DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.003

不存在恰有 15 个 Sylow 7-子群的有限群[①]

钟凌锋，　周　伟

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 运用极小反例来确定群的阶和它的 Sylow 7-子群的阶，利用初等方法证明了不存在恰有 15 个 Sylow 7-子群的有限群.

关　键　词： Sylow p-子群；Sylow 定理；共轭

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2020)04-0009-04

设 p 为一个素数. Sylow 定理告诉我们：若 $p^n \parallel |G|$，则 G 中必存在 p^n 阶子群. 这样的子群叫作 G 的 Sylow p- 子群，并且 G 的所有 Sylow p- 子群的个数 $n_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 文献[1-3] 利用 Sylow 定理刻画一些阶较小的有限群. 一个模 p 同余于 1 的数是否一定为某个有限群 G 的所有 Sylow p- 子群的个数？文献[4] 利用有限群的模表示证明了：不存在恰有 22 个 Sylow 3- 子群的有限群，不存在恰有 21 个 Sylow 5- 子群的有限群，不存在恰有 $n = 3p + 1 (p \geqslant 7)$ 个 Sylow p- 子群的有限群. 文献[5] 进行了系统的研究，证明了 Huppert 猜想. 文献[6] 进一步推广了文献[5] 中关于 Sylow 的研究成果. 本文利用初等方法证明：不存在恰有 15 个 Sylow 7- 子群的有限群.

定理 1　不存在恰有 15 个 Sylow 7- 子群的有限群.

为证明定理 1，需要下面的引理：

引理 1[7]　设 p 是奇素数，α 是 A_{2p} 中两个不相交的 p- 轮换的乘积，则 $|C_{A_{2p}}(\alpha)| = p^2$.

引理 2[8]　假定 G 有交换的 Sylow p- 子群，则必存在 $P, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$，使得 $P \cap Q = O_p(G)$.

引理 3[9]　设 P 为群 G 的 p- 子群，且 $|P| = p$，则 $N_G(P)/C_G(P)$ 同构于阶整除 $p-1$ 的循环群.

引理 4[9]　若 $|G| = 2n$，n 为奇数，则 G 必可解.

引理 5[10]　设 G 是有限群，$n_p(G) > 1$. 若 S, T 是 G 的两个不同的 Sylow p- 子群且满足 $|S \cap T|$ 最大，则 $n_p(G) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ |S : S \cap T|)$.

引理 6[11]　若 G 有一个循环的 Sylow 2- 子群，那么 G 有一个指数为 2 的正规子群.

引理 7[12]　可解群的极小正规子群 N 是初等交换 p- 群.

定理 1 的证明

令 G 为极小反例，$n_7(G) = 15$.

首先说明 G 在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上的共轭作用是忠实的，且 $G \leqslant A_{15}$.

令 K 是 G 通过共轭作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上的核. 考虑群 G/K，则

① 收稿日期：2019-10-09
基金项目：国家自然科学基金项目(11671324).
作者简介：钟凌锋(1995-)，男，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：周　伟，副教授.

$$\mathrm{Syl}_7(G/K)=\{PK/K: P\in \mathrm{Syl}_7(G)\}$$

对任意的 $P,Q\in \mathrm{Syl}_7(G)$，且 $P\neq Q$，我们证明：若 $PK=QK$，则 $P=Q$. 假设 $PK=QK$，因为 K 是 G 通过共轭作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上的核，所以对任意的 $k\in K$，都有 $P^k=P$，则 $P\trianglelefteq PK$. 从而 P 是 PK 的唯一 Sylow 7- 子群. 同理可得 Q 是 QK 的唯一 Sylow 7- 子群. 因 $PK=QK$，故 $P=Q$. 这就说明当 P,Q 为 G 的两个不同的 Sylow 7- 子群时，有 $PK/K\neq QK/K$. 从而 $n_7(G/K)=15$. 故由群 G 的极小性得 $K=1$. 因此，G 忠实地作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上.

由同态基本定理可以知道 $G\leqslant S_{15}$. 因为 $|S_{15}:A_{15}|=2$，所以 S_{15} 的所有 7- 元素都在 A_{15} 中，从而群 G 的每一个 Sylow 7- 子群在 A_{15} 中. 进一步得到 $G\cap A_{15}$ 含有 G 的所有 Sylow 7- 子群，即 $n_7(G\cap A_{15})=15$. 故由群 G 的极小性得 $G\leqslant A_{15}$.

取定 $P\in \mathrm{Syl}_7(G)$，下面说明 $|P|=7$.

因为 $|S_{15}|=15!$，所以由拉格朗日定理可以得到 $|P|\,\big|\,7^2$. 于是 P 是交换群. 因为 $O_7(G)$ 等于 G 的所有 Sylow 7- 子群的交，从而 $O_7(G)$ 在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上的作用是平凡. 由于 G 忠实地作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上，所以 $O_7(G)=1$. 由引理 2 可得，存在 $Q\in \mathrm{Syl}_7(G)$ 使得 $P\cap Q=1$. 因为 $Q\trianglelefteq N_G(Q)$，所以 Q 是 $N_G(Q)$ 的唯一 Sylow p- 子群. 又由于 $N_P(Q)$ 是 $N_G(Q)$ 的 p- 子群，所以

$$N_P(Q)\leqslant P\cap Q=1$$

从而 P 通过共轭作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上的 Q 的轨道长度为 $|P:N_P(Q)|$，因此

$$|P|=|P:N_P(Q)|\leqslant 15<7^2$$

则 $|P|=7$.

利用 P 的阶，我们确定群 G 的阶.

因为 $|P|=7$，所以 P 是素数阶循环群，则

$$P\leqslant C_G(P)\leqslant N_G(P)$$

又因为 $N_G(P)$ 是 P 的正规化子，所以 $N_G(P)$ 通过共轭作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上保持 P 不动，从而得到 $N_G(P)\leqslant S_{14}$. 又因 $N_G(P)\leqslant A_{15}$，因此

$$P\leqslant C_G(P)\leqslant N_G(P)\leqslant S_{14}\cap A_{15}=A_{14}$$

由 $|P|=7$，下面证明 P 通过共轭作用在 $\mathrm{Syl}_7(G)$ 上的轨道长度为 1,7,7. 由轨道-稳定子定理可得轨道长度是 1 或者 7. 显然 P 所在轨道长度为 1. 假设 $T\in \mathrm{Syl}_7(G)(T\neq P)$ 所在轨道长度是 1，则对任意的 $x\in P$，有 $T^x=T$，故 $P\leqslant N_G(T)$. 又因 T 是 $N_G(T)$ 的唯一 Sylow 7- 子群，而显然 P 是 $N_G(T)$ 的 Sylow 7- 子群，则 $T=P$，矛盾于 T 的取法. 因此，只有一个轨道长度为 1. 又由于 $n_7(G)=15$，故轨道长度为 1,7,7.

令 $P=\langle\alpha\rangle$，则 α 是 A_{14} 中两个不相交的 7- 轮换的乘积. 下面我们证明 $C_G(\alpha)=C_{A_{14}}(\alpha)\cap G$. 显然

$$C_G(\alpha)\geqslant C_{A_{14}}(\alpha)\cap G$$

下证

$$C_G(\alpha)\leqslant C_{A_{14}}(\alpha)\cap G$$

对任意的 $x\in C_G(P)$，有 $x\in A_{14}$，从而 $x\in C_{A_{14}}(\alpha)$，因此

$$C_G(\alpha)=C_{A_{14}}(\alpha)\cap G$$

由引理 1 可得 $|C_{A_{14}}(\alpha)\cap G|\,\big|\,p^2$，故 $C_G(\alpha)$ 为 p- 群，又因 P 是交换群，故 $P\leqslant C_G(\alpha)$. 从而 $P=C_G(P)$.

接下来，由引理 3 得

$$N_G(P)/C_G(P)=N_G(P)/P\lesssim C_6$$

则

$$|N_G(P)/C_G(P)|=1,2,3,6$$

从而

$$|G| = 3\cdot 5\cdot 7\cdot |N_G(P)/P|$$

若 $|N_G(P)/C_G(P)| = 1$，此时 $|G| = 3\cdot 5\cdot 7$. 由 Sylow 定理得，Sylow 5- 子群的个数 $n_5 = 1, 21$. 当 $n_5 = 1$ 时，则 G 存在正规的 Sylow 5- 子群 T. 这样 PT 是阶为 $5\cdot 7$ 的子群. 继续用 Sylow 定理可得 P 是 PT 唯一的 Sylow 7- 子群，则有 $P \trianglelefteq PT$，即 $PT \leqslant N_G(P)$. 进一步得 $T \leqslant N_G(P)$. 从而 $|G : N_G(P)| < 15$ 矛盾. 当 $n_5 = 21$ 时，则 G 有 21 个 Sylow 5- 子群，它们都是循环群，因此每两个 Sylow 5- 子群的交只含单位元，从而 G 恰有 84 个 5 阶元. 同理 G 恰有 90 个 7 阶元，而 $|G| = 105$，显然矛盾.

若 $|N_G(P)/C_G(P)| = 2$，此时 $|G| = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. 因为

$$|N_G(P)/C_G(P)| = 2$$

则

$$N_G(P)/C_G(P) \cong C_2$$

因为 $|G : N_G(P)| = 15$ 是奇数，所以 $N_G(P)$ 含有 G 的 Sylow 2- 子群. 因为 G 有循环的 Sylow 2- 子群，由引理 5 得，G 存在正规子群 N，且 $|N| = 3\cdot 5\cdot 7$. 应用 Sylow 定理得，N 至少存在 1 个 G 的 Sylow 7- 子群，不妨记为 P_1. 则对任意的 $g \in G$，都有 $P_1^g \leqslant N^g = N$，由 Sylow 第二定理得，N 包含 G 的每一个 Sylow 7- 子群，则矛盾于群 G 的极小性.

若 $|N_G(P)/C_G(P)| = 3$，此时 $|G| = 3^2\cdot 5\cdot 7$. 若 $n_3(G) = 1$，则 G 存在正规的 Sylow 3- 子群 T. 这样 PT 是阶为 $3^2\cdot 7$ 的子群. 继续用 Sylow 定理可得 P 是 PT 唯一的 Sylow 7- 子群，则有 $P \trianglelefteq PT$，即 $PT \leqslant N_G(P)$，进一步得 $T \leqslant N_G(P)$. 从而 $|G : N_G(P)| < 15$ 矛盾. 若 $n_3(G) > 1$，则由 Sylow 定理得 $n_3(G) = 7$. 令 S, T 是 G 的两个不同的 Sylow 3- 子群且满足 $|S \cap T|$ 最大，则由引理 4 得

$$7 \equiv 1 \pmod{|S : S \cap T|}$$

故有 $|S \cap T| = 3$. 令 $D = S \cap T$，由于 S, T 是交换群，故 $D \trianglelefteq S, T$. 这就推出 $S, T \leqslant N_G(D)$. 从而 $N_G(D)$ 中恰有 7 个 Sylow 3- 子群. 故 $|N_G(D)| = 7\cdot 9$ 或者 $|N_G(D)| = 7\cdot 9\cdot 5$.

当 $N_G(D) = G$ 时，则 $D \trianglelefteq G$. 故 $M = PD$ 是阶为 $3\cdot 7$ 的子群. 由 Sylow 定理得 P 是 M 唯一的 Sylow 7- 子群，则 $P \trianglelefteq M$. 因此

$$M = PD = P \times D$$

考虑群 G/D，则

$$\mathrm{Syl}_7(G/D) = \{PD/D : P \in \mathrm{Syl}_7(G)\}$$

对任意的 $P, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$，且 $P \neq Q$，我们证明若 $PD = QD$，有 $P = Q$. 假设 $PD = QD$，因为 $P \trianglelefteq PD$，所以 P 是 PD 唯一的 Sylow 7- 子群. 同理，Q 是 QD 唯一的 Sylow 7- 子群. 又因 $PD = QD$，故 $P = Q$. 这就说明 G/D 的 Sylow 7- 子群的个数等于 G 的 Sylow 7- 子群的个数，则矛盾于群 G 的极小性.

当 $|N_G(D)| = 7\cdot 9$ 时，则由 Sylow 定理得 $P \trianglelefteq N_G(D)$. 这就推出 $N_G(D) \leqslant N_G(P)$. 从而

$$|G : N_G(P)| \leqslant |G : N_G(D)| = 5$$

矛盾.

最后只需讨论 $|N_G(P)/C_G(P)| = 6$ 的情形. 此时 $|G| = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$. 由引理 6 可得，$G$ 是可解群. 设 N 是 G 的极小正规子群. 由引理 7 得 N 是初等交换 p- 群，因此 $|N| = 7, 5, 3, 2, 9$.

当 $|N| = 7$ 时，由于 $N \trianglelefteq G$，则 G 有一个正规的 Sylow 7- 子群，从而 G 有唯一的 Sylow 7- 子群，显然矛盾.

当 $|N| = 5$ 时，由于 $N \trianglelefteq G$，则 $M = PN$ 是阶为 $5\cdot 7$ 的子群. 由 Sylow 定理可得 P 是 M 唯一的 Sylow 7- 子群，则 $P \trianglelefteq M$. 因此

$$M = PN = P \times N$$

考虑群 G/N，则

$$\mathrm{Syl}_7(G/N) = \{PN/N : P \in \mathrm{Syl}_7(G)\}$$

对任意的 $P, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$，且 $P \neq Q$，我们证明若 $PN = QN$，有 $P = Q$. 假设 $PN = QN$，因为 $P \trianglelefteq PN$，所以 P 是 PN 唯一的 Sylow 7- 子群. 同理，Q 是 QN 唯一的 Sylow 7- 子群. 又因 $PN = QN$，故 $P = Q$. 这就说明 G/N 的 Sylow 7- 子群的个数等于 G 的 Sylow 7- 子群的个数，矛盾于群 G 的极小性.

同理，$|N| = 3, 2, 9$ 可得到矛盾.

参考文献：

[1] 李春艳，陈贵云. 同阶子群个数之集为{1，3，4}的有限群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：54-59.

[2] 陈 梦，陈贵云. 最高阶元的阶为5及Sylow 2-子群的阶为2，4，8时的有限群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：52-55.

[3] 陈 梦，刘正龙，陈贵云. 最高阶元的阶为7及Sylow 2-子群的阶为8的有限群的结构[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：22-25.

[4] HALL M J R. On the Number of Sylow Subgroups in a Finite Group[J]. Journal of Algebra，1967，7(3)：363-371.

[5] ZHANG J P. Sylow Numbers of Finite Groups[J]. Journal of Algebra，1995，176(1)：111-123.

[6] 沈如林，史江涛，邵长国，等. 有限群Sylow子群的个数的一个注记[J]. 上海大学学报(自然科学版)，2010，16(6)：639-642.

[7] SAMBALE B. Pseudo Sylow Numbers[J]. American Mathematical Monthly，2019，126(1)：60-65.

[8] BRODEKY J S. A Note on Finite Groups with an Abelian Sylow Group[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1963，14(1)：132-133.

[9] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京：科学出版社，2001.

[10] ISAACS I. Finite Group Theory[M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，2008.

[11] 丘维声. 近世代数[M]. 北京：北京大学出版社，2015.

[12] KURZWEIL H，STELLMACHER B. 有限群论导引[M]. 施武杰，李士恒，译. 北京：科学出版社，2009.

There Exists No Finite Group with Exactly 15 Sylow 7-Subgroups

ZHONG Ling-feng， ZHOU Wei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we use minimal counterexamples to determine the order of the group and its Sylow 7-subgroups，by elementary methods，prove that there exists no finite group with exactly 15 Sylow 7-subgroups.

Key words：Sylow p-subgroup；Sylow theorem；conjugate

责任编辑 廖 坤