第 45 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 3 月
Vol. 45 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.03.003

具有分数阶扩散的捕食-食饵模型的共存性[①]

柳文清, 陈清婉, 傅金波

闽南科技学院,福建 泉州 362300

摘要: 研究了一类分数阶扩散且具有 B-D 反应函数的捕食-食饵模型,通过构造 Lyapunov 函数,证明了平衡点的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性;利用 Leray-Schauder 拓扑度方法,证明了满足一定条件时,非常数正平衡解存在.

关 键 词: B-D 反应函数;分数阶扩散;共存解

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)03-0016-05

在种群动力学中,一般用算子 Δ 来表示种群从高密度处向低密度处扩散,这种扩散称之为正常的扩散,具有连续性,对于此类问题的研究已有丰富的成果[1-6]. 包括研究解的稳定性[1-2]、共存解问题[3-4]、行波解[5-6]等等. 近来,有研究表明一些种群在空间扩散上有某种跳跃性[7-8],可以用算子 $(-\Delta)^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$ 近似表示,为此考虑如下分数阶扩散捕食-食饵模型

$$\begin{cases} u_t+(-\Delta)^{\alpha}u=u\left(-e+\dfrac{\beta v}{1+au+bv}\right) & (x,t)\in\Omega\times(0,T)\\ v_t+(-\Delta)^{\alpha}v=v\left(r-\dfrac{r}{k}v-\dfrac{u}{1+au+bv}\right) & (x,t)\in\Omega\times(0,T)\\ \partial_n u=\partial_n v=0 & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)\\ u(x,0)=u_0(x)>0,\ v(x,0)=v_0(x)>0 & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中:u,v 分别表示捕食者和食饵在 (x,t) 处的密度,边界条件表示系统是封闭的;r 表示食饵内禀增长率;e,β 分别表示捕食者死亡率和食饵被捕食后转化为食物的转化率. 捕食关系利用 B-D 反应函数 $\dfrac{uv}{1+au+bv}$ 来表示,模型中的参数均为正常数.

算子 $(-\Delta)^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$ 的特征问题为

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha}\phi_k=u_k^{\alpha}\phi_k & x\in\Omega\\ \dfrac{\partial\phi_k}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

$(-\Delta)^{\alpha}$ 定义域:

$$D[(-\Delta)^{\alpha}]=\left\{w\in L^2(\Omega):\ \|(-\Delta)^{\alpha}w\|^2_{L^2(\Omega)}=\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k^{\alpha}\langle w,\phi_k\rangle^2|<\infty,\ \frac{\partial w}{\partial n}=0\right\}$$

这里 μ_k^{α} 所对应的特征函数为 ϕ_k,并且 $0=\mu_1^{\alpha}<\mu_2^{\alpha}<\cdots<\mu_k^{\alpha}\to+\infty$.

由文献[9]可知,算子 $(-\Delta)^{\alpha}u$ 可定义为

---

① 收稿日期:2018-07-02

基金项目:福建省中青年教师教育科研项目(JAT191035,JAT191044);泉州科技高层次人才创新创业项目(2018C094R);福建省高校“新世纪优秀人才支持计划”(2018).

作者简介:柳文清(1984-),男,讲师,主要从事偏微分方程研究.

$$(-\Delta)^{\alpha}u:=p\cdot v\cdot\int_{\Omega}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}y,\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^{N}$$

并且有如下计算结果[10]

$$\int_{\Omega}v(x)(-\Delta)^{\alpha}u(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)\mathrm{d}x$$

通过简单计算，系统存在唯一边界平衡点：$\boldsymbol{E}^{0}=(k,0)$，并且当满足条件

$$k>v^{*}\tag{H$_1$}$$

存在唯一的非常数正平衡点 $\boldsymbol{E}^{*}=(u^{*},v^{*})$，其中

$$\frac{1}{k}v^{*}=\frac{ar\beta+be-\beta+\sqrt{(\beta-be-ar\beta)^{2}+4a^{2}e\beta r}}{2a\beta r},\ u^{*}=\left(r-\frac{r}{k}v^{*}\right)\frac{\beta v^{*}}{e}$$

1　平衡点的稳定性

定义基本再生数 $R=\frac{r\beta}{kbe}$，易得 $R>1$ 时，$\frac{r}{k}>\frac{bv^{*}}{1+au^{*}+bv^{*}}$.

定理 1　当 $R>1$ 时，平衡点 $\boldsymbol{E}^{*}$ 是局部渐近稳定的.

证　系统(1) 在平衡点 $\boldsymbol{E}^{*}$ 处的线性化系统为

$$\boldsymbol{W}_{t}=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{F}_{W}(\boldsymbol{E}^{*}))\boldsymbol{W}\tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{W}=(u,v)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}=\left(u\left(-e+\frac{\beta v}{1+au+bv}\right),\ v\left(r-\frac{r}{k}v-\frac{u}{1+au+bv}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{F}_{W}(\boldsymbol{E}^{*})=\begin{bmatrix}-\frac{\beta au^{*}v^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}} & \frac{\beta u^{*}(1+au^{*})}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}\\ -\frac{v^{*}(1+bv^{*})}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}} & -\frac{r}{k}v^{*}+\frac{bu^{*}v^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-(-\Delta)^{\alpha} & 0\\ 0 & -(-\Delta)^{\alpha}\end{bmatrix}$$

系统(2) 所对应的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}+\mu_{k}^{\alpha}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_{w}(\boldsymbol{E}^{*}))=\lambda^{2}+B_{1}\lambda+B_{2}$$

其中：

$$B_{1}=2\mu_{k}^{\alpha}+\frac{\beta au^{*}v^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}+\frac{r}{k}v^{*}-\frac{bu^{*}v^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}$$

$$B_{2}=\left(\mu_{k}^{\alpha}+\frac{\beta au^{*}v^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}\right)\left(\mu_{k}^{\alpha}+\frac{r}{k}v^{*}-\frac{bu^{*}v^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}\right)+\frac{\beta u^{*}v^{*}(1+au^{*})(1+bv^{*})}{(1+au^{*}+bv^{*})^{4}}$$

由定理条件易知 $\frac{r}{k}>\frac{bu^{*}}{(1+au^{*}+bv^{*})^{2}}$，则 $B_{1}>0$，$B_{2}>0$，这说明特征方程的根均有负实部，所以平衡点 $\boldsymbol{E}^{*}$ 是局部渐近稳定的.

定理 2　当 $R>1$ 时，平衡点 $\boldsymbol{E}^{*}$ 是全局渐近稳定的.

证　定义 Lyapunov 函数

$$V(t)=\int_{\Omega}\left[h\left(u-u^{*}-u^{*}\ln\frac{u}{u^{*}}\right)+\left(v-v^{*}-v^{*}\ln\frac{v}{v^{*}}\right)\right]\mathrm{d}x$$

其中 $h=\frac{1+bv^{*}}{\beta+\beta au^{*}}$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=&E_{1}(t)+\int_{\Omega}h(u-u^{*})\left(\frac{\beta v}{1+au+bv}-\frac{\beta v^{*}}{1+au^{*}+bv^{*}}\right)\mathrm{d}x+\\&\int_{\Omega}(v-v^{*})\left(\frac{r}{k}v^{*}-\frac{r}{k}v+\frac{u^{*}}{1+au^{*}+bv^{*}}-\frac{u}{1+au+bv}\right)\mathrm{d}x=\\&E_{1}(t)+\int_{\Omega}\frac{(u-u^{*})(v-v^{*})}{(1+au+bv)(1+au^{*}+bv^{*})}(h\beta+h\beta au^{*}-1-bv^{*})-\\&h\beta av^{*}\int_{\Omega}\frac{(u-u^{*})^{2}}{(1+au+bv)(1+au^{*}+bv^{*})}\mathrm{d}x+\end{aligned}$$

$$\int_\Omega (v-v^*)^2\left(\frac{bu^*}{(1+au+bv)(1+au^*+bv^*)}-\frac{r}{k}\right)\mathrm{d}x \leqslant E_1(t)$$

这里

$$\begin{aligned}E_1(t)=&-\int_\Omega\left(1-\frac{u}{u^*}\right)(-\Delta)^\alpha u\,\mathrm{d}x-h\int_\Omega\left(1-\frac{v^*}{v}\right)(-\Delta)^\alpha v\,\mathrm{d}x=\\&-\int_\Omega(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{u}{u^*}\right)(-\Delta)^\alpha u\,\mathrm{d}xh-\int_\Omega(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{v^*}{v}\right)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v\,\mathrm{d}x=\\&-u^*\int_\Omega\left(p\cdot v\cdot\int_\Omega\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)\times\left(p\cdot v\cdot\int_\Omega\frac{u(x)-u(y)}{u(x)u(y)\,|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\\&hv^*\int_\Omega\left(p\cdot v\cdot\int_\Omega\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)\times\left(p\cdot v\cdot\int_\Omega\frac{v(x)-v(y)}{v(x)v(y)\,|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant 0\end{aligned}$$

当$\frac{r}{k}>\frac{bu^*}{1+au^*+bv^*}$时，$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，故平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

2 非常数正平衡解的存在性

考虑系统(1) 所对应的椭圆方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^\alpha u=u-e+\frac{\beta v}{1+au+bv}) & x\in\Omega\\(-\Delta)^\alpha v=v\left(r-\frac{r}{k}v-\frac{u}{1+au+bv}\right) & x\in\Omega\\\partial_n u=\partial_n v=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$

引理 1 存在常数 $\underline{C}$，$\overline{C}$，使系统(2) 任一非负解(u,v) 满足

$$\underline{C}\leqslant u,\ v\leqslant\overline{C}$$

证 根据比较原理[11]，由方程组(3) 中第二个方程容易得到，$\max_\Omega v(x)\leqslant k$. 再将方程组(3) 中两个方程相加，同样利用比较原理可得，$\max_\Omega u(x)\leqslant\beta k\left(1+\frac{r}{e}\right)$. 取$\overline{C}=\max\left\{k,\ \beta k\left(1+\frac{r}{e}\right)\right\}$即可证明$u$,$v$的上界.

下面证明 u,v 的下界，将系统(3) 中的第一个方程两端同乘以 u 并在Ω 上积分，注意到

$$\int_\Omega u(-\Delta)^\alpha u\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$$

则有

$$\int_\Omega u^2\left(-e+\frac{\beta v}{1+au+bv}\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

由积分中值定理可知，存在 $x_0\in\Omega$，使$\frac{\beta v(x_0)}{1+au(x_0)+bv(x_0)}\geqslant e$，从而 $v(x_0)\geqslant\frac{e}{\beta}$. 再由 Hanack 不等式[11]可得

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}v(x)\geqslant A_1\min_{x\in\bar{\Omega}}v(x)$$

故

$$\min_{x\in\bar{\Omega}}v(x)\geqslant\frac{1}{A_1}\max_{x\in\bar{\Omega}}v(x)\geqslant\frac{1}{A_1}v(x_0)\geqslant\frac{e}{A_1\beta}$$

下面利用反证法证明 u 的下界. 假设存在序列 $\boldsymbol{W}_m=(u_m,v_m)$，使得 $m\to\infty$ 时，$\min_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)\to 0$. 结合 Hanack 不等式，$\max_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)\to 0$. 则 $u_m(x)\to 0$ 在Ω一致成立. 另外，解序列$\boldsymbol{W}_m=(u_m,v_m)$满足方程组(3)，由方程组(3) 中第二个方程积分

$$\int_\Omega v_m\left(r-\frac{r}{k}v_m-\frac{u_m}{1+au_m+bv_m}\right)\mathrm{d}x=0$$

令 $m\to\infty$，则 $v_m\to k$. 同理将方程组(3)第一个式子积分两边同除以$\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)$并在$\Omega$积分可得

$$\int_{\Omega}\frac{u_m}{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)}\left(-e+\frac{\beta v_m}{1+au_m+bv_m}\right)\mathrm{d}x=0$$

由于$\frac{u_m}{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)}>\frac{\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)}{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}u_m(x)}\geqslant\frac{1}{A_1}$，再令 $m\to\infty$，可得$\frac{\beta k}{1+bk}=e$，另一方面，由条件 H_1 计算可得$\frac{\beta k}{1+bk}>\alpha$，矛盾. 因此 $u,v\leqslant\bar{C}$ 成立. 引理证毕.

记系统(3)为 $-(\Delta)^{\alpha}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})$. 令 $B=\{x\in\Omega\mid u,\ v\in(\underline{C},\ \bar{C})\}$，$\boldsymbol{W}=(u,\ v)$ 且 $\boldsymbol{W}$ 满足方程

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{W})=\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})+\boldsymbol{W}]=0$$

其中$(I-D)^{-1}$ 是 I-D 的逆. 由于算子 G 是单位算子 I 的一个等干扰算子. 对 $\forall W\in\partial B$ 有 $G(W)\neq0$，故可定义 Leray-Schander 拓扑度 $\deg(G(\cdot),\ 0,\ B)$. 直接计算得：

$$D_WG(E^*)=I-(I-D)^{-1}[F_W(E^*)+I]$$

记

$$H(\mu^{\alpha})=\det\{\mu^{\alpha}I-F_W(E^*)\}=\mu^{2\alpha}+\ell_1\mu^{\alpha}+\ell_2$$

$$\begin{cases}\ell_1=\dfrac{\beta au^*v^*}{(1+au^*+bv^*)^2}+\dfrac{r}{k}v^*-\dfrac{bu^*v^*}{(1+au^*+bv^*)^2}\\ \ell_2=\dfrac{\beta u^*v^*(1+au^*)(1+bv^*)}{(1+au^*+bv^*)^4}+\dfrac{\beta au^*v^*}{(1+au^*+bv^*)^2}\left(\dfrac{r}{k}v^*-\dfrac{bu^*v^*}{(1+au^*+bv^*)^2}\right)\end{cases}\tag{4}$$

假设 $\ell_1<0$，${\ell_1}^2-4\ell_2>0$，此时 $H(\mu^{\alpha})=0$ 有两正根$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$，并且存在两正整数 k_1,k_2，使得$\hat{\mu}_1\in[\mu_{k_1}^{\alpha},\ \mu_{k_1+1}^{\alpha})$，$\hat{\mu}_2\in(\mu_{k_2}^{\alpha},\ \mu_{k_2+1}^{\alpha})$.

由 Leray-Schander 定理，有以下引理[9].

引理 2　对所有正整数 i 都有 $H(\mu_i^{\alpha})\neq0$，则

$$\mathrm{index}(G(\cdot),\ E^*)=(-1)^m,\ m=\sum_{i\geqslant0,\ H({\mu_i}^{\alpha})<0}\dim E(\mu_i^{\alpha})$$

定理 3　若满足条件 $\ell_1<0$，${\ell_1}^2-4\ell_2>0$，且 $\sum_{i=k_1+1,\ H({\mu_i}^{\alpha})<0}^{k_2}\dim E(\mu_i^{\alpha})$ 为奇数，系统(3)至少有一个非常数正平衡解.

证　利用反证法. 设 d 为充分大的正数，定义

$$\boldsymbol{D}(t)=\begin{bmatrix}[t+(1-t)d](-\Delta)^{\alpha} & 0\\ 0 & [t+(1-t)d](-\Delta)^{\alpha}\end{bmatrix}$$

考虑如下方程

$$\begin{cases}-\Delta\ D(t)W=F(W),\ x\in\Omega\\ \dfrac{\partial W}{\partial n}=0\ ,\ x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{5}$$

同理(5)式也可以记为

$$G(t,\ W)=W-(I-D(t))^{-1}[F(W)+W]=0,\ H(t,\ \mu^{\alpha})=\det\{\mu^{\alpha}D(t)-F_W(E^*)\}$$

当 $t=1$ 时，系统(5)即是系统(3)，并且(5)只有唯一正常数解 $\boldsymbol{E}^*$. 由定理条件以及引理 2 可知

$$\deg(G(1,\ \cdot),\ \boldsymbol{E}^*)=-1$$

另一方面，当 $t=0$ 时，$H(0,\ \mu^{\alpha})=d^2\mu^{2\alpha}+d\ell_1\mu^{\alpha}+\ell_2$，由于 ℓ_2，所以只要取足够大的 $d>0$，满足 $2d^2\mu^{2\alpha}+d\ell_1>0$，则对所有 $\mu\geqslant0$ 有 $H(0,\ \mu^{\alpha})>0$，故此时 $\deg(F(D,\ \cdot),\ E^*)=(-1)^0=1$. 由 Leray-Schander 度的同伦不变性[12] 可得矛盾. 这说明系统(3)中至少有一个不同于 $\boldsymbol{E}^*$ 的解. 定理证毕.

参考文献：

[1]　柳文清，陈清婉. 捕食者食饵均染病的入侵反应扩散捕食系统中扩散的作用[J]. 应用数学和力学，2019，40(3)：321-331.

[2] 张国洪，王小利，王稳地. 一个考虑扩散的 Holling-Tanner 捕食-食饵模型研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(3)：16-19.
[3] 邵 翠，陈文彦. 带有 Sigmoidal 型响应函数反应扩散模型的正解 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2013，36(4)：534-539.
[4] 郭改慧，李兵方，岳宗敏. 带交叉扩散的 Ivlev 捕食-食饵模型的分歧正解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(1)：74-78.
[5] 郭庭光，徐志庭. 带有扩散项和接种的传染病模型的行波解 [J]. 数学物理学报，2017，37A(6)：1129-1147.
[6] LI C L. Stability and Traveling Fronts of a Three-species Diffusive Prey-Predator System with Delays [J]. 工程数学学报，2017，34(2)：182-198.
[7] MUMBY P J，HASTINGS A，EDWARDS H J. Thresholds and the Resilience of Caribbean Coral Reefs [J]. Nature，2007，450(7166)：98-101.
[8] HNAIEN D，KELLIL F，LASSOUED R. Asymptotic Behavior of Global Solutions of an Anomalous Diffusion System [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，421(2)：1519-1530.
[9] DI NEZZA E，PALATUCCI G，VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bulletin Des Sciences Mathématiques，2012，136(5)：521-573.
[10] LISKEVICH V A，SEMENOV Y A. Some Inequalities for Sub-Markovian Generators and Their Applications to the Perturbation Theory [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1993，119(4)：1171-1177.
[11] LI C L. Existence of the Non-Constant Steady States to a Fractional Diffusion Predator-Prey System Including Holling type-II Functional Response [J]. Advances in Difference Equations，2017，2017：165.
[12] 童裕孙. 泛函分析教程 [M]. 上海：复旦大学出版社，2003.

On Coexistence of a Fractional Diffusion Predator-Prey System

LIU Weng-qing， CHEN Qing-wan， FU Jin-bo

Minnan Science and technology institute，Quanzhou Fujian 362300，China

Abstract：A predator-prey model with fractional diffusion and B-D response function has been studied in this paper. By constructing a Lyapunov function，The local asymptotical stability and globally asymptotic stability of the equilibrium point are proved; using the Leray-Schauder topological degree method，it is proved that the positive equilibrium solution of non-constant numbers exists under given conditions.

Key words：B-D reaction function；fractional diffusion；coexistence solution

责任编辑　张　枸