DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.004

NIC-平面图中轻风筝的存在性①

田京京

陕西理工大学 数学与计算机科学学院,陕西 汉中 723000

摘要: 将 $K_{1,3}$ 任意两点连接起来所形成的图形称为风筝. 设 H 是一个连通图,$\hat{G}$ 是一个图类,如果对任意的 $G \in \hat{G}$,G 包含一个子图 K,K 同构于图 H,且满足

$$\max_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_h < \infty \qquad \sum_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_w < \infty$$

那么称 H 为 $\hat{G}$ 的轻子图. 如果 H 是一个风筝,就称 H 为轻风筝. 利用权转移方法研究了 NIC- 平面图中轻风筝的存在性,证明了每个最小度至少为 5 并且最小边度至少为 11 的 NIC- 平面图含有一个最大度至多为 29 的风筝.

关 键 词: NIC-平面图;权转移;风筝

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)04-0013-08

大数据和云计算的应用快速推动社会的发展,改善和提高了人类生活水平. 图论是数学中的一个分支,由于在表述各种关系时它具有强大的能力和高效的算法,因而它在大数据分析中被广泛运用. 无论是图论的理论研究,还是被广泛应用于互联网领域的图染色以及标号模型[1-6],都是以图的结构为基础的. 因而图的结构问题被许多专家认为是图论研究的核心问题. 对于图结构的研究,首先是结构的存在性问题.

一个图被称为 1-平面图当且仅当它可以画在一个平面上,使得它的任何一条边最多交叉另外一条边. 1-平面图的结构比平面图复杂,得到的结果相对较少. 为了方便研究,1-平面图被一些学者分出两个子类,即 IC-平面图与 NIC-平面图. NIC-平面图的概念是由文献[7-8]提出的.

最早研究轻子图存在性的学者是 Kotzig,他于 1955 年在文献[9]中证明了:任意的 3-连通平面图包含一条边,且与这条边所关联的两顶点的度之和至多为 13. 但是轻子图的概念却是由文献[10]给出的. 对于 1-平面图中轻子图的研究十分有限. 文献[11]证明了:每个 3-连通的 1-平面图含有一条轻边,且轻边的高度的上界为 20;最小度至少为 6 的 1-平面图包含一个 3-圈 uvw 且 $\max\{d(u), d(v), d(w)\} \leqslant 10$. 文献[12]证明了:最小度至少为 6 的 1-平面图包含一个 4-圈,且 4-圈上的点的度至多为 47. 文献[13]证明了:在最小度至少为 5 并且最小边度至少为 12 的 1-平面图类中存在轻 3-圈,且 3-圈上的点的度至少为 7 至多为 20. 对于 NIC-平面图中子图的存在性问题[13],文献[14]证明了:最小度至少为 5 的 NIC-平面图包含一个轻 3-圈,且 3-圈上的点的度数至多为 26.

本文只考虑简单的有限无向图. 设 G 是一个平面图,分别用 $V(G)$,$E(G)$,$F(G)$,$\Delta(G)$,$\delta(G)$ 来表示它的点集合、边集合、面集合、最大度和最小度[15]. 与点 u 关联的边的条数为点 u 的度,记为 $d(u)$.

G 中任意一条边 uv 所关联的点 u,v 的度的和 $d(u)+d(v)$ 称之为边 uv 的度[15]. 用 k^-,k^+-和 k^--点或面分别表示一个点或面的度为 k,至少为 k 和至多为 k. 将 $K_{1,3}$ 中任意两点连接起来所形成的图形称为风筝. 其余文中未标注出处的定义,参考文献[15].

---

① 收稿日期:2019-08-22

基金项目:国家自然科学基金项目(11461038);陕西理工大学博士启动基金项目(SLGQD-1806).

作者简介:田京京(1979-),女,副教授,主要从事图论及其应用的研究.

本文用权转移方法证明每个最小度至少为 5 并且最小边度至少为 11 的 NIC-平面图中存在轻风筝且风筝上的点的度数至多为 29.

定义 1[7-8] 在 1-平面图 G 中，c_1, c_2 是 G 中的两个交叉点，若满足 $|S(c_1) \cap S(c_2)| \leqslant 1$，则称 G 为 NIC-平面图.

定义 2[7-8] 设 G 是 NIC-平面图. 如果将 G 中的所有交叉点全部看成是 4 度点，则可得到一个交叉数为 0 的图 $G^{\times}$，称图 $G^{\times}$ 为 G 的关联图. 设 v 是图 $G^{\times}$ 中的一个点，如果 $v \in V(G^{\times}) \backslash V(G)$，则称 v 是 $G^{\times}$ 的假点，或称 v 是 G 的交叉点. 如果图 $G^{\times}$ 的一个面 f 关联至少一个假点，则称 f 为 $G^{\times}$ 的假面，否则称 f 为 $G^{\times}$ 的真面. 设 v 是 $G^{\times}$ 中的 k-点，$v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是 v 在 $G^{\times}$ 中按顺时针排列的所有邻点. 在 $G^{\times}$ 中与边 vv_i 和 vv_{i+1} 关联的面记为 f_i，其中 $1 \leqslant i \leqslant k$，并记 $v_{k+1} = v_1$.

定义 3[11,13] 设 H 是连通图，$\hat{G}$ 是图类，如果任意的 $G \in \hat{G}$，G 包含子图 K，K 同构于图 H，且满足 $\max\limits_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_h < \infty$ 或 $\sum\limits_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_w < \infty$，那么称 H 为 $\hat{G}$ 的轻子图，若 t_h 是满足 $\max\limits_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_h < \infty$ 的最小整数，则称 t_h 为 H 在图类 $\hat{G}$ 中的高度.

定理 1 每个最小度至少为 5 并且最小边度至少为 11 的 NIC-平面图含有一个风筝 K_3^+，且

$$\max\{d(v_1), d(v_2), d(v_3), d(v_4)\} \leqslant 29$$

证 用反证法来证明定理 1. 假设定理 1 不真，那么存在一个反例 $G^{\times}$，$G^{\times}$ 是 G 的关联图. 它所含有的任意一个风筝 K_3^+ 满足 $\max\{d(v_1), d(v_2), d(v_3), d(v_4)\} > 30$.

给 $G^{\times}$ 中的每个点 v 赋初始权值为 $c(v) = d(v) - 6$，同时给 $G^{\times}$ 中的每个面 f 赋初始权值为 $c(f) = 2d(f) - 6$，利用平面图 $G^{\times}$ 上的欧拉公式，得出

$$\sum_{x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})} c(x) = -12 < 0$$

下面将对 $V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$ 上的所有元素按下列规则重新分配权值:

(R1) 设 $f = xyz$ 是 $G^{\times}$ 中的 3-面，且 x 是 30^+-点.

(R1.1) 若 y 是 4-点，$xy \in E(G)$，则 x 向 y 转移 $\frac{2}{3}$；特别地，xy 关联两个 3-面，则 x 向 y 转移 1.

(R1.2) 若 y 是 5-点，则 x 向 y 转移 $\frac{1}{3}$.

(R1.3) 若 f 是真 3-面，且 yz 关联另一个 3-面 $f' = yzs$，其中 s 是假 4-点，则 x 通过边 yz 向 s 转移 $\frac{1}{2}$.

(R1.4) 若 f 是假 3-面，且 y 是假 4-点，yz 关联另一个 3-面 $f' = yzs$，其中 s 是 5-点，则 x 通过边 yz 向 s 转移 $\frac{1}{6}$.

(R2) 设 f 是 $G^{\times}$ 中的 4^+-面.

(R2.1) f 向它关联的假 4-点转移 $\frac{2}{3}$，向它关联的 5-点转移 $\frac{1}{3}$.

(R2.2) 若 f 的某条边 xy 关联 3-面 $f' = xys$，且 s 是 4-点，则 f 通过 xy 向 s 转移 $\frac{1}{3}$.

(R2.3) 若 f 的某条边 xy 关联 3-面 $f' = xys$，且 s 是 5-点，则 f 通过 xy 向 s 转移 $\frac{1}{6}$.

设 $c'(x)$ 为元素 $V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$ 在应用以上权转移规则后得到的新权值，下面证明对于每个 $x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$，都有 $c'(x) \geqslant 0$. 因此

$$-12 = \sum_{x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})} c(x) = \sum_{x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})} c'(x) \geqslant 0$$

这是一个矛盾.

首先，验证对于任意的 $f \in F(G^{\times})$，有 $c'(f) \geqslant 0$.

若 $d(f) = 3$，则由(R1) 和(R2) 知 $c'(f) = c(f) = 0$.

若 $d(f)=4$，则由 NIC-平面图的定义可知面 f 至多关联 1 个假 4-点．若面 f 关联假 4-点 v_1，其余点分别记为 v_2,v_3,v_4，由最小边度至少为 11 知，此时面 f 关联至多 2 个 5-点，此时(R2.2) 作用面 f 2 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{2}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 2=0$$

若面 f 不关联假 4-点，由任意一条 K_3^+ 含有 1 个大点知，此时面 f 至少关联 2 个大点．若这 2 个大点相邻，则规则(R2.3) 作用于面 f 1 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 1>0$$

若这 2 个大点不相邻，则此时规则(R2.3) 作用于面 f 2 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 2=0$$

若面 f 关联 3 个大点，则此时规则(R2.3) 作用于面 f 3 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times 3>0$$

若面 f 关联 4 个大点，则此时规则(R2.3) 作用于面 f 4 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times 4=0$$

若 $d(f)=5$，则由 NIC-平面图的定义可知面 f 至多关联 2 个假 4-点．若面 f 关联 2 个假 4-点 v_1,v_3，则此时边 $v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4,v_5v_1$ 除了关联面 f 外分别还关联含有真 4-点的 3-面，边 v_4v_5 除了关联面 f 外还关联含有假 4-点的 3-面．由任意一条 K_3^+ 含有20^+-点知，v_2 和 v_4 是20^+-点．因此(R2.2) 与(R2.3) 共作用于面 f 5 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times 4=0$$

若面 f 不关联假 4-点，则由任意一条 K_3^+ 含有30^+-点知，面 f 至少关联 2 个20^+-点，且这 2 个点不相邻．面 f 的外部面中有至多 5 个假 3-面，或 2 个假 3-面和 3 个真 3-面，因此规则(R2.3) 最多作用于面 f 5 次，再结合(R2.1) 得

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times 3-\frac{1}{2}\times 5=0$$

若 $d(f)\geqslant 6$，则由 NIC-平面图的定义可知面 f 最多关联$\left\lfloor \frac{1}{2}d(f)\right\rfloor$个假 4-点．若面 f 关联假 4-点，那么至多再关联$\left\lfloor \frac{2}{3}\left(d(f)-\left\lfloor \frac{1}{2}d(f)\right\rfloor\right)\right\rfloor$个真 4-点，因此由规则(R2.1),(R2.2),(R2.3) 可知

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times\left\lfloor \frac{1}{2}d(f)\right\rfloor-\frac{1}{2}\times\left\lceil \frac{2}{3}\left(d(f)-\left\lfloor \frac{1}{2}d(f)\right\rfloor\right)\right\rceil-d(f)>0$$

若面 f 不关联假 4-点，那么至多关联 $d(f)$ 个真 4-点，因此由规则(R2.1),(R2.2),(R2.3) 可知

$$c'(f)\geqslant 2d(f)-6-\frac{1}{2}\times d(f)-\frac{1}{2}\times d(f)>0$$

接下来，验证对于任意的 $v\in V(G^\times)$ 有 $c'(v)\geqslant 0$.

由规则(R1),(R2) 知，图 $G^\times$ 中的度数大于等于 6 且小于等于 29 的点不参与权转移，从而当 $6\leqslant d(v)\leqslant 29$ 时，有 $c'(v)=d(v)-6\geqslant 0$

因此，只考虑以下 3 种情况：

情况 1　$d(v)=4$.

情况 1.1　设 v 是真 4-点.

情况 1.1.1　若 v 至少关联 3 个 4^+-面，由(R2.1) 知 f_1,f_2,f_3,f_4 分别向 v 转移$\frac{2}{3}$，因此

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 3 = 0$$

情况 1.1.2 若 v 关联 2 个 4^+ -面，分为如下情况讨论：

当 2 个 4^+ -面相邻时，不妨设其为 f_1, f_2. 由于 $G^{\times}$ 是一个反例，v_1, v_2, v_3, v_4 中至少有 1 个点是 30^+ -点. 若 v_1 或 v_3 是 30^+ -点，由(R1.1) 知 v_1 或 v_3 向 v 转移 $\frac{2}{3}$，由(R2.1) 知 f_1, f_2 分别向 v 转移 $\frac{2}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 1 = 0$$

若 v_4 是 30^+ -点，由(R1.1) 知 v_4 向 v 转移 1，由(R2.1) 知 f_1, f_2 分别向 v 转移 $\frac{2}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 2 + 1 \times 1 > 0$$

若 v_2 是 30^+ -点，则此时：与 $v_1 v_4$ 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f' = v_1 v_4 u$，其中 u 为 30^+ -点；与 $v_3 v_4$ 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f' = v_3 v_4 w$，其中 w 为 30^+ -点. 从而由(R1.3) 可知 w 和 u 分别向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R2.2) 可知 $v_1 v_4$ 关联的假 4^+ -面和 $v_3 v_4$ 关联的 4^+ -面分别向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R1.1) 知 v_2 不向 v 转值，由(R2.1) 知 f_1, f_2 分别向 v 转移 $\frac{2}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 > 0$$

当 2 个 4^+ -面不相邻时，不妨设其为 f_1, f_3. 若边 $v_1 v_4$ 和边 $v_2 v_3$ 关联的另外一个面均是 4^+ -面，则不存在轻风筝.

若边 $v_1 v_4$ 关联的另一个面是 3 -面，$v_2 v_3$ 关联的另外一个面是 4^+ -面，此时与 $v_1 v_4$ 关联的 3 -面 $f' = v_1 v_4 u$，其中 u 为 30^+ -点. 由(R1.3) 可知 u 向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R2.2) 可知 $v_2 v_3$ 关联的 4^+ -面向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R2.1) 知 f_1, f_2 分别向 v 转移 $\frac{2}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 > 0$$

若边 $v_1 v_4$ 关联的另一个面是 4^+ -面，$v_2 v_3$ 关联的另外一个面是 3 -面，情况与此相同.

若边 $v_1 v_4$ 和 $v_2 v_3$ 关联的另一个面均是 3 -面，则与 $v_1 v_4$ 关联的 3 -面记为 $f' = v_1 v_4 u$，其中 u 为 30^+ -点. 由(R1.3) 可知 u 通过 $v_1 v_4$ 向 v 转移 $\frac{1}{2}$.

同理，w 通过 $v_2 v_3$ 向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R2.1) 知 f_1, f_2 分别向 v 转移 $\frac{2}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 > 0$$

情况 1.1.3 若 v 仅关联一个 4^+ -面，不妨设其为 f_1，则 f_2, f_3 与 f_4 均为 3 -面.

由于图 G 不含轻 K_3^+，则 v_1, v_2, v_3, v_4 中至少有 1 个点是 30^+ -点. 若 v_1 是 30^+ -点，则此时：与 $v_1 v_4$ 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f' = v_1 v_4 u$，其中 u 为 30^+ -点；与 $v_3 v_4$ 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f' = v_3 v_4 w$，其中 w 为 30^+ -点. 从而由(R1.1) 知 v_1 向 v 转移 $\frac{2}{3}$，由(R1.3) 可知 u 和 w 分别向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R2.2) 可知 $v_1 v_4$ 关联的假 4^+ -面和 $v_3 v_4$ 联的 4^+ -面分别向 v 转移 $\frac{1}{2}$，由(R2.1) 知 f_1 向 v 转移 $\frac{2}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 > 0$$

由对称性知，v_2 是30^+ -点时与此情况相同.

若 v_3 是30^+ -点，则此时与 v_2v_3 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f'=v_2v_3w$，其中 w 为30^+ -点. 由(R1.1) 知 v_3 向 v 转移 1，从而由(R1.3) 可知 w 向 v 转移$\frac{1}{2}$，由(R2.2) 可知 v_2v_3 关联的假 4^+ -面向 v 转移$\frac{1}{2}$，故

$$c'(v)\geqslant d(v)-6+1\times1+\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{2}\times1>0$$

由对称性知，v_4 是30^+ -点时与此情况相同.

情况 1.1.4　若 v 仅关联 3 -面，即 f_1,f_2,f_3 与 f_4 均为 3 -面，由于 $G^\times$ 是一个反例，v_1,v_2,v_3,v_4 中至少有 1 个30^+ -点，不妨设为 v_1，由(R1.1) 知 v_3 向 v 转移 1. 而此时与 v_2v_3 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f'=v_2v_3w$，其中 w 为30^+ -点. 由(R1.3) 可知 w 向 v 转移$\frac{1}{2}$. 由(R2.2) 可知 v_2v_3 关联的假 4^+ -面向 v 转移$\frac{1}{2}$. 因此

$$c'(v)\geqslant d(v)-6+1\times1+\frac{1}{2}\times2=0$$

情况 2　$d(v)=5$.

情况 2.1　若 v 至少关联 2 个 4^+ -面，有如下两种情况：

当 2 个 4^+ -面相邻时，不妨设其为 f_1,f_2.

如果 f_1,f_2 都是 4 -面. 由 G 的 NIC -平面性可知 v_1,v_2,v_3,v_4 中至少有 2 个点是假 4 -点. 若恰好有 2 个点是假 4 -点，则 v_1,v_3 或 v_2,v_4，或 v_2,v_5 即是. 设 v_1,v_3 是假 4 -点. 由 $G^\times$ 是一个反例知，v_2,v_4,v_5 中有一个30^+ -点. 若 v_4 或 v_5 是30^+ -点，则根据(R1.2) 与(R2.1)，有

$$c'(v)\geqslant d(v)-6+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2=0$$

由于对称性知，当 v_2,v_5 是假 4 -点时，情况与此相同.

如果 f_1,f_2 中至少有 1 个 5^+ -面. 由 G 的 NIC -平面性可知 v_1,v_2,v_3,v_4 中至多有 2 个点是假 4 -点. 若恰好有 2 个点是假 4 -点，则 v_1,v_3，或 v_2,v_4，或 v_2,v_5，或 v_1,v_2 即是. 设 v_1,v_2 是假 4 -点. 由 $G^\times$ 是一个反例知，v_2,v_4,v_5 中有一个30^+ -点. 因此根据(R1.2) 与(R2.1)，有

$$c'(v)\geqslant d(v)-6+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2=0$$

v_1,v_3，或 v_2,v_4，或 v_2,v_5 是假 4 -点的情况与 f_1,f_2 都是 4 -面相同.

如果 f_1,f_2 都是 5^+ -面. 由 G 的 NIC- 平面性可知 v_1,v_2,v_3,v_4 中至多有 3 个点是假 4 -点. 由 $G^\times$ 是反例知 v_4,v_5 中有一个30^+ -点. 因此根据(R1.2) 与(R2.1)，有

$$c'(v)\geqslant d(v)-6+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2=0$$

否则：与 v_1v_5 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f'=v_1v_4u$，其中 u 为30^+ -点；与 v_3v_4 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是 3 -面 $f'=v_3v_4w$，其中 w 为30^+ -点. 由(R1.4) 可知 w 和 u 分别向 v 转移$\frac{1}{6}$，由(R2.3) 可知 v_3v_4 关联的 4^+ -面和 v_1v_5 关联的假 4^+ -面分别向 v 转移$\frac{1}{6}$，由(R2.1) 知 f_1,f_2 分别向 v 转移$\frac{1}{3}$，故

$$c'(v)\geqslant d(v)-6+\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{6}\times2=0$$

当 2 个 4^+ -面不相邻时，不妨设其为 f_1,f_3. 如果 f_1,f_2 都是 4 -面. 由 G 的 NIC -平面性可知 v_1,v_2,v_3,v_4 中至少有 2 个点是假 4 -点. 若恰好有 2 个点是假 4 -点，则 v_1,v_3，或 v_2,v_4，或 v_2,v_5 即是. 设 v_1,v_3 是假 4 -点. 由 $G^\times$ 是反例知 v_2,v_4,v_5 中有一个30^+ -点，因而 v_4 或 v_5 是30^+ -点. 因此根据(R1.2) 与(R2.1)，有

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 0$$

如果 f_1, f_2 中至少有1个 5^+ -面，由 G 的 NIC -平面性可知 v_1, v_2, v_3, v_4 中至多有2个点是假4 -点. 若恰好有2个点是假4 -点，则 v_1, v_3，或 v_2, v_4，或 v_2, v_5，或 v_1, v_2 即是. 设 v_1, v_2 是假4 -点，由 $G^{\times}$ 是反例知 v_2, v_4, v_5 中有一个 30^+ -点. 因此根据(R1.2)与(R2.1)，有

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 0$$

v_1, v_3，或 v_2, v_4，或 v_2, v_5 是假4 -点的情况与 f_1, f_2 都是4 -面相同.

如果 f_1, f_2 都是 5^+ -面. 情况与 f_1, f_2 中至少有1个 5^+ -面的情况相同.

情况2.2　若 v 仅关联1个 4^+ -面，不妨设其为 f_1，则 f_2, f_3, f_4 与 f_5 均为3 -面. 若 $d(f_1) = 4$，由 G 的 NIC -平面性可知 v 至多相邻2个 v_1, v_3 假4 -点.

若 v 相邻2个假4 -点，这2个假4 -点要么是 v_1, v_3，要么是 v_2, v_5. 不妨设为 v_1, v_3. 由于 $G^{\times}$ 是反例，v_2, v_4, v_5 中有一个 30^+ -点.

如果 v_2 是 30^+ -点，那么：与 v_1v_5 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是3 -面 $f' = v_1v_4u$，其中 u 为 30^+ -点；与 v_3v_4 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是3 -面 $f' = v_3v_4w$，其中 w 为 30^+ -点. 从而由(R1.4)可知 w 和 u 分别向 v 转移 $\frac{1}{6}$，由(R2.3)可知 v_3v_4 关联的 4^+ -面和 v_1v_5 关联的假 4^+ -面分别向 v 转移 $\frac{1}{6}$，由(R1.2)知 v_2 向 v 转移 $\frac{1}{3}$，由(R2.1)知 f_1 向 v 转移 $\frac{1}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = 0$$

v_2 或 v_5 是 30^+ -点的情况与此类似.

若 v 仅相邻1个假4 -点，则由 G 的 NIC -平面性可知它是 v_4，由于 $G^{\times}$ 是反例，v_1, v_2, v_3 与 v_5 中有2个 30^+ -点. 因此根据(R1.3)与(R2.3)，有

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 0$$

若 $d(f_1) = 5^+$，由 G 的 NIC -平面性可知，v 至多相邻2个假4 -点.

若 v 相邻2个假4 -点，这2个假4 -点要么是 v_1, v_3，要么是 v_2, v_5，要么是 v_1, v_2. 若这2个假4 -点是 v_1, v_3，或 v_2, v_5，情况与 $d(f_1) = 4$ 时相同，现在讨论这两个假4 -点是 v_1, v_2 的情况. 由于 $G^{\times}$ 是反例，则 v_3, v_4 与 v_5 中至少有1个 30^+ -点，不妨设为 v_4，此时：与 v_1v_5 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是3 -面 $f' = v_1v_4u$，其中 u 为 30^+ -点；与 v_2v_3 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是3 -面 $f' = v_3v_4w$，其中 w 为 30^+ -点. 由(R1.4)可知 w 和 u 分别向 v 转移 $\frac{1}{6}$，由(R2.3)可知 v_2v_3 关联的 4^+ -面和 v_1v_5 关联的假 4^+ -面分别向 v 转移 $\frac{1}{6}$，由(R1.2)知 v_2 向 v 转移 $\frac{1}{3}$，由(R2.1)知 f_1 向 v 转移 $\frac{1}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = 0$$

情况2.3　若 v 关联3 -面，由 G 的 NIC -平面性可知 v_1, v_2, v_3, v_4 与 v_5 中至多有1个假4 -点，不妨设为 v_4，由 $G^{\times}$ 是反例知，剩余的4个点中至少有2个 30^+ -点，不妨设为 v_1, v_2. 此时：与 v_4v_5 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是3 -面 $f' = v_4v_5u$，其中 u 为 30^+ -点；与 v_3v_4 关联的另外一个面要么是 4^+ -面，要么是3 -面 $f' = v_3v_4w$，其中 w 为 30^+ -点. 由(R1.4)可知 w 和 u 分别向 v 转移 $\frac{1}{6}$，由(R2.3)可知 v_3v_4 关联的 4^+ -面和 v_4v_5 关联的假 4^+ -面分别向 v 转移 $\frac{1}{6}$，由(R1.2)知 v_2 向 v 转移 $\frac{1}{3}$，由(R2.1)知 f_1 向 v 转移 $\frac{1}{3}$，故

$$c'(v) \geqslant d(v) - 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = 0$$

情况 3　$d \geqslant 30$.

不妨设 $f_{i_1}, f_{i_1+1}, \cdots, f_{i_1+t_1-1}, f_{i_2}, f_{i_2+1}, \cdots, f_{i_2+t_2-1}, \cdots, f_{ik}, f_{i_{k+1}}, \cdots, f_{i_k+t_k-1}$ 为与 v 关联的所有 3-面(它们在 v 的周围按顺时针排列)，其中当 $k \geqslant 2$ 时，对于所有的 $1 \leqslant s \leqslant k-1$，$f_{i_s+t_s-1}$ 与 $f_{i_{s+1}}$ 不相邻，并且 $f_{i_k+t_k-1}$ 与 f_{i_1} 亦不相邻．注意，我们是在模 d 的意义下进行上述下标中的加法运算的，并且当 $k=1$ 时，$f_{i_1+t_1-1}$ 与 f_{i_1} 可能相邻(此时与 v 关联的面全部都是 3-面)．显然，有

$$\sum_{s=1}^{k}(i_s+t_s) \leqslant d(v)$$

情况 3.1　若 v 仅关联 3-面，则由图 G 不含 K_3^+ 可知，在 $v_{i_1}, v_{i_1+1}, \cdots, v_{i_1+t_1}$ 中至多有 $\left\lfloor \frac{t_1+i_1}{3} \right\rfloor$(或写成 $\left\lfloor \frac{d(v)}{3} \right\rfloor$) 个 4-点和 $\left\lfloor \frac{1}{2}\left(d(v)-\left\lfloor \frac{d(v)}{3} \right\rfloor\right) \right\rfloor$ 个 5-点．另外依据 NIC-平面图的定义，v 通过边 $v_{i_1}v_{i_1+1}$，$v_{i_1+1}v_{i_1+2}, \cdots, v_{i_1+t_1-1}v_{i_1+t_1}$，最多向 $\left\lceil \frac{i_1+t_1}{3} \right\rceil$(或写成 $\left\lceil \frac{d(v)}{3} \right\rceil$) 个假 4-点转移权值，最多向 $\left\lceil d(v)-\left\lfloor \frac{d(v)}{3} \right\rfloor \right\rceil$ 个 5-点转移权值．按照规则(R1.1)，(R1.2)，(R1.3) 和(R1.4) 有

$$c'(v) \geqslant d(v)-6-1\times\left\lfloor \frac{d(v)}{3} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{1}{2}\left(d(v)-\left\lfloor \frac{d(v)}{3} \right\rfloor\right) \right\rfloor-\frac{1}{2}\times\left|\frac{d(v)}{3}\right|-\frac{1}{6}\times\left|d(v)-\left\lfloor \frac{d(v)}{3} \right\rfloor\right| \geqslant 0$$

情况 3.2　若 v 既关联 3-面又关联 4^+-面，则由图 G 不含轻风筝可知，对于所有的 $1 \leqslant s \leqslant k$，在 v_{i_s}，$v_{i_s+1}, \cdots, v_{i_s+t_s}$ 中至多有 $\left\lceil \frac{i_s+t_s}{3} \right\rceil$ 个假 4-点，有 $\left\lfloor \frac{1}{2}\left(d(v)-\left\lceil \frac{i_s+t_s}{3} \right\rceil\right) \right\rfloor$ 个 5-点．另外由 NIC-平面图的定义，v 通过边 $v_{i_s}v_{i_s+1}, v_{i_s+1}v_{i_s+2}, \cdots, v_{i_s+t_s-1}v_{i_s+t_s}$，最多向 $\left\lceil \frac{i_s+t_s}{3} \right\rceil$ 个 4-点转移权值，最多向 $\left\lceil d(v)-\left\lfloor \frac{i_s+t_s}{3} \right\rfloor \right\rceil$ 个 5-点转移权值．按照规则(R1.1)，(R1.2)，(R1.3) 和(R1.4) 有

$$c'(v) \geqslant d(v)-6-1\times\sum_{s=1}^{k}\left\lfloor \frac{i_s+t_s}{3} \right\rfloor-\frac{1}{3}\times\sum_{s=1}^{k}\left\lfloor \frac{1}{2}\left(d(v)-\left\lceil \frac{i_s+t_s}{3} \right\rceil\right) \right\rfloor-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\left\lceil \frac{i_s+t_s}{2} \right\rceil-\frac{1}{3}\times \sum_{s=1}^{k}\left\lceil d(v)-\left\lfloor \frac{i_s+t_s}{3} \right\rfloor \right\rceil > 0$$

由此得出最小度至少为 5 并且最小边度至少为 11 的 NIC 平面图是成立的，且 NIC-平面图含有一个风筝，其最大度至多为 29.

参考文献：

[1] LI J W, WANG C, WANG Z W. On the Adjacent Vertex-Distinguishing Equitable Edge Coloring of Graphs [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), 2013, 29(3): 615-622.

[2] 董　威，贾西贝，李小慧，等．随机图的邻点可区别 I-全染色算法 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：8-15.

[3] 李敬文，李小慧，董　威，等．随机图的点可区别全染色算法 [J]．计算机应用研究，2015，32(6)：1707-1710,1715.

[4] 江世明，李敬文，江红豆．图的点可区别边染色猜想的算法 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：47-54.

[5] 朱海洋，王淑玲，刘　嫚，等．平面图的单射染色 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(4)：7-13.

[6] 王文杰，黄丽娜，李沐春．T-型六角系统的点可区别边染色 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：77-82.

[7] CZAP J, ŠUGEREK P. Drawing Graph Joins in the Plane with Restrictions on Crossings [J]. Filomat, 2017, 31(2): 363-370.

[8] ZHANG X. Drawing Complete Multipartite Graphs on the Plane with Restrictions on Crossings [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), 2014, 30(12): 2045-2053.

[9] KOTZIG A. Contribution to the Theory of Eulerian Polyhedra [J]. Matematicko-Fyzikálny Časopis, 1955, 5(2): 101-113.
[10] JENDROL'S, MADARAS T, SOTÁK R, et al. On Light Cycles in Plane Triangulations [J]. Discrete Mathematics, 1999, 197: 453-467.
[11] FABRICI I, MADARAS T. The Structure of 1-Planar Graphs [J]. Discrete Mathematics, 2007, 307(7-8) : 854-865.
[12] HUDÁK D, MADARAS T. On Local Properties of 1-Planar Graphs with High Minimum Degree [J]. Ars Mathematica Contemporanea, 2011, 4(2): 245-254.
[13] ZHANG X. Light 3-Cycles in 1-Planar Graphs with Degree Restrictions [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2014, 51(2): 511-517.
[14] TIAN J, ZHANG X. Light Triangles in Plane Graphs with Near-Independent Crossings [J]. Utilitas Mathematica, 2015, 97: 399-405.
[15] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: Macmillan Education U K, 1976.

Existence of Light Kite in NIC-Planar Graphs

TIAN Jing-jing

School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, Hanzhong Shaanxi 723000, China

Abstract: The graph formed by connecting any two points in $K_{1,3}$ is called kite. Let $\hat{G}$ be a family of graphs and let H be a connected graph, such that at least one member of G contains a subgraph K, K isomorphic to H, such that

$$\max_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_h < \infty \qquad \sum_{x \in V(K)} \{d_{(G)}(x)\} \leqslant t_w < \infty$$

H is called a light subgraph of $\hat{G}$. If H is kite, then H is called light kite. By discharging method, the existence of light Kite in NIC-Planar Graphs is studied. It is proved that every NIC-planar graph with minimum vertex degree at least 5 and minimum edge degree at least 11 contains kite with maximum degree at most 29.

Key words: NIC-planar graph; discharging method; kite

责任编辑　廖　坤