第 45 卷　第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 3 月
Vol. 45　No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Mar.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.03.005

基尔霍夫型耦合吊桥方程全局吸引子的存在性①

刘 强 强

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：研究了基尔霍夫型耦合吊桥方程解的长时间动力学行为，运用条件(C)的方法，获得了弱拓扑空间全局吸引子的存在性.

关　键　词：基尔霍夫型耦合吊桥方程；全局吸引子；有界吸收集

中图分类号：**O175.29**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2020)03－0027－07

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域，考虑基尔霍夫型耦合吊桥方程

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha_1 u - (a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)\Delta u + k^2(u - v)^+ + f_1(u) = g_1(x), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha_2 v - k^2(u - v)^+ + f_2(v) = g_2(x), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) = \Delta u(0) = u(L) = \Delta u(L) = 0,\ v(0) = v(L) = 0 & \\ u(x, 0) = u_0,\ u_t(x, 0) = u_1,\ v(x, 0) = v_0,\ v_t(x, 0) = v_1 & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

全局吸引子的存在性，其中：a, b, α_1, α_2 是正常数；k^2 是弹性系数；外力项 $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$. 函数 $(u-v)^+$ $\max = \{u - v,\ 0\}$ 吊桥方程由文献[1]作为非线性分析领域的一个新问题首次提出. 此后，一些学者对该模型进行了研究，但他们主要讨论解的存在性[2-4]. 文献[5-6]获得了单个及耦合吊桥方程弱解的全局吸引子. 文献[7-8]得到了耦合吊桥方程强解和强全局吸引子. 文献[9]在较弱的非线性项条件下，运用加强的平坦性条件，获得了基尔霍夫型吊桥方程指数吸引子的存在性. 文献[10]运用加强的平坦性条件获得了耦合吊桥方程指数吸引子的存在性. 文献[11]得到了带非线性阻尼吊桥方程的全局吸引子. 最近，文献[12-13]利用收缩函数的方法分别在强和弱的拓扑空间证得了单个及耦合吊桥的全局吸引子. 受上述文献的启发，本文运用条件(C)的方法，证明基尔霍夫型耦合吊桥方程全局吸引子的存在性.

1　函数集和准备工作

不失一般性，定义 Hilbert 空间 $V_s = D(A^{\frac{s}{2}})$，其内积和范数分别为

$$(u,\ v)_s = (A^{\frac{s}{2}} u,\ A^{\frac{s}{2}} v),\quad \| u \|_{V_s}^2 = \| A^{\frac{s}{2}} u \|$$

当 $s = 0$ 时，记 $H = L^2(\Omega)$；当 $s = 1$ 时，记 $V_1 = H^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$；当 $s = 2$ 时，记 $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$；为了书写方便，记 $O = V_2 \times H \times V_1 \times H$ 用 $\| Au \|$ 表示 $D(A)$ 的范数，其中 $A = -\Delta$.

特别地，有紧嵌入 $V_{s+1} \subset V_s$ 和 Poincaré 不等式

$$\lambda_1 \| u \|_s^2 \leqslant \| u \|_{s+1}^2,\ \forall u \in V_{s+1}$$

其中 λ_1 是 A 的第一特征值.

---

① 收稿日期：2019－05－10
基金项目：国家自然科学基金项目(11561064).
作者简介：刘强强(1993－)，男，硕士. 主要从事无穷维动力系统的研究.

此外，非线性项满足如下条件：$f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，$i = 1,2$，且满足

$$\liminf_{|s| \to \infty} \frac{f_i(s)}{s} \geqslant -\lambda_1, \quad F_i(s) = \int_0^s f_i(r) \mathrm{d}r, \quad s \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$| f_i'(s) | \leqslant k_0(1 + | u |^p), \quad \forall p \geqslant 1, \quad s \in \mathbb{R} \tag{3}$$

由条件(3) 可知，存在正常数 $K_1, K_2, K_3, K_4 \geqslant 0$，$\forall s \in \mathbb{R}$ 及 $\eta_i = \eta_i(\lambda_1) > 0$，$i = 1,2$，使得

$$f_1(s)s + \eta_1 s^2 + K_1 \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$F_1(s)s + \eta_1 s^2 + K_2 \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$f_2(s)s + \eta_2 s^2 + K_3 \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$F_2(s)s + \eta_2 s^2 + K_4 \geqslant 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{7}$$

为了得到问题(1) 的全局吸引子，还需要下面的抽象结果：

定义 1[5] 设 X 为 Banach 空间且 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 为 X 上的一族映射. $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 被称为 X 上的强弱连续半群，当且仅当 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 满足：

1) 为恒等 $S(0) = Id$ 映射；

2) $S(t)S(s) = S(t + s)$，$\forall t, s \geqslant 0$；

3) 当 $t_n \to t$，$x_n \to x$ 时，$S(t_n)x_n \to S(t)x$.

定义 2[8] Banach 空间 M 中的半群 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 被称为满足条件(C)，如果对任意 $\varepsilon > 0$ 和 M 中的任意有界集 B，存在 $t(B) > 0$ 和有限维子空间 X_1，使得 $\{ \| PS(t)x \| \mid x \in B, t \geqslant t(B)\}$ 有界，且当 $t \geqslant t(B)$ 时，有

$$\| (I - P)S(t)x \| \mid x < \varepsilon, \quad t \geqslant t(B), \quad x \in B$$

这里 $P: M \longrightarrow X_1$ 为正交投影.

定理 1[8] 设 X 为 Banach 空间且 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 为 X 上的强弱连续半群. 那么 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在 X 上存在全局吸引子，当且仅当

1) $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在 X 上存在有界吸收集 B；

2) $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 满足条件(C).

引理 1[13] (解的存在唯一性) 设条件(2),(3) 成立. 若 $g_i \in L^2(\Omega)$，$i = 1,2$，$u_0 \in V_2$，$v_0 \in V_1$，u_1，$v_1 \in H$，则问题(1) 有唯一解 $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ 满足

$$u(t) \in C([0, T], V_2), \quad u_t(t) \in C([0, T], H)$$

$$v(t) \in C([0, T], V_1), \quad v_t(t) \in C([0, T], H)$$

并且 $\{u_1, v_1, u_2, v_2\} \to \{u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)\}$ 在 O 上连续.

运用引理 1，定义与问题(1) 相关的 C^0 半群 $S(t)$，即

$$S(t): \{u_0, v_0, u_1, v_1\} \to \{u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)\}, \quad t \geqslant 0$$

且 $S(t)$ 将映射到自己.

2 有界吸收集

定理 2 设 $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足条件(2) 和(3)，$g_i \in L^2(\Omega)$，$i = 1,2$. 则球 $B = B_O(0, \rho_1)$ 与问题(1) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在 O 中存在有界吸收集，即对 O 中任意有界集 B，存在 $t \geqslant t_1(B)$，使得当 $t \geqslant t(B)$ 时，有 $S(t)B \subset B$.

证 取 $0 < \varepsilon < 1$，用 $\varphi = u_t + \varepsilon u$，$\psi = v_t + \varepsilon v$，分别与(1) 式中的两个式子在空间 $L^2(\Omega)$ 中作内积，有

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| \varphi \|^2 + \| \Delta u \|^2 + \| \psi \|^2 + \| \nabla v \|^2) + (\alpha_1 - \varepsilon) \| \varphi \|^2 - \varepsilon(\alpha_1 - \varepsilon)(u, \varphi) + \varepsilon \| \Delta u \|^2 +$$

$$(\alpha_2 - \varepsilon) \| \psi \|^2 - \varepsilon(\alpha_2 - \varepsilon)(v, \psi) + \varepsilon \| \nabla v \|^2 + (-(a + b\int_\Omega | \nabla u |^2 \mathrm{d}x)\Delta u, \varphi) +$$

$$k^2((u-v)^+,\varphi-\psi)+(f_1(u),\varphi)+(f_2(v),\psi)=(g_1,\varphi)+(g_2,\psi) \tag{8}$$

结合(2),(3)式，Hölder 不等式和 Poincaré 不等式，有

$$(\alpha_1-\varepsilon)\|\varphi\|^2-\varepsilon(\alpha_1-\varepsilon)(u,\varphi)+\varepsilon\|\Delta u\|^2+(\alpha_2-\varepsilon)\|\psi\|^2-\varepsilon(\alpha_2-\varepsilon)(v,\psi)+\varepsilon\|\Delta v\|^2\geqslant$$

$$(\alpha_1-\varepsilon)\|\varphi\|^2-\varepsilon\alpha_1\|u\|\|\varphi\|+\varepsilon\|\Delta u\|^2+(\alpha_2-\varepsilon)\|\psi\|^2-\frac{\varepsilon\alpha_2}{4}\|\psi\|^2-\varepsilon\alpha_2\|v\|^2+\varepsilon\|\nabla v\|^2\geqslant$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{2}-\varepsilon\right)\|\varphi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_1}{2\lambda_1^2}\right)\|\Delta u\|^2+\left(\frac{\alpha_2}{2}-\varepsilon\right)\|\psi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_2}{2\lambda}\right)\|\nabla v\|^2 \tag{9}$$

此外

$$(-(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u,\varphi)=(-(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u,u_t+\varepsilon u)=$$

$$\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+a\|\nabla u\|^2+\frac{b}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^4+\varepsilon b\|\nabla u\|^4 \tag{10}$$

和

$$(f_1(u),\varphi)=(f_1(u),u_t+\varepsilon u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega F_1(u)\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega f_1(u)u\mathrm{d}x \tag{11}$$

$$(f_2(v),\psi)=(f_2(v),v_t+\varepsilon v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega F_2(v)\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega f_2(v)v\mathrm{d}x \tag{12}$$

及

$$(g_1,\varphi)=(g_1,u_t+\varepsilon u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega g_1u\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega g_1u\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$(g_2,\psi)=(g_2,v_t+\varepsilon v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega g_2v\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega g_2v\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$k^2((u-v2)^+,\varphi-\psi)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u-v)^+\|^2+\varepsilon k^2\|(u-v)^+\|^2 \tag{15}$$

将(9)－(15)式代入(8)式，并通过简单计算后得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+a\|\nabla u\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2+2\int_\Omega F_1(u)\mathrm{d}x-$$

$$2\int_\Omega g_1u\mathrm{d}x+2\int_\Omega F_2(v)\mathrm{d}x-2\int_\Omega g_2v\mathrm{d}x)+\left(\frac{\alpha_1}{2}-\varepsilon\right)\|\varphi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_1}{2\lambda_1^2}\right)\|\Delta u\|^2+$$

$$\varepsilon(a\|\nabla u\|^2+b\|\nabla u\|^4)+\varepsilon k^2\|(u-v)^+\|^2+\left(\frac{\alpha_2}{2}-\varepsilon\right)\|\psi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_2}{2\lambda_1}\right)\|\nabla v\|^2+$$

$$\varepsilon\int_\Omega f_1(u)u\mathrm{d}x-\varepsilon\int_\Omega g_1u\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega f_2(v)v\mathrm{d}x-\varepsilon\int_\Omega g_2v\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{16}$$

令

$$E(t)=\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+a\|\nabla u\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2+$$

$$2\int_\Omega F_1(u)\mathrm{d}x-2\int_\Omega g_1u\mathrm{d}x+2\int_\Omega F_2(v)\mathrm{d}x-2\int_\Omega g_2v\mathrm{d}x \tag{17}$$

$$I(t)=\left(\frac{\alpha_1}{2}-\varepsilon\right)\|\varphi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_1}{2\lambda_1^2}\right)\|\Delta u\|^2+\varepsilon(a\|\nabla u\|^2+b\|\nabla u\|^4)+$$

$$\left(\frac{\alpha_2}{2}-\varepsilon\right)\|\psi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_2}{2\lambda_1}\right)\|\nabla v\|^2+\varepsilon k^2\|(u-v)^+\|^2+$$

$$\varepsilon\int_\Omega f_1(u)u\mathrm{d}x-\varepsilon\int_\Omega g_1u\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega f_2(v)v\mathrm{d}x-\varepsilon\int_\Omega g_2v\mathrm{d}x \tag{18}$$

根据(4)－(7)式，运用 Sobolev 紧嵌入定理，有

$$E(t)\geqslant\|\varphi\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+a\|\nabla u\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2-$$

$$2\eta_1 \|u\|^2+2K_2|\Omega|-\frac{2}{\lambda_1^2}\|g_1\|^2-2\eta_2\|v\|^2-2K_4|\Omega|-\frac{2}{\lambda_1}\|g_2\|^2\geqslant$$
$$\|\varphi\|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2\eta_1}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta u\|^2+a\|\nabla u\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2+$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2\eta_2}{\lambda_1}\right)\|\nabla v\|^2-N_1-N_2 \tag{19}$$

其中：$N_1=2K_2|\Omega|+\frac{2}{\lambda_1^2}\|g_1\|^2$，$N_2=2K_4|\Omega|+\frac{2}{\lambda_1}\|g_2\|^2$.

$$I(t)\geqslant\left(\frac{\alpha_1}{2}-\varepsilon\right)\|\varphi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_1}{2\lambda_1^2}\right)\|\Delta u\|^2+\varepsilon(a\|\nabla u\|^2+b\|\nabla u\|^4)+\varepsilon k^2\|(u-v)^+\|^2+$$
$$\left(\frac{\alpha_2}{2}-\varepsilon\right)\|\psi\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_2}{2\lambda_1}\right)\|\nabla v\|^2-\varepsilon\int_\Omega(\eta_1\|u\|^2+K_1)\mathrm{d}x-\frac{2}{\lambda_1^2}\|g_1\|^2-$$
$$\frac{\lambda_1^2}{2}\|u\|^2-\varepsilon\int_\Omega(\eta_2\|v\|^2+K^3)\mathrm{d}x-\frac{2}{\lambda_1}\|g_2\|^2-\frac{\lambda_1}{2}\|v\|^2\geqslant$$
$$\left(\frac{\alpha_1}{2}-\varepsilon\right)\|\varphi\|^2+\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\lambda_1^2}-\frac{\eta_1}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta u\|^2+\varepsilon(a\|\nabla u\|^2+b\|\nabla u\|^4)+$$
$$\left(\frac{\alpha_2}{2}-\varepsilon\right)\|\psi\|^2+\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon\alpha_2}{2\lambda_1}-\frac{\eta_2}{\lambda_1}\right)\|\nabla v\|^2+\varepsilon k^2\|(u-v)^+\|^2-N_3-N_4 \tag{20}$$

其中：$N_3=2K_1|\Omega|+\frac{1}{\lambda_1^2\varepsilon}\|g_1\|^2$，$N_4=2K_3|\Omega|+\frac{1}{\lambda_1\varepsilon}\|g_2\|^2$.

取 ε,η_1 和 η_2 充分小，使得

$$\frac{1}{2}-\frac{2\eta_1}{\lambda_1^2}>0,\ \frac{\alpha_1}{2}-\varepsilon>\frac{\alpha_1}{4},\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\lambda_1^2}-\frac{\eta_1}{\lambda_1^2}\right)>0$$
$$\frac{1}{2}-\frac{2\eta_2}{\lambda_1}>0,\ \frac{\alpha_2}{2}-\varepsilon>\frac{\alpha_2}{4},\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon\alpha_2}{2\lambda_1}-\frac{\eta_2}{\lambda_1}\right)>0$$
$$E(t)\geqslant C_1(\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2)-N_1-N_2 \tag{21}$$
$$E(t)\geqslant C_1(\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2)-N_3-N_4 \tag{22}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+2I(t)\leqslant 0$$

即

$$E(t)\leqslant-\int_0^t 2I(t)\mathrm{d}\tau+E(0) \tag{23}$$

由(21)-(23)式可知

$$E(t)\geqslant C_1(\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2)-N_1-N_2\geqslant$$
$$-\int_0^t 2[C_1(\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2)-$$
$$N_3-N_4]\mathrm{d}\tau+E(0) \tag{24}$$

因此，对 $\forall\rho_1>\frac{2(M_3+M_4)}{C_1}$，存在 $t_1=t_1(B)$，使得

$$\|\varphi\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^4+\|\psi\|^2+\|\nabla v\|^2+k^2\|(u-v)^+\|^2\leqslant\rho_1 \tag{25}$$

所以，若 u,v 是系统(1)的解，令 $B_1=\bigcup_{t>0}S(t)B_1'$，其中

$$B_1'=\{(u_0,v_0,u_1,v_1)\in O:\|u_1+\varepsilon u_0\|^2+\|\Delta u_0\|^2+\|\nabla u_0\|^2+\|\nabla u_0\|^4+$$
$$k^2\|(u_0-v_0)^+\|^2+\|v_1+\varepsilon v_0\|^2+\|\nabla v_0\|^2\leqslant\rho_1\}$$

则 B 是半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 O 上的有界吸收集.

有界吸收集的存在性意味着对于依赖于有界集的初值，问题(1) 的解全局有界，即，若 (u, v, u_t, v_t) 是问题(1) 在有界集 B 上对应于初值 (u_0, v_0, u_1, v_1) 的解，则

$$\|(u, v, u_t, v_t)\| \leqslant \rho_1, \ \forall t \geqslant 0$$

其中 $\rho_1 \geqslant 0$ 是依赖于 B 的常数.

3　全局吸引子的存在性

引理 2[6]　设 $f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，$i = 1,2$ 满足条件(2) 和(3)，则 $(f_1, f_2): V_2 \times V_1 \longrightarrow H \times H$ 为紧连续.

定理 3　设方程(1) 的解半群为 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$，若非线性项 $f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，满足条件(2) 和(3)，$g_i \in L^2(\Omega)$，$i = 1,2$，则 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 O 有全局吸引子 $\mathscr{A}_\alpha$.

证　根据定理 1 和定理 2，只需要证明满足条件(C)，设 (γ_i, λ_j)，$i,j = 1,2,\cdots$ 为算子 $A^2 \times A$ 在空间 $V_2 \times V_1$ 中的特征值，满足

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \cdots$$
$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_j \leqslant \cdots$$

且当 $j \to \infty$ 时，$\lambda_j \to \infty$；当 $i \to \infty$ 时，$\gamma_i \to \infty$；(x_j, ω_i) 为特征值 (λ_j, γ_i) 对应的特征向量，它们构成空间 $V_2 \times V_1$ 的一组正交基，满足：

$$A^2 x_j = \lambda_j x_j, \ A\omega_i = \gamma_i \omega_i, \ \forall i,j \in \mathbb{N}$$

设 $H_m = span\{x_1, x_2, \cdots x_m\}$，$Q_n = span\{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n\}$，$P_m: V_2 \longrightarrow H_m$ 与 $Q_n: V_1 \longrightarrow G_n$ 为正交投影，对 $\forall (u, v, u_t, v_t) \in V_2 \times V_1$ 作如下分解

$$(u, v, u_t, v_t) = (u_1, u_{1t}, v_1, v_{1t}) + (u_2, u_{2t}, v_2, v_{2t})$$

其中

$$(u, v, u_t, v_t) = (P_m u, P_m u_t, Q_n v, Q_n v_t)$$

根据引理 2，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $m,n > 0$，有

$$\|(I - P_m)g_1\|_H < \frac{\varepsilon}{2}, \ \|(I - P_m)f_1(u)\|_{V_2} < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall u \in B_{V_2}(0, \rho_1) \tag{26}$$

$$\|(I - Q_n)g_2\|_H < \frac{\varepsilon}{2}, \ \|(I - Q_n)f_2(v)\|_{V_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall v \in B_{V_1}(0, \rho_1) \tag{27}$$

取 $0 < \varepsilon < 1$，用 $\varphi_2 = u_{2t} + \varepsilon u_2$，$\psi_2 = v_{2t} + \varepsilon v_2$，分别与(1) 式中的两个式子在空间 $L^2(\Omega)$ 中作内积，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\varphi_2\|^2 + \|\Delta u_2\|^2 + a\|\nabla u_2\|^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u_2\|^4 + \|\psi_2\|^2 + \|\nabla v_2\|^2\right) + (\alpha_1 - \varepsilon)\|\varphi_2\|^2 + \varepsilon\|\Delta u_2\|^2 - \\ &\varepsilon(\alpha_1 - \varepsilon)(u_2, \varphi_2) + \varepsilon a\|\nabla u_2\|^2 + \varepsilon b\|\nabla u_2\|^4 + (\alpha_2 - \varepsilon)\|\psi_2\|^2 - \varepsilon(\alpha_2 - \varepsilon)(v_2, \psi_2) + \varepsilon\|\nabla v_2\|^4 + \\ &k^2((u - v)^+, \varphi_2 - \psi_2) = -(f_1(u), \varphi_2) - (f_2(v), \psi_2) + (g_1, \varphi_2) + (g_2, \psi_2)\end{aligned} \tag{28}$$

类似(9) 式作进一步估计，有

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 - \varepsilon)\|\varphi_2\|^2 - \varepsilon(\alpha_1 - \varepsilon)(u_2, \varphi_2) + \varepsilon\|\Delta u_2\|^2 + (\alpha_2 - \varepsilon)\|\psi_2\|^2 - \varepsilon(\alpha_2 - \varepsilon)(v_2, \psi_2) + \varepsilon\|\Delta v_2\|^2 \geqslant \\ &\frac{\alpha_1}{4}\|\varphi_2\|^2 + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2\alpha_1}{2\lambda_1^2}\right)\|\Delta u_2\|^2 + \frac{\alpha_2}{4}\|\psi_2\|^2 + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2\alpha_2}{2\lambda}\right)\|\nabla v_2\|^2\end{aligned} \tag{29}$$

此外

$$k^2((u - v)^+, \varphi_2 - \psi_2) \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k^2\|(u_2 - v_2)^+\|^2 + \varepsilon k^2\|(u_2 - v_2)^+\|^2 \tag{30}$$

结合(26),(27) 式，Hölder 不等式和 Poincaré 不等式，有

$$\begin{aligned}(g_1, \varphi_2) + (g_2, \psi_2) &\leqslant \|g_1\|\|\varphi_2\| + \|g_2\|\|\psi_2\| \leqslant \\ &\frac{\|g_1\|_H^2}{\varepsilon} + \frac{\|g_2\|_H^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4}\|\varphi_2\| + \frac{\varepsilon}{4}\|\psi_2\| \leqslant \\ &\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\|\varphi_2\| + \frac{\varepsilon}{4}\|\psi_2\|\end{aligned} \tag{31}$$

其中：$(g_1)_H=(I-P_m)g_1$，$(g_2)_H=(I-Q_n)g_2$.

$$
\begin{aligned}
|-(f_1(u),\varphi_2)-(f_2(v),\psi_2)| \leqslant{} & \|f_1(u)\|\,\|\varphi_2\|+\|f_2(v)\|\,\|\psi_2\| \leqslant \\
& \frac{\|g_1\|_H^2}{\varepsilon}+\frac{\|g_2\|_H^2}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{4}\|\varphi_2\|+\frac{\varepsilon}{4}\|\psi_2\| \leqslant \\
& \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi_2\|+\frac{\varepsilon}{4}\|\psi_2\| \qquad (32)
\end{aligned}
$$

其中：$(f_1(u))_{V_2}=(I-P_m)f_1(u)$，$(f_2(v))_{V_1}=(I-Q_n)f_2(v)$.

结合(29)－(32)式，代入(28)式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\varphi_2\|^2+\|\Delta u_2\|^2+a\|\nabla u_2\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u_2\|^4+\|\psi_2\|^2+\|\nabla v_2\|^2+k^2\|(u_2-v_2)^+\|^2\right)+\\
&\left(\frac{\alpha_1}{4}-\varepsilon\right)\|\varphi_2\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_1}{2\lambda_1^2}\right)\|\nabla u_2\|^2+\varepsilon\|\nabla u_2\|^4+\left(\frac{\alpha_2}{4}-\varepsilon\right)\|\psi_2\|^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2\alpha_2}{2\lambda_1}\right)\|\nabla v_2\|^2+\\
&\varepsilon a\|\nabla u_2\|^2+\varepsilon b\|\Delta u_2\|^2\leqslant\varepsilon \qquad (33)
\end{aligned}
$$

定义泛函

$$
Y(t)=\|\varphi_2\|^2+\|\Delta u_2\|^2+a\|\nabla u_2\|^2+\frac{b}{2}\|\nabla u_2\|^4+\|\psi_2\|^2+\|\nabla v_2\|^2+k^2\|(u_2-v_2)^+\|^2
$$

取 ε 充分小，使得

$$
\frac{\alpha_1}{4}-\varepsilon>0,\ \frac{\alpha_2}{4}-\varepsilon>0
$$

令 $C_2=\min\left\{\frac{\alpha_1}{4}-\varepsilon,\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon\alpha_1}{\lambda_1^2}\right),\ \frac{\alpha_2}{4}-\varepsilon,\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon\alpha_2}{\lambda_1}\right),\ \varepsilon\right\}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t)+C_2I(t)\leqslant(\alpha_1-\varepsilon)^{-1}\|(I-P_m)f_1(u)\|^2+(\alpha_2-\varepsilon)^{-1}\|(I-Q_n)f_2(v)\|^2+\\
&(\alpha_1-\varepsilon)^{-1}\|(I-P_m)g_1\|^2+(\alpha_2-\varepsilon)^{-1}\|(I-Q_n)g_2\|^2
\end{aligned}
$$

所以，当 $t\geqslant t_1$ 时，有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)+C_2I(t)\leqslant\varepsilon,\ t>t_1 \qquad (34)
$$

根据 Gronwall 引理，可得

$$
Y(t)\leqslant Y(t_1)\mathrm{e}^{-C_2(t-t_1)}+\varepsilon(t-t_1),\ t\geqslant t_1 \qquad (35)
$$

参考文献：

[1] LAZER A C, MCKENNA P J. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis [J]. SIAM Review, 1990, 32(4): 537-578.

[2] HARBI H, AHMED N U. Mathematical Analysis of Dynamic Models of Suspension Bridges [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1998, 58(3): 853-874.

[3] MCKENNA P J, WALTER W. Nonlinear Oscillations in a Suspension Bridge [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1987, 98(2): 167-177.

[4] HEUNGCHOI Q, JUNG T. A Nonlinear Suspension Bridge Equation with Nonconstant Load [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1999, 35(6): 649-668.

[5] MA Q Z, ZHONG C K. Existence of Global Attractors for the Coupled System of Suspension Bridge Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 308(1): 365-379.

[6] 王春梅，汪 璇. 弱耗散记忆型吊桥方程的渐近性态 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(12)：71-75.

[7] ZHONG C K, MA Q Z, SUN C Y. Existence of Strong Solutions and Global Attractors for the Suspension Bridge Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 67(2): 442-454.

[8] MA Q Z, ZHONG C K. Existence of Strong Solutions and Global Attractors for the Coupled Suspension Bridge Equations [J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(10): 3755-3775.

[9] 贾澜，马巧珍. 基尔霍夫型吊桥方程指数吸引子的存在性［J］. 四川师范大学学报（自然科学版），2018，41(2)：185-189.

[10] 罗旭东. 耦合吊桥方程指数吸引子的存在性［J］. 西南大学学报（自然科学版），2017，39(9)：102-106.

[11] PARK J Y，KANG J R. Global Attractors for the Suspension Bridge Equations with Nonlinear Damping［J］. Quarterly of Applied Mathematics，2011，69(3)：465-475.

[12] 刘世芳，马巧珍. 具有历史记忆的阻尼吊桥方程强全局吸引子的存在性［J］. 数学物理学报，2017，37A(4)：684-697.

[13] 黄商商，马巧珍. 带线性记忆的阻尼耦合吊桥方程的全局吸引子［J］. 华东师范大学学报（自然科学版），2018(2)：11-22.

On Existence of Exponential Attractors for Kirchhoff-Type Coupled Suspension Bridge Equations

LIU Qiang-qiang

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：In this paper，the long-time dynamical behavior of Kirchhoff-type coupled suspension bridge equations has been studied. The asymptotic compactness of solution semigroup was first verified，then，the existence of exponential attractors for Kirchhoff-type coupled suspension bridge equations obtained by means of the so called enhanced flattening property，and some known results are improved and extended.

Key words：Kirchhoff-type coupled suspension bridge equations；global attractor；bounded absorbing set

责任编辑 张 枸