38(2): 35-37.
- [14] 潘朝毅. 谱修正迭代法的收敛分析及其改进 [J]. 四川教育学院学报, 2009, 25(5): 112-113.
- [15] 邱蕾. 谱修正迭代法在快速静态定位中的应用 [J]. 地理空间信息, 2005, 3(6): 41-42, 45.
- [16] 邓兴升,孙虹虹. 自适应谱修正 LU 分解法解算高病态法方程 [J]. 大地测量与地球动力学, 2014, 34(6): 135-139.
- [17] 于冬冬,王乐洋. 病态总体最小二乘问题的谱修正迭代法 [J]. 大地测量与地球动力学, 2015, 35(4): 702-706
- [18] 顾勇为,归庆明,张磊. 基于复共线性诊断的正则化方法 [J]. 信息工程大学学报, 2007, 8(4): 497-500.
- [19] 崔希璋,於宗俦,陶本藻. 广义测量平差 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.
- [20] 李功胜,于杰. 一种新的求解第一类 Fredholma 积分方程正则化的数值分析 [J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2003, 17(2): 5-8.

## Iteration Method of Correcting Characteristic Value to Ill-Posed Total Least Squares Based on Signal-to-Noise Ratio

GUO Jie, GUO Shu-mei, ZHANG Ning

*Institute of Science, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China*

**Abstract:** In this paper, the iteration method of correcting characteristic value and its improved algorithm have been analyzed in the detail, combined with its feature and shortcomings. Then the iteration method by correcting characteristic values to ill-posed total least squares based on signal-to-noise ratio been proposed. At last, some simulated examples been investigated to verify the numerical stability and effectiveness of parameter estimation of the proposed method.

**Key words:** total least squares; ill-posed model; iteration method of correcting characteristic value; multicollinearity; signal-to-noise ratio

责任编辑 张 枸