第 45 卷 第 4 期 西 南 师 范 大 学 学 报(自然科学版) 2020 年 4 月
Vol. 45 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.006

具有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的多解性[①]

邵正梅, 欧增奇

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 考虑一类凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程. 通过对系数 a 和 λ 的限制, 得到泛函满足山路几何结构. 应用山路定理和一些引理, 证明了这类带有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程多个解的存在性.

关 键 词: Kirchhoff 方程; 凹凸非线性项; 山路定理

中图分类号: O176.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)04-0025-05

考虑如下一类具有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的多解性问题:

$$\begin{cases} -\left(a\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + b\right)\Delta u = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{p-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 在 $\mathbb{R}^N(N=1,2,3)$ 中是具有光滑边界的有界区域,

$$2 < q < 4 \qquad p = 4 \qquad a,b,\lambda > 0$$

系数函数 $f,g \in C(\tilde{\Omega})$. 方程(1) 的能量泛函 J_λ 为

$$J_\lambda(u) = \frac{a}{4}\|u\|^4 + \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_\Omega g(x)|u|^4 \mathrm{d}x \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

这里的 $H_0^1(\Omega)$ 是 Sobolev 空间, 它的范数为

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$L^p(\Omega)(1 \leqslant p < +\infty)$ 是 Lebesgue 空间, 它的范数为

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

我们用 $H^{-1}(\Omega)$ 来表示 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间, 用 S_r 表示 $H_0^1(\Omega)$ 嵌入到 $L^r(\Omega)(1 < r < 2^*)$ 的最佳 Sobolev 常数. 对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$|u|_r \leqslant S_r\|u\| \tag{2}$$

u 是方程(1) 的解当且仅当 u 是泛函 J_λ 的临界点, 即对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$a\|u\|^2\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + b\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x$$

关于 Kirchhoff 方程解的存在性和多重性已有很多的结果(文献[1-9]). 特别地, 文献[10] 研究了方程

---

① 收稿日期: 2019-10-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(11801465, 11971393).

作者简介: 邵正梅(1995-), 女, 硕士研究生, 主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者: 欧增奇, 副教授.

$$\begin{cases} -\left(a\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + b\right)\Delta u = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{p-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界的有界区域,

$$1 < q < 2 < p < 2^* \qquad 2^* = \frac{2N}{N-2} \qquad a, b, \lambda > 0$$

系数函数 $f, g \in C(\bar{\Omega})$ 满足

$$f^+ = \max\{f, 0\} \neq 0 \qquad g^+ = \max\{g, 0\} \neq 0$$

当 p 取不同值时,通过使用 Nehari 流形和截断函数,可以得到方程(3) 具有多个正解.

文献[11] 研究了方程

$$\begin{cases} -\left(a\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + b\right)\Delta u = \upsilon u^3 + \lambda |u|^{q-1}u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

其中 Ω 是有界区域,$a, b, \lambda, \upsilon > 0$,$0 < q < 1$. 应用极小极大值原理,当 $0 < \upsilon < b\upsilon_1$,$\lambda > 0$ 时,得到了方程(4) 有 1 个正的基态解. 应用 Nehari 流形,当 $\upsilon \geqslant b\upsilon_1$ 和 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ 时,得到了方程(4) 有 2 个正解. 受到这些结果的启发,我们将考虑方程(1) 的解的多重性.

考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\|u\|^2 \Delta u = \mu g(x) u^3 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

方程(5) 的第一特征值为

$$\mu_1 = \inf\left\{\|u\|^4 : \int_{\Omega} g(x)|u|^4 \mathrm{d}x = 1\right\}$$

φ_1 是第一特征值 μ_1 对应的特征函数,且 $\|\varphi_1\| = 1$.

设 $\{u_n\}$ 是 J_λ 在水平 c 处的(PS) 序列,即

$$J_\lambda(u_n) \to c \qquad J'_\lambda(u_n) \to 0$$

如果 J_λ 的每一个(PS) 序列都有一个强收敛的子序列,则称 J_λ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

定理 1 对于 $2 < q < 4$,$p = 4$,有:

(i) 当 $f(x) \geqslant 0$ 且不恒为 0,$g(x)$ 变号,$a > |g|_\infty S_4^4$ 时,存在 $\lambda_* > 0$,使得当 $\lambda > \lambda_*$ 时,方程(1) 至少有 2 个非平凡解;

(ii) 当 $f(x) \geqslant 0$ 且不恒为 0,$g(x) \leqslant 0$ 时,存在 $\lambda_{**} > 0$,使得当 $\lambda > \lambda_{**}$ 时,方程(1) 至少有 2 个非平凡解;

(iii) 当 $f(x) \leqslant 0$,$g(x)$ 变号,$0 < a < \dfrac{1}{\mu_1}$ 时,方程(1) 至少有 1 个非平凡解.

注 1 文献[1-2] 分别考虑的是 $1 < q < 2$ 且 $4 \leqslant p < 2^*$ 的情况,本文考虑的是 $3 < q < 4$ 和 $p = 4$ 的情况. 本文的结果是对文献[1-2] 的补充.

为了证明定理 1,我们需要下面的一些引理. 类似于文献[1] 的引理 3.1,我们有:

引理 1 当 $s > 0$,$m_0 > 0$,$(as + b) \geqslant m_0$ 时,泛函 J_λ 的有界的(PS) 序列都有一个强收敛的子序列.

证 设 $\{u_n\}$ 是 J_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界的(PS) 序列. 由紧嵌入定理,在 $H_0^1(\Omega)$ 上存在一个子序列,仍表示为 $\{u_n\}$,使得 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛于 u_0,$\{u_n\}$ 在 $L^r(\Omega)$ 中强收敛于 u_0. 所以

$$\int_{\Omega} (f(x)|u_n|^{q-2}u_n + g(x)|u_n|^2 u_n)(u_n - u_0)\mathrm{d}x \to 0$$

由于

$$J'_\lambda(u_n)(u_n - u_0) \to 0$$

则

$$(a\|u_n\|^2+b)\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n-u_0)\mathrm{d}x \to 0$$

由于$\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛于 u_0，有

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla(u_0-u_n)\mathrm{d}x \to 0$$

因为

$$a\|u_n\|^2+b>0$$

所以 u_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于 u_0.

引理 2[12]　设 X 是 Banach 空间. $J\in C^1(X,R)$ 有下界，且满足(PS) 条件，则 J 能达到最小值.

定理 1 的证明

(i) 当 $f(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0，$g(x)$ 变号时，首先由(2) 式，对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}J_\lambda(u)=&\frac{a}{4}\|u\|^4+\frac{b}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_\Omega g(x)|u|^4\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{4}\|u\|^4+\frac{b}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda S_q^q}{q}|f|_\infty\|u\|^q-\frac{S_4^4}{4}|g|_\infty\|u\|^4=\\&\left(\frac{a}{4}-\frac{|g|_\infty S_4^4}{4}\right)\|u\|^4+\left(\frac{b}{2}\|u\|^{2-q}-\frac{\lambda|f|_\infty S_q^q}{q}\right)\|u\|^q\end{aligned}$$

因为

$$a>|g|_\infty S_4^4\qquad 2<q<4$$

所以 J_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制且有下界. 在 $H_0^1(\Omega)$ 中取一点 u_1，使得

$$\int_\Omega g(x)|u_1|^q\mathrm{d}x>0$$

那么

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_1)=&\frac{a}{4}\|u_1\|^4+\frac{b}{2}\|u_1\|^2-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u_1|^q\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_\Omega g(x)|u_1|^4\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{a}{4}\|u_1\|^4+\frac{b}{2}\|u_1\|^2-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u_1|^q\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 $f(x)\geqslant 0$，从而存在

$$\lambda_*=\frac{q(a\|u_1\|^4+2b\|u_1\|^2)}{4\int_\Omega f(x)|u_1|^q\mathrm{d}x}$$

使得当 $\lambda>\lambda_*$ 时，有

$$J_\lambda(u_1)<0$$

根据引理 1、引理 2，以及泛函 J_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强制的，则泛函 J_λ 存在临界点 $u_*\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$J_\lambda(u_*)=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)}J_\lambda(u)\leqslant J_\lambda(u_1)<0$$

从而 u_* 是方程(1) 的非平凡解.

下面证明方程(1) 的第二个非平凡解的存在性. 根据(2) 式，我们有

$$\begin{aligned}J_\lambda(u)=&\frac{a}{4}\|u\|^4+\frac{b}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_\Omega g(x)|u|^4\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{4}\|u\|^4+\frac{b}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda|f|_\infty S_q^q}{q}\|u\|^q-\frac{|g|_\infty S_4^4}{4}\|u\|^4\geqslant\\&\frac{b}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda|f|_\infty S_q^q}{q}\|u\|^q-\frac{|g|_\infty S_4^4}{4}\|u\|^4\end{aligned}$$

由于 $2<q<4$，则存在 $\alpha>0$，$\rho>0$ 且 $\rho<\|u_*\|$，当 $\|u\|=\rho$ 时，$J_\lambda(u)>\alpha>0$. 由山路定理，存在序列$\{u_n\}\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$J_{\lambda}(u_n) \to c^* \qquad J'_{\lambda}(u_n) \to 0$$

其中

$$c^* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_{\lambda}(\gamma(t)) \geqslant \alpha > 0$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)): \gamma(0)=0, \gamma(1)=u_{**}\}$$

由引理1知泛函 J_{λ} 存在第二个临界点 u_{**}，且 $u_{**} \neq u_*$，即 u_{**} 是方程(1)的另一个非平凡解.

(ii) 当 $f(x) \geqslant 0$ 且不恒为0，$g(x) \leqslant 0$ 时，结论的证明与 $f(x) \geqslant 0$ 且不恒为0，$g(x)$ 变号时的证明类似，这里就不加证明了.

(iii) 当 $f(x) \leqslant 0$，$g(x)$ 变号时，由(5)式，有

$$J_{\lambda}(t\varphi_1) = \frac{1}{4}\left(a - \frac{1}{\mu_1}\right)t^4 \|\varphi_1\|^4 + \frac{b}{2}t^2\|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda}{q}t^q\int_{\Omega} f(x)\,|\varphi_1|^q \mathrm{d}x$$

因为

$$0 < a < \frac{1}{\mu_1} \qquad 2 < q < 4$$

当 t 足够大时，$J_{\lambda}(t\varphi_1) < 0$.

由(2)式和 $f(x) \leqslant 0$，则

$$J_{\lambda}(u) \geqslant \frac{b}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}|g|_{\infty} S_4^4 \|u\|^4$$

所以，存在 $\alpha_1 > 0$，$\rho_1 > 0$ 且 $\rho_1 < \|t\varphi_1\|$，当 $\|u\| = \rho_1$ 时，

$$J_{\lambda}(u) > \alpha_1 > 0$$

由山路定理，存在 J_{λ} 的(PS)序列 $\{u'_n\} \in H_0^1(\Omega)$，满足

$$J_{\lambda}(u'_n) \to c^{**} \qquad J'_{\lambda}(u'_n) \to 0$$

下面证明序列 $\{u'_n\}$ 是有界的. 由 $J_{\lambda}(u'_n) \to c^{**}$，有

$$\begin{aligned} c^{**} = & J_{\lambda}(u'_n) + o_n(1) = \\ & J_{\lambda}(u'_n) - \frac{1}{4}J'_{\lambda}(u'_n)u'_n + o_n(1) = \\ & \frac{b}{4}\|u'_n\|^2 - \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{4}\right)\int_{\Omega} f(x)\,|u'_n|^q \mathrm{d}x \geqslant \\ & \frac{b}{4}\|u'_n\|^2 \end{aligned}$$

所以，(PS)序列 $\{u'_n\}$ 是有界的. 根据引理1，存在收敛的子序列(仍表示为 $\{u'_n\}$)，和 $u_{***} \in H_0^1(\Omega)$，使得 u'_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于 u_{***}. 因此

$$J_{\lambda}(u_{***}) = c^{**} > 0 \qquad J'_{\lambda}(u_{***}) = 0$$

u_{***} 是方程(1)的非平凡解.

参考文献：

[1] ANCONA P D, SPAGNOLO S. Global Solvability for the Degenerate Kirchhoff Equation with Real Analytic Data [J]. Invent Math, 1992, 108(1): 247-262.

[2] RENATO M. On the Global Solvability of Kirchhoff Equation for Non-Analytic Initial Data [J]. J Differential Equations, 2005, 211(1): 38-60.

[3] NISHIHARA K. On a Global Solution of Some Quasilinear Hyperbolic Equation [J]. Tokyo J Math, 1984, 7(2): 437-459.

[4] 王雅琪，欧增奇. 带有凹凸非线性项的Kirchhoff型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：89-94.

[5] 刘选状，吴行平，唐春雷. 一类带有临界指数增长项的Kirchhoff型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：54-59.

[6] 曾　兰，唐春雷. 带有临界指数的 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：29-34.
[7] BROWN K J，WU T F. A Fibering Map Approach to a Semilinear Elliptic Boundary Value Problem [J]. Electron J Differential Equations，2007，69：249-266.
[8] BROWN K J，ZHANG Y. The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation with a Sign-Changing Weight Function [J]. J Differential Equations，2003，193(2)：481-499.
[9] ALVES C O，CORRÊA F J S A，MA T F. Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type [J]. Comput Math Appl，2005，49(1)：85-93.
[10] CHEN C Y，KUO T C，WU T F. The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions [J]. J Differential Equations，2011，250(4)：1876-1908.
[11] LIAO J F，ZHANG P，LIU J，et al. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class Kirchhoff Type Problems at Resonance [J]. Discrete Contin Dyn Syst (Ser S)，2016，9(6)：1959-1974.
[12] 钟承奎，范先令，陈文塬. 非线性泛函分析引论 [M]. 兰州：兰州大学出版社，1998：193.

Multiple Solutions for a Kirchhoff Type Equation Involving Concave-Convex Nonlinearities

SHAO Zheng-mei，　OU Zeng-qi
School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper considers a class of Kirchhoff type equations involving certain concave-convex nonlinearities. By limiting the coefficients a and λ，we can obtain function satisfies Mountian Pass geometry. Using Mountain Pass Theorem and some lemma，the existence of mutiple solutions is proved for the Kirchhoff type equation involving certain concave-convex nonlinearities.

Key words：Kirchhoff equation；concave-convex nonlinearities；Mountian Pass Theorem

责任编辑　廖　坤