第 45 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 4 月
Vol. 45 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.002

单群 A_8 与 $L_3(4)$ 的新刻画①

刘 鑫[1], 杨 梅[2], 晏燕雄[1]

1. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715;
2. 重庆电子工程职业学院 通识教育与国际学院,重庆 401331

摘要: 众所周知,有限群的特征标维数图对群的结构有重要的影响. Huppert 猜想提出:有限非交换单群能够被它的所有不可约特征标维数集所刻画. 利用群的特征标维数刻画群的结构是研究有限群的一个重要方法. 继续这一相关问题的研究,研究了群的特征标维数幂图与群结构的关系,并利用群的阶与群的不可约特征标维数幂图成功地刻画了单群 A_8 和 $L_3(4)$.

关 键 词: 单群;群的阶;特征标维数

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)04-0005-04

本文涉及的群均为有限群,特征标为复特征标. $\mathrm{Irr}(G)$ 表示群 G 的所有不可约特征标的集合,$\mathrm{cd}(G)=\{\chi(1):\chi\in\mathrm{Irr}(G)\}$ 表示群 G 的所有不可约特征标维数的集合,$\rho(G)$ 表示 G 不可约特征标维数的所有互异素数因子的集合,$\mathrm{Out}(G)$ 表示群 G 的外自同构群. 设 n 为正整数,p 为素数,$\pi(n)$ 表示整除 n 的所有互异素因子集合,n_p 是整除 n 的最大的 p 的方幂. 特别地,

$$\pi(G)=\pi(|G|) \qquad \beta(G)=\beta(|G|)$$
$$\beta(|G|)=\{|G|_p:p\in\pi(G)\}$$

对任意 $p\in\rho(G)$,令

$$p^{e_p(G)}=\max\{\chi(1)_p:\chi\in\mathrm{Irr}(G)\}$$
$$V(G)=\{p^{e_p(G)}:p\in\rho(G)\}$$

给定群 G,定义 G 的维数幂图 $\Gamma(G)$ 如下:以 $V(G)$ 作为图 $\Gamma(G)$ 的顶点,两顶点 $x,y\in V(G)$ 有边相连当且仅当存在 $m\in\mathrm{cd}(G)$ 使得 $xy\mid m$,并记为 $x\sim y$,令 $E(G)$ 是 $V(G)$ 所有边的集合. 如果存在 $p\in\pi(G)$ 使得 $\chi(1)_p=|G|_p$,则称 χ 为 p- 亏零的. 其它未说明的符号和术语都是标准的(见文献[1-2]).

2000 年,Huppert 提出如下猜想:

Huppert 猜想[3] 设 M 是非交换单群,如果群 G 满足 $\mathrm{cd}(G)=\mathrm{cd}(M)$,则 $G\cong M\times A$,其中 A 是交换群.

Huppert 猜想指出:有限非交换单群 M 能够被它的所有不可约特征标维数集刻画. 猜想证明了单群 $L_2(q)$ 和 $S_z(q)$,及 Mathieu 等 19 个散在单群都成立[3-5],且文献[6-7]证明了 3 个散在单群 Co_1,Co_2,Co_3 也满足猜想,但 Huppert 猜想至今未被完全证明. 文献[8-10]在减弱猜想的条件下提出用群的阶与其最高阶不可约特征标维数刻画单群,成功刻画了 K_3- 单群和 Mathieu,Janko 等大部分散在单群. 然而,很多单群被证明不能用群的阶与其最高阶不可约特征标维数去唯一刻画. 文献[11]提出了群 G 的维数图 $\Delta(G)$. 文献[12]证明了许多单群能被它的阶和维数图唯一刻画. 文献[13]证明了并非所有非交换单群都能被 $|G|$

① 收稿日期:2019-12-15
基金项目:国家自然科学基金项目(11171364,11271301);中央高校专项基金项目(XDJK2019C116,XDJK2019B030);西南大学教改项目(2018JY061).
作者简介:刘 鑫(1996-),女,硕士研究生,主要从事有限群的研究.
通信作者:晏燕雄,副教授.

和 $\Delta(G)$ 唯一决定，并证明了散在单群 M_{12} 不能由它的维数图和群的阶唯一确定. 文献[14]提出维数幂图的概念，且证明了：所有的Mathieu群能被群的阶和维数幂图唯一刻画. 本文继续了这一问题的研究，特别研究了阶相同的两个非交换单群 A_8 和 $L_3(4)$，主要结果如下：

定理1　设 G 是有限群，$G \cong L_3(4)$ 当且仅当 $|G| = |L_3(4)|$ 和 $\Gamma(G) = \Gamma(L_3(4))$.

定理2　设 G 是有限群，$G \cong A_8$ 当且仅当 $|G| = |A_8|$ 和 $\Gamma(G) = \Gamma(A_8)$.

为证明定理1、定理2，还需要下面的引理：

引理1[1]　设 $N \lhd G$，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. 若 $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi_N)$，则 $(\chi(1)/\theta(1)) \,\Big|\, |G:N|$.

由引理1立即得到：

引理2　设 $N \lhd \lhd G$，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. 若 $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi_N)$，则 $(\chi(1)/\theta(1)) \,\Big|\, |G:N|$.

定理1的证明

必要性是显然的，下面证充分性.

由假设及文献[2]有

$$|G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$V(G) = \{2^6,\ 3^2,\ 5,\ 7\}$$

及

$$E(G) = \{3^2 \sim 5,\ 3^2 \sim 7,\ 5 \sim 7\}$$

由文献[14]可得

$$O_2(G) = O_3(G) = O_5(G) = O_7(G) = 1$$

且群 G 不可解. 由文献[14]知，存在 G 的正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 K/H 同构于非交换单群的直积，且 $|G/K| \,\Big|\, |\mathrm{Out}(K/H)|$. 由群 G 的阶及文献[2]知，K/H 只能同构于下述单群之一：A_5，$L_3(2)$，A_6，$L_2(8)$，A_7，A_8 或 $L_3(4)$.

情形1　$K/H \ncong A_5$

若 $K/H \cong A_5$，则由

$$|A_5| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad |\mathrm{Out}(A_5)| = 2$$

及文献[14]知

$$|G/K| \,\Big|\, 2 \qquad |K| = 2^{\alpha} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

其中 $\alpha = 5, 6$. 从而

$$|H| = 2^t \cdot 3 \cdot 7 \qquad t = 3, 4$$

由文献[14]知，H 非可解. 再根据引理2，可得 $3 \sim 7 \in E(H)$. 由文献[1]的定理2.3，有

$$|H| = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(H)} \theta(1)^2 > (3 \cdot 7)^2$$

矛盾.

情形2　$K/H \ncong L_3(2)$

若 $K/H \cong L_3(2)$，则由

$$L_3(2) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \qquad |\mathrm{Out}(L_3(2))| = 2$$

及文献[14]知

$$|G/K| \,\Big|\, 2 \qquad |K| = 2^{\alpha} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad \alpha = 5, 6$$

从而 $|H| = 2^t \cdot 3 \cdot 5$，其中 $t = 2, 3$. 由文献[14]知，H 非可解. 再根据引理2，得 $3 \sim 5 \in E(H)$. 由文献[1]的定理2.3，有

$$|H| = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(H)} \theta(1)^2 > (3 \cdot 5)^2$$

矛盾.

情形3　$K/H \ncong A_6$

若 $K/H \cong A_6$，则由

$$A_6 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad |\mathrm{Out}(A_6)| = 4$$

及文献[14] 知

$$|G/K| \,\big|\, 4 \qquad |K| = 2^{\alpha} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad \alpha = 4,5,6$$

故 $|H| = 2^t \cdot 7$，其中 $t = 1,2,3$. 由文献[14] 知，H 非可解，显然矛盾.

情形 4　$K/H \ncong L_2(8)$

若 $K/H \cong L_2(8)$，则由

$$L_2(8) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$|\mathrm{Out}(L_2(8))| = 3$$

及文献[14] 知

$$|G/K| \,\big|\, 3 \qquad |K| = 2^6 \cdot 3^{\alpha} \cdot 5 \cdot 7 \qquad \alpha = 1,2$$

根据 $L_2(8)$ 的阶，则 $\alpha = 2$，因此 $|H| = 2^3 \cdot 5$. 由文献[14] 知，H 非可解，矛盾.

情形 5　$K/H \ncong A_7$

若 $K/H \cong A_7$，则由

$$|A_7| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad |\mathrm{Out}(A_7)| = 2$$

及文献[14] 知

$$|G/K| \,\big|\, 2 \qquad |K| = 2^{\alpha} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad \alpha = 5,6$$

从而 $|H| = 2^t$，其中 $t = 2,3$.

当 $t = 2$ 时，$|H| = 4$，则 H 为循环群或交换群. 但根据文献[14] 知，H 非可解，矛盾. 当 $t = 3$ 时，$|H| = 8$，由文献[14] 可得，存在 $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ 使得 $\theta(1)_2 = |H|_2$，从而 $2^3 \mid \theta(1)$. 由文献[1] 的定理 2.3 知

$$|H| = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(H)} \theta(1)^2 > 2^6$$

矛盾.

情形 6　$K/H \ncong A_8$

若 $K/H \cong A_8$，则通过阶的比较有 $G \cong A_8$. 但根据文献[2]，有 $3^2 \cdot 7 \notin \mathrm{cd}(A_8)$，矛盾于 $E(G)$ 的结构.

情形 7　$K/H \cong L_3(4)$

通过比较阶可得 $G \cong L_3(4)$.

定理 2 的证明

必要性是显然的，下面证充分性.

由假设及文献[2] 得

$$|G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad V(G) = \{2^6,\ 3^2,\ 5,\ 7\}$$

及

$$E(G) = \{3^2 \sim 5,\ 5 \sim 7\}$$

由文献[14] 可得

$$O_2(G) = O_3(G) = O_5(G) = O_7(G) = 1$$

且群 G 不可解. 再根据文献[14]，可知 G 中存在极小正规子群 N，且 N 为非交换单群. 由文献[2] 及群 G 的阶，N 只能同构于以下单群之一：A_5，$L_3(2)$，A_6，$L_2(8)$，A_7，A_8 或 $L_3(4)$. 由 N/C 定理，$G/N \lesssim \mathrm{Out}(N)$.

如果 $N \cong A_5$ 或 $N \cong A_6$，由

$$|\mathrm{Out}(A_5)| = 2 \qquad |\mathrm{Out}(A_6)| = 2^2$$

则 $|G/N| \,\big|\, 2^2$，从而 $7 \nmid |G|$，矛盾. 同理，$N \ncong L_3(2), L_2(8)$.

如果 $N \cong A_7$，由

$$|\mathrm{Out}(A_7)| = 2 \qquad |G/N| \,\big|\, |\mathrm{Out}(N)|$$

可知

$$|G| = 2^{\mu} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad \mu = 3,4$$

但 $|G|_2 = 2^6$，矛盾.

如果 $N \cong L_3(4)$，比较群 G 的阶得 $G \cong L_3(4)$. 但 $3^2 \cdot 7 \in \mathrm{cd}(L_3(4))$(见文献[2])，矛盾于 $E(G)=\{3^2 \sim 5, 5 \sim 7\}$.

因此 $N \cong A_8$，比较群 G 的阶得 $G \cong A_8$.

参考文献:

[1] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York: Academic Press, 1976.

[2] CONWAY J H, CURTIS R T, NORTON S P, et al. Atlas of Finite Groups [M]. New York: Clarendon Press, 1985.

[3] HUPPERT B. Some Simple Groups Which Are Determined by the Set of Their Character Degrees I [J]. Illinois J Math, 2000, 44(4): 828-842.

[4] HUPPERT B, BLACKBURN N. Finite Groups II [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[5] HUPPERT B, BLACKBURN N. Finite Groups III [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[6] ALAVI S H, DANESHKHAH A, TONG-VIET H P, et al. Huppert's Conjecture for Fi_{23} [J]. Rend Semin Math Univ Padova, 2011, 126: 201-211.

[7] ALAVI S H, DANESHKHAH A, TONG-VIET H P, et al. On Huppert's Conjecture for the Conway and Ficsher Families of Sporadic Simple Groups [J]. Journal of the Australia Math Soc, 2013, 94(3): 289-303.

[8] 徐海静. 群的特征标性质与群的结构研究 [D]. 重庆: 西南大学, 2011.

[9] XU H J, CHEN G Y, YAN Y X. A New Characterization of Simple K_3-Groups by Their Orders and Large Degrees of Their Irreducible Characters [J]. Communications in Algebra, 2014, 42(12): 5374-5380.

[10] XU H J, YAN Y X, CHEN G Y. A New Characterization of Mathieu Groups by the Order and One Irreducible Character Degree [J]. Ineq Appl, 2013(1): 209.

[11] MANZ O, STASZEWSKI R, WILLEMS W. On the Number of Components of a Graph Related to Character Degrees [J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 103(1): 31-37.

[12] KHOSRAVI B. Recognition of Some Simple Groups by Character Degree Graph and Order [J]. Math Rep(Bucur), 2016, 18(1): 51-61.

[13] HEYDARI S, AHANJIDEH N. Some Simple Groups Which Are Determined by Their Character Degree Graphs [J]. Sib lektron Mat, 2016, 13: 1290-1299.

[14] QIN C, YAN Y X, SHUM K, et al. Mathieu Groups and Its Degree Prime-Power Graphs [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(10): 4173-4180.

A New Characterization of Simple Group A_8 and $L_3(4)$

LIU Xin[1], YANG Mei[2], YAN Yan-xiong[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. School of General Education and International Studies, Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China

Abstract: It is well known that the character dimension graph of a finite group has an important influence on the structure of a group. The Huppert's conjecture proposed that all finite non-abelian simple groups can be characterized by the set of their irreducible character degrees. It is an important method to characterize the structure of a finite group by using its characteristic dimension. In this paper, we continue to investigate this topic, and study the relationship between the dimension power graph and the structure of a finite group. In particular, we successfully characterize the simple group A_8 and $L_3(4)$ by their order and dimension power graph.

Key words: simple group; order of finite group; character degree

责任编辑 廖 坤