第 45 卷 第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 4 月
Vol. 45 No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.005

临界问题在全空间上的无穷多解[①]

朱道宇[1]，　王　跃[2]，　储昌木[1]，　熊宗洪[1]

1. 贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025；2. 贵州大学 数学与统计学院，贵阳 550025

摘要：研究了全空间上一类临界增长的非局部问题古典解的存在性，通过特殊函数法，给出该问题无穷多古典正解的表达式，推广并丰富了已有文献的结果.

关　键　词：临界增长；非局部问题；特殊函数法；无穷多解

中图分类号：O175.23　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2020)04－0021－04

考虑如下非局部问题：

$$-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=g(x,u)\qquad x\in\Omega \tag{1}$$

已有大量文献描述了当 $a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0$，$g(x,u)$ 是二元连续函数，且 Ω 取不同情形时包含不同边界条件的方程(1) 的经典结果[1-8]. 方程(1) 因为含有 $\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 而被叫作非局部 Kirchhoff 方程. 这种问题的研究与下面的模型有关：

$$\varrho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(p_0+\frac{Eh}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

作为 d'Alembert 波动方程的推广，该模型由文献[9] 首次提出，主要描述了 ϱ,h,p_0,E,L 均为正时弹性弦的横向振动. 当描述某一时刻弦所处的位置与空间的关系时可以转化为方程(1) 的解. 近几年，有不少文献研究了当 $a>0>b$ 时方程(1) 解的存在性. 文献[10-11] 考虑了方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=u^3+\mu f(x)\qquad x\in\mathbb{R}^4$$

解的存在性和多重性，其中常数 $a>0>b$，μ 是非负参数，$f(x)$ 是连续函数. 利用变分方法中的山路引理和 Ekeland 变分原理，获得了当 $f(x)\in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是一个几乎处处大于 0 的函数，并且 $\mu>0$ 适当小时该方程至少存在 2 个正解. 特别地，当 $\mu=0$ 时，通过特殊函数法获得了无穷多古典解. 文献[11] 首次指出了：当 $a>0>b$ 时，方程(1) 是负模量的 Kirchhoff 问题. 文献[10] 对负模量的问题进行了深一步的阐述，这种问题的研究具有一定的价值. 文献[2] 在 $\mathbb{R}^3$ 上利用变分方法考虑含有 Hardy-Sobolev 临界指数的情形，当非线性项满足(AR) 条件时，获得了正解的存在性. 而对于定义在光滑有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的 0-Dirichlet 问题，文献[3] 利用临界点理论中的 Ekeland 变分原理和三解定理获得近共振情形下至少 3 个解的存在性. 文献[4-6] 利用变分方法研究了不同指数增长的情况，利用山路引理、Ekeland 变分原理、扰动方法等获得了多重正解的存在性.

受文献[1,10-11] 的启发，本文考虑如下临界增长的非局部问题：

---

① 收稿日期：2019－06－10
基金项目：国家自然科学基金项目(11861021，11661021)；贵州省教育厅基金项目(黔教合 KY 字[2016]029).
作者简介：朱道宇(1982－)，女，讲师，主要从事微分方程的研究.
通信作者：储昌木，教授.

$$\begin{cases} -\left(a-b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\beta}\right)\Delta u=|u|^{2^*-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{2}$$

多个古典正解的存在性，其中 $N\geqslant 3$，$a>0$，$b>0$，$\beta\in\mathbb{R}$，当 $\beta=0$ 时，$a>b$，$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$.

定理 1 假设 $N\geqslant 3$，$a>0$，$b>0$，那么对任意正实数 β，方程(2) 都有无穷多古典解；又当 $a>b>0$，$\beta=0$ 时，方程(2) 有无穷多古典解.

证 在 $N(N\geqslant 3)$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 上考虑临界增长的椭圆型方程

$$\begin{cases} -\Delta u=|u|^{2^*-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{3}$$

方程(3) 有一族古典解可以表述为

$$u_\varepsilon=[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{2-N}{2}} \tag{4}$$

其中 ε 是任意的正数，并且由于 ε 的任意性，使得方程(3) 有无穷多解 $u_\varepsilon\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

设 S 为嵌入 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cup L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ 的最佳常数，即

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

根据文献[12] 所述，对任意的 $\varepsilon>0$，上述的 u_ε 都能使 S 取到. 因此可以算得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x=S^{\frac{N}{2}} \tag{5}$$

对任意的 $\lambda>0$，令 $v_{\lambda_\varepsilon}=\lambda^{\frac{N-2}{4}}u_\varepsilon$，则 $u_\varepsilon=\lambda^{\frac{2-N}{4}}v_{\lambda_\varepsilon}$，因此 $-\lambda\Delta v_{\lambda\varepsilon}=v_{\lambda\varepsilon}^{\frac{N+2}{N-2}}$. 可以得出，当 $N\geqslant 3$ 时，对任意给定的 $\lambda>0$，方程

$$\begin{cases} -\lambda\Delta u=|u|^{2^*-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{6}$$

有一族古典解可以表述为

$$u_{\lambda_\varepsilon}=[\lambda N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{2-N}{2}} \tag{7}$$

再根据 $\varepsilon>0$ 的任意性可得出 u_{λ_ε} 有无穷多个. 根据(5) 式可以得出

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{\lambda_\varepsilon}|^2\mathrm{d}x=\lambda^{\frac{N-2}{2}}\lambda_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=S^{\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N-2}{2}}$$

现对 $\lambda\in(0,a)$，考虑方程

$$\lambda=a-b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{\lambda\varepsilon}|^2\mathrm{d}x\right)^{\beta}=a-b(S^{\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N-2}{2}})^{\beta}=a-bS^{\frac{N\beta}{2}}\lambda^{\frac{(N-2)\beta}{2}} \tag{8}$$

当 $N\geqslant 3$ 时，方程(8) 在区间(0，a) 中的解等价于如下定义的函数 $\varphi(\lambda)$ 的零点：

$$\varphi(\lambda)=bS^{\frac{N\beta}{2}}\lambda^{\frac{(N-2)\beta}{2}}+\lambda-a$$

显然，当 $\beta\geqslant 0$ 时，$\varphi\in C^1([0,a],\mathbb{R})$，并且

$$\varphi(0)=-a<0 \qquad \varphi(a)=bS^{\frac{N\beta}{2}}a^{\frac{(N-2)\beta}{2}}>0 \tag{9}$$

因此，根据连续函数的零点存在定理可知函数 $\varphi(\lambda)$ 在区间(0，a) 中必然存在至少 1 个零点 $\lambda=\lambda_{[abNS\beta]}$，亦即方程(8) 存在解 $\lambda_{[abNS\beta]}\in(0,a)$，使得

$$\lambda_{[abNS\beta]}=a-b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{[abNS\beta]\varepsilon}|^2\mathrm{d}x\right)^{\beta}$$

另外，根据(6)－(7) 式可知

$$\begin{cases} -\lambda_{[abNS\beta]}\Delta u=|u|^{2^*-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

有一族古典解可以表述为

$$u_{\lambda_{[abNS\beta]}\varepsilon}=[\lambda_{[abNS\beta]}N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{2-N}{2}} \tag{10}$$

因此有

$$\begin{cases}-\left(a-b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{\lambda_{[abNS\beta]}\varepsilon}|^2\mathrm{d}x\right)^{\beta}\right)\Delta u_{\lambda_{[abNS\beta]}\varepsilon}=|u_{\lambda_{[abNS\beta]}\varepsilon}|^{2^*-2}u_{\lambda_{[abNS\beta]}\varepsilon} & x\in\mathbb{R}^N\\ u_{\lambda_{[abNS\beta]}\varepsilon}\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\end{cases}$$

从而根据 $\varepsilon>0$ 的任意性得：方程(2)有无穷多个形如(10)式的解.

推论 1　假设 $N\geqslant 3$，$a>0$，$b>0$，那么对任意实数 $\beta<0$，当满足

$$[bS^{\frac{N\beta}{2}}]^{\frac{2}{2-(N-2)\beta}}\left[\frac{2}{(2-N)\beta}\right]^{\frac{(N-2)\beta}{(N-2)\beta-2}}+\left[\frac{2}{(2-N)b\beta S^{\frac{N\beta}{2}}}\right]^{\frac{2}{(N-2)\beta-2}}-a\leqslant 0 \tag{11}$$

时，方程(2)有无穷多古典解.

证　类似 $\beta\geqslant 0$ 时的情形，只需证明 $\varphi(\lambda)$ 有零点. 当 $\beta<0$ 时，有

$$\varphi'(\lambda)=\frac{(N-2)\beta}{2}bS^{\frac{N\beta}{2}}\lambda^{\frac{(N-2)\beta}{2}-1}+1$$

$\varphi'(\lambda)=0$ 时 $\varphi(\lambda)$ 有最小值点 $\lambda=\lambda_*$，此时

$$\lambda_*=\left[\frac{2}{(2-N)b\beta S^{\frac{N\beta}{2}}}\right]^{\frac{2}{(N-2)\beta-2}}=\left[\frac{2}{(2-N)b\beta}\right]^{\frac{2}{(N-2)\beta-2}}S^{\frac{N\beta}{2-(N-2)\beta}}<a$$

根据(11)式可得出

$$\varphi(\lambda_*)=[bS^{\frac{N\beta}{2}}]^{\frac{2}{2-(N-2)\beta}}\left[\frac{2}{(2-N)\beta}\right]^{\frac{(N-2)\beta}{(N-2)\beta-2}}+\left[\frac{2}{(2-N)b\beta S^{\frac{N\beta}{2}}}\right]^{\frac{2}{(N-2)\beta-2}}-a\leqslant 0$$

再根据(9)式可知 $\varphi(\lambda)$ 在(λ_*,a)上有零点. 故方程(2)有无穷多古典解.

下面给出几个具体例子：

例 1　当 $N\geqslant 3$，$a>b>0$ 且 $\beta=0$ 时，方程(2)变为如下方程：

$$\begin{cases}-(a-b)\Delta u=|u|^{2^*-2}u & x\in\mathbb{R}^N\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\end{cases}$$

此时 $\lambda_{[abNS\beta]}=a-b$，该方程有无穷多解可以表述为

$$u_{[a-b]\varepsilon}=[(a-b)N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{2-N}{2}}$$

例 2　当 $N=3$，$a>0$，$b>0$ 且 $\beta=1$ 时，方程(8)的解是 $\lambda=\left(\frac{\sqrt{b^2S^3+4a}-bS^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^2$. 因此

$$u_{\lambda\varepsilon}=\left(\frac{\sqrt{b^2S^3+4a}-bS^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}\varepsilon}{\varepsilon^2+|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

满足方程

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=u^5 & x\in\mathbb{R}^3\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\end{cases}$$

例 3　当 $N\geqslant 3$，$a>0$，$b>0$ 且 $\beta=\frac{2}{N-2}$ 时，方程(8)的解是 $\lambda=\frac{a}{bS^{\frac{N}{N-2}}+1}$. 因此

$$u_{\lambda\varepsilon}=\left(\frac{a}{bS^{\frac{N}{N-2}}+1}\right)^{\frac{N-2}{4}}\cdot\frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

满足方程

$$\begin{cases}-\left(a-b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N}{N-2}}\right)\Delta u=u^{\frac{N+2}{N-2}} & x\in\mathbb{R}^N\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\end{cases}$$

例 4　当 $N\geqslant 3$，$b>0$ 且 $\beta=\frac{2}{2-N}<0$ 时，存在 $M=2\sqrt{b}S^{\frac{N}{2(2-N)}}>0$，当 $a\geqslant M$ 时，方程(8)的解

是 $\lambda=\frac{1}{2}[a\pm(a^2-4bS^{\frac{N}{2-N}})^{\frac{1}{2}}]$. 因此

$$u_{\lambda\varepsilon}=\left(\frac{1}{2}[a\pm(a^2-4bS^{\frac{N}{2-N}})^{\frac{1}{2}}]\right)^{\frac{N-2}{4}}\cdot\frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

满足方程

$$\begin{cases}-\left(a-b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2-N}}\right)\Delta u=u^{\frac{N+2}{N-2}} & x\in\mathbb{R}^N\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\end{cases}$$

参考文献:

[1] 丁 凌,汪继秀,肖氏武. 全空间上具有临界指数的 Kirchhoff 类方程无穷多个正解的存在性 [J]. 南昌大学学报(理科版),2017,41(5):414-417.

[2] 王 跃,叶红艳,索洪敏. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的非局部问题正解的存在性 [J]. 应用数学,2019,32(2):452-456.

[3] 王 跃,梁金平,索洪敏. 一类非局部近共振问题多重解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2018,40(4):53-58.

[4] YIN G S,LIU J S. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Nonlocal Problem [J]. Boundary Value Problems,2015,2015:26.

[5] 李红英. 一类非局部问题的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2017,42(6):24-27.

[6] LEI C Y,CHU C M,SUO H M. Positive Solutions for a Nonlocal Problem with Singularity [J]. Electronic Journal of Differential Equations,2017,2017(85):1-9.

[7] LEI C Y,LIAO J F,SUO H M. Multiple Positive Solutions for a Class of Nonlocal Problems Involving a Sign-Changing Potential [J]. Electronic Journal of Differential Equations,2017,2017(9):1-8.

[8] 唐之韵,欧增奇. 一类非局部问题解的存在性与多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2018,40(4):48-52.

[9] KIRCHHOFF G R. Vorlesungen Über Matematische Physik:Mechanik [M]. Teubner:Leipzig,1876.

[10] 王 跃. 一类非局部问题解的存在性与多重性研究 [D]. 贵阳:贵州民族大学,2018.

[11] WANG Y,SUO H M,LEI C Y. Multiple Positive Solutions for a Nonlocal Problem Involving Critical Exponent [J]. Electronic Journal of Differential Equations,2017,2017(275):1-11.

[12] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Inc Boston MA:Birkhäuser Boston,1996.

Infinitely Many Solutions for Critical Problem on Whole Space

ZHU Dao-yu[1], WANG Yue[2],
CHU Chang-mu[1], XIONG Zong-hong[1]

1. School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract: The existence of classical solutions for a class of nonlocal problems with critical growth is studied on whole space, and the expressions of infinitely many classical positive solutions are given by using the method of special function. Some known results of literatures are expanded and enriched.

Key words: critical growth; nonlocal problem; method of special function; infinitely many solutions

责任编辑 廖 坤