第 45 卷 第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 4 月
Vol. 45 No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.001

有限群的可解性与其部分极大子群的 SS-可补性①

袁 媛[1]， 常 健[2]， 刘建军[2]

1. 重庆工商大学融智学院 金融学院，重庆 401320；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 H 是有限群 G 的子群，如果存在 G 的一个子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K$ 在 K 中 S-拟正规，则称 H 在 G 中 SS-可补. 利用部分极大子群的 SS-可补性给出了有限群可解和 p-可解的一些充分条件.

关 键 词：SS-可补子群；极大子群；可解群；p-可解群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2020)04-0001-04

本文所涉及的群均为有限群. 子群的正规性对群的结构有非常重要的影响，许多群论学者通过弱化正规性来刻画有限群的结构，并获得了大量深刻的研究成果. 文献[1]首次引入了 S- 拟正规的概念：设 H 是群 G 的子群. 如果对于 G 的任意 Sylow 子群 P，都有 $HP=PH$，则称 H 为 G 的 S- 拟正规子群. 这个概念已被很多数学工作者广泛研究及推广. 我们知道可补性对有限群的结构有一定的影响[2]. 文献[3]将 S- 拟正规性和可补性进一步融合，引入了 SS- 可补的概念：设 H 是群 G 的子群，如果存在 G 的一个子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K$ 在 K 中 S- 拟正规，则称 H 在 G 中 SS- 可补. 应用这一概念，人们获得了非常丰富的研究成果(例如文献[3-5]). 同时，很多学者研究了局部子群对群结构的影响[6]，文献[3]证明了：有限群 G 可解的充分必要条件是 G 中每个极大子群在 G 中都有次正规的 SS- 补. 本文主要通过部分极大子群的 SS- 可补性来研究有限群的可解性，并推广了以上结果.

本文所涉及的所有术语和符号都是标准的，见文献[7-8].

引理 1[3]　设 H 是群 G 的 SS- 可补子群，则下列结论成立：

(i) 如果 $H\leqslant M\leqslant G$，那么 H 在 M 中是 SS- 可补的；

(ii) 如果 $N\trianglelefteq G$ 且 $N\leqslant H$，那么 H/N 在 G/N 中是 SS- 可补的；

(iii) 设 π 是素数的集合，H 是 G 的 π- 子群，N 是 G 的正规 π'- 子群，那么 HN/N 在 G/N 中是 SS- 可补的.

引理 2[1] 设 H 是群 G 的 S- 拟正规子群，则下列结论成立：

(i) 如果 $H\leqslant K\leqslant G$，那么 H 在 K 中是 S- 拟正规的；

(ii) 如果 $N\trianglelefteq G$，那么 HN/N 在 G/N 中是 S- 拟正规的，如果还有 $N\leqslant K\leqslant G$，那么 K 在 G 中是 S- 拟正规的当且仅当 K/N 在 G/N 中是 S- 拟正规的；

(3) $H\trianglelefteq\trianglelefteq G$.

引理 3[9]　如果 A 是群 G 的次正规子群，B 是 G 的极小正规子群，那么 $B\leqslant N_G(A)$.

设 G 是一个群，p 是 $|G|$ 的素因子，定义下面一些极大子群的集合：

① 收稿日期：2019-05-29
基金项目：国家自然科学基金项目(11301426)；重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2018jcyjAX0147)；中央高校基本科研业务费项目(XDJK2020B052).
作者简介：袁 媛(1983-)，女，助教，主要从事群论的研究.
通信作者：刘建军，副教授.

$\mathscr{F}(G)=\{M \mid M \lessdot G\}$;

$\mathscr{F}_n(G)=\{M \mid M \in \mathscr{F}(G)$ 且 M 非幂零$\}$;

$\mathscr{F}_c(G)=\{M \mid M \in \mathscr{F}(G)$ 且 $|G:M|$ 是合数$\}$;

$\mathscr{F}^p(G)=\{M \mid M \in \mathscr{F}(G)$ 且 $N_G(P) \leqslant M$, 其中 P 为 G 的某个 Sylow p- 子群$\}$;

$\mathscr{F}_p(G)=\{M \mid M \in \mathscr{F}(G)$ 且 $|G:M|_p=1\}$;

$\mathscr{F}_{pc}(G)=\mathscr{F}_p(G) \cap \mathscr{F}_c(G)$;

$\mathscr{F}^{pcn}(G)=\mathscr{F}^p(G) \cap \mathscr{F}_c(G) \cap \mathscr{F}_n(G)$.

定理 1 设 G 是一个群, p 是 $|G|$ 的最大素因子. 则 G 是可解群的充分必要条件是 $\mathscr{F}_{pc}(G)$ 中的每个元在 G 中有次正规 SS- 补.

证 由文献[3] 的定理 3.3, 必要性显然成立.

我们假定 $\mathscr{F}_{pc}(G)$ 中的每个元在 G 中有次正规 SS- 补. 假设定理 1 结论不成立, 且设 G 为极小阶反例, 我们按下列步骤证明定理:

步骤 1 $\mathscr{F}_{pc} \neq \varnothing$.

如果 $\mathscr{F}_{pc}(G)=\varnothing$, 根据文献[10] 的定理 8, G 可解, 矛盾.

步骤 2 G 有唯一的极小正规子群 N, 且 G/N 可解.

由步骤 1 知, 存在 $M \in \mathscr{F}_{pc}(G)$. 根据定理 1 的假设, M 在 G 中有次正规 SS- 补, 即存在 G 的一个次正规子群 K, 满足 $G=MK$, 且 $M \cap K$ 在 K 中是 S- 拟正规的. 如果 $K=G$, 我们有 $M \trianglelefteq G$, G 非单群. 如果 $K<G$, G 有真正规子群包含 K, G 也非单群. 设 N 是 G 的一个极小正规子群, 且 $M/N \in \mathscr{F}_{pc}(G/N)$, 显然 $M \in \mathscr{F}_{pc}(G)$. 应用引理 1, M/N 在 G/N 中有次正规 SS- 补, 这意味着 G/N 满足定理 1 的假设. 根据 G 的极小性, G/N 可解. 因为可解群类是饱和群系, 所以 N 是 G 唯一的极小正规子群.

步骤 3 最后的矛盾.

如果 N 可解, 显然 G 可解, 矛盾. 因此不妨假设 N 非可解. 设 q 是 $|N|$ 的最大素因子, $Q \in \mathrm{Syl}_q(N)$. 由 Frattini 论断, $G=N_G(Q)N$. 因为 $N_G(Q)<G$, 所以存在 G 的极大子群 M, 使得 $N_G(Q) \leqslant M$ 且 $N \nleqslant M$. 显然 $M_G=1$. 根据定理 1 的假设, $p \geqslant q$. 如果 $p>q$, 那么

$$|G:M|_p=|N:M \cap N|_p=1$$

如果 $p=q$, 那么 $N_G(Q)$ 包含 G 的一个 Sylow p- 子群. 无论在哪种情况下, 我们都有 $|G:M|_p=1$, 即 $M \in \mathscr{F}_p(G)$. 如果 $|G:M|=r$, 其中 r 为某个素数. 因为 $M_G=1$, 所以 $G/M_G \cong G \lesssim S_r$. 这意味着 $|N| \,\big|\, r!$, 矛盾于 q 是 $|N|$ 的最大素因子. 于是 $M \in \mathscr{F}_{pc}(G)$.

根据定理 1 的假设, M 在 G 中有次正规 SS- 补, 即存在 G 的次正规子群 K, 满足 $G=MK$, 且 $M \cap K$ 在 K 中是 S- 拟正规的. 应用引理 2, $M \cap K \trianglelefteq\trianglelefteq G$. 如果 $M \cap K \neq 1$, 设 L 是包含于 $M \cap K$ 的 G 的极小次正规子群. 因为 $N \trianglelefteq G$, 所以 $L \cap N \trianglelefteq L$. 根据 L 的极小性, $L \cap N=1$ 或 $L \leqslant N$. 由引理 3, $N \leqslant N_G(L)$, 即 N 正规化 L. 如果

$$L \cap N=1 \qquad NL=N \times L$$

且 N 非交换, 那么

$$L \leqslant C_G(N)=1$$

矛盾. 如果

$$L \leqslant N \qquad L^G=L^{NM}=L^M \leqslant M_G=1$$

那么 $L=1$, 矛盾. 因此 $M \cap K=1$. 同理, 设 L 是 G 的极小次正规子群. 因为 $L \cap N \trianglelefteq L$, 所以 $L \cap N=1$ 或 $L \leqslant N$. 如果 $L \cap N=1$, 同理得 $L=1$, 矛盾. 于是 $L \leqslant N$, 即 G 的所有极小次正规子群都包含于 N. 因为 N 是 G 的极小正规子群且不可解, 所以 N 为同构非交换单群的直积. 设 $N=N_1 \times \cdots \times N_r$, 显然 $N_1, \cdots, N_r$ 为 G 的所有极小次正规子群. 不失一般性, 我们可以假设 $N_1 \leqslant K$. 故存在素数 q 整除 $|K|=|G:M|$. 根据文献[11] 的引理 3, N 可解, 矛盾.

以下的推论是显然的:

推论 1[3]　群 G 可解当且仅当 G 的每个极大子群有次正规 SS- 补.

根据另外一些极大子群的 SS- 可补性，我们可以得到有限群的 p- 可解性：

定理 2　设 G 是一个群，p 是 $|G|$ 的最大素因子. 如果 $\mathscr{F}^{pcn}(G)$ 中的每个元在 G 中有次正规 SS- 补，那么 G 是 p- 可解的.

证　假设结论不成立，且设 G 为极小阶反例，我们按下列步骤证明定理：

步骤 1　$\mathscr{F}^{pcn}(G) \neq \varnothing$.

如果 $\mathscr{F}^{pcn}(G) = \varnothing$，那么根据文献[12]的引理 2.4，$G$ 是 p- 可解的，矛盾.

步骤 2　G 有唯一的极小正规子群 N，且 G/N 是 p- 可解的.

由步骤 1 知，存在 $M \in \mathscr{F}^{pcn}(G)$，根据定理 2 的假设，$M$ 在 G 中有次正规 SS- 补，即存在 G 的一个次正规子群 K，满足 $G = MK$，且 $M \cap K$ 在 K 中是 S- 拟正规的. 应用引理 2，$M \cap K \trianglelefteq\trianglelefteq G$. 如果 $K = G$，我们有 $M \trianglelefteq G$，G 非单群. 如果 $K < G$，G 有真正规子群包含 K，G 也非单群. 设 N 是 G 的一个极小正规子群，由引理 1，G/N 满足定理 2 的假设. 根据 G 的极小性，G/N 是 p- 可解的. 如果 G 有两个不同的极小正规子群 N_1 和 N_2，那么 G/N_1 和 G/N_2 是 p- 可解的. 因此 $G/N_1 \cap N_2 \cong G$ 是 p- 可解的，矛盾. 所以 N 是 G 唯一的极小正规子群.

步骤 3　最后的矛盾.

如果 N 是 p- 群或 p'- 群，显然 G 是 p- 可解的，矛盾. 设

$$N_p \in \mathrm{Syl}_p(N) \qquad N_p \neq 1 \qquad N_p \neq N$$

根据 Frattini 论断，$G = N_G(N_p)N$. 设 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，使得 $N_p = P \cap N$. 因为 $N_G(N_p) \neq G$，所以存在 G 的极大子群 M，使得

$$N_G(P) \leqslant N_G(N_p) \leqslant M \qquad N \not\leqslant M$$

因此 $M \in \mathscr{F}^{p}(G)$，$M_G = 1$. 显然 $|G:M|_p = 1$. 如果 $|G:M| = r$，其中 r 为某个素数，因为 $M_G = 1$，所以 $G/M_G \cong G \lesssim S_r$. 这意味着 $|N| \,\big|\, r!$，矛盾于 p 的极大性. 因此 $M \in \mathscr{F}^{pc}(G)$. 我们断言 $M \in \mathscr{F}^{pcn}(G)$. 事实上，如果 $M \in \mathscr{F}^{pc}(G)$ 且 M 是幂零的. 根据文献[8]的定理 10.4.2，M 是偶数阶群，即 M 的 Sylow 2- 子群 $M_2 \neq 1$. 设 $M_{2'}$ 是 M 的 Hall $2'$- 子群. 如果 $M_{2'} = 1$，我们有 $p = 2$，G 是一个 2- 群，矛盾. 因此 $M_{2'} \neq 1$. 由文献[13]的定理 1，$M_{2'} \trianglelefteq G$. 因为 P char $M_{2'}$，所以 $P \trianglelefteq G$，从而 G 是 p- 可解的，矛盾. 于是 $M \in \mathscr{F}^{pcn}(G)$.

根据定理 2 的假设，M 在 G 中有次正规 SS- 补，即存在 G 的次正规子群 K，满足 $G = MK$，且 $M \cap K$ 在 K 中是 S- 拟正规的. 应用引理 2，$M \cap K \trianglelefteq\trianglelefteq G$. 如果 $M \cap K \neq 1$，设 L 是包含于 $M \cap K$ 的 G 的极小次正规子群. 因为 $N \trianglelefteq G$，所以 $L \cap N \trianglelefteq L$. 根据 L 的极小性，$L \cap N = 1$ 或 $L \leqslant N$. 由引理 3，$N \leqslant N_G(L)$，即 N 正规化 L. 如果

$$L \cap N = 1 \qquad NL = N \times L$$

且 N 非交换，那么

$$L \leqslant C_G(N) = 1$$

矛盾. 如果

$$L \leqslant N \qquad L^G = L^{NM} = L^M \leqslant M_G = 1$$

可得 $L = 1$，矛盾. 因此 $M \cap K = 1$. 同理，设 L 是 G 的极小次正规子群. 因为 $L \cap N \trianglelefteq L$，所以 $L \cap N = 1$ 或 $L \leqslant N$. 如果 $L \cap N = 1$，同理可得 $L = 1$，矛盾. 所以 $L \leqslant N$，即 G 的所有极小次正规子群都包含于 N. 因为 N 是 G 的极小正规子群且不可解，所以 N 是同构非交换单群的直积. 不妨设 $N = N_1 \times \cdots \times N_r$，显然 $N_1, \cdots, N_r$ 为 G 的所有极小次正规子群. 因为

$$M \in \mathscr{F}^{pcn}(G) \qquad |K| = |G:M| \leqslant |G:N_G(P)| \leqslant |G:P|$$

所以 $p \nmid |K|$. 又因为 $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$，不妨设 $N_1 \leqslant K$，$p \,\big|\, |N|$，所以 $p \,\big|\, |N_1|$. 于是 $p \,\big|\, |K|$，矛盾.

参考文献：

[1]　KEGEL O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler Endlicher Gruppen [J]. Mathematische Zeitschrift, 1962, 78(1):

205-221.

[2] 黄 宇,宋科研. 用不可补子群个数刻画单群 A_5 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2018,40(12):90-93.

[3] GUO X Y,LU J K. On SS-Supplemented Subgroups of Finite Groups and Their Properties [J]. Glasg Math J,2012,54(3):481-491.

[4] LU J K,QIY Y Y. On Solvability of Finite Groups with Some *ss*-Supplemented Subgroups [J]. Czechoslovak Math J,2015,65(140):427-433.

[5] 常 健,刘建军. 有限群的 *SS*-可补子群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2018,43(10):1-4.

[6] 蹇 祥,吕 恒. 具有极大正规化子的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2016,38(12):56-60.

[7] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. New York-Berlin:Springer-Verlag,1967.

[8] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. Springer:New York,1982.

[9] DOERK D,HAWKES T. Finite Soluble Groups [M]. Berlin:Walter de Gruyter,1992.

[10] MUKHERJEE N,BHATTACHARYA P. On the Intersection of a Class of Maximal Subgroups of a Finite Group [J]. Canad J Math,1987,39(3):603-611.

[11] BAER R. Classes of Finite Groups and Their Properties [J]. Illinois J Math,1957,1(2):115-187.

[12] GUO X Y,SHUM K. Cover-Avoidance Properties and the Structure of Finite Groups [J]. J Pure Appl Algebra,2003,181(2-3):297-308.

[13] ROSE J. On Finite Insoluble Groups with Nilpotent Maximal Subgroups [J]. J Algebra,1977,48(1):182-196.

The Solvability of Finite Groups and the *SS*-Supplementarity of Partial Maximal Subgroups

YUAN Yuan[1], CHANG Jian[2], LIU Jian-jun[2]

1. *School of Finance, Rongzhi College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 401320, China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

Abstract: A subgroup H of a group G is said to be SS-supplemented in G, if there exists a subgroup K of G such that $G=HK$ and $H\cap K$ is S-quasinormal in K. In this paper, some sufficient conditions for solvability and p-solvability of finite groups are obtained by using the SS-supplementarity of partial maximal subgroups.

Key words: SS-supplemented subgroup; maximal subgroup; solvable group; p-solvable group

责任编辑 廖 坤