DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.007

一类拟线性 Schrödinger 方程正解的存在性①

徐　宁，　储昌木

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要：对位势函数 V 和非线性项 h 作适当假设，利用变量替换、单调性技巧等方法研究了一类拟线性 Schrödinger 方程，当参数 μ 充分大时，获得该方程一个正解的存在性.

关　键　词：拟线性方程；变量替换；单调性技巧；先验估计

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2020)04-0030-06

考虑如下拟线性 Schrödinger 方程：

$$-\Delta u+V(x)u-\Delta[(1+u^2)^{\frac{1}{2}}]\frac{u}{2(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}=\mu h(u)\qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{1}$$

其中 $N\geqslant 3$，$V\in C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$，$h\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$\mu>0$ 是一个参数，C 为正常数，空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 和空间 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 的范数分别为

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad |u_s|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$$

其中 $s\in[1,+\infty)$.

方程(1) 源于如下模型：

$$i\partial_t z=-\Delta z+W(x)z-\tilde{h}(|z|^2)z-\Delta[\ell(|z|^2)]\ell'(|z|^2)z \tag{2}$$

其中 z：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{C}$，$W$：$\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ 是给定的势能，$\tilde{h},\ell$：$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是适当的函数.

当 $\ell(s)=s$ 时，模型(2) 用于描述超流体薄膜中凝聚波函数的时间演化过程；当 $\ell(s)=(1+s)^{\frac{1}{2}}$ 时，模型(2) 用于描述高能极短激光在物质中的自引导现象. 关于模型(2) 的更多物理背景可参阅文献[1-2].

近年来，椭圆方程得到广泛的研究(见文献[3-5]及其参考文献). 函数 $\ell(s)=s$ 的情形亦是如此，学者们利用微分法(如极小化法、变量替换法、Nehari 流行法和扰动法等) 得到了方程非平凡解的存在性和多重性(见文献[6-10]及其参考文献). 对 $\ell(s)=(1+s)^{\frac{1}{2}}$ 的情形研究不多(见文献[11-15]). 文献[14]在 $V(x)$ 与 h 满足如下条件时获得了方程(1) 正解的存在性：

(V_1) 对任意 $x\in\mathbb{R}^N$，$V(x)=V(|x|)$，$0<\alpha\leqslant V(x)\leqslant\beta<\infty$；

(V_2) 当 $x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ 时，存在 $A\in\left[0,\frac{(N-2)^2}{2}\right)$，使得 $|\nabla V(x)\cdot x|\leqslant\frac{A}{|x|^2}$；

(h_1) 当 $t\leqslant 0$ 时，$h(t)=0$，存在 $q\in\left(2,\frac{2N}{N-2}\right)$，使得 $-\infty<\liminf\limits_{t\to 0^+}\frac{h(t)}{t^{q-1}}\leqslant\limsup\limits_{t\to 0^+}\frac{h(t)}{t^{q-1}}<+\infty$；

(h_2) 存在 $p\in\left(2,\frac{2N}{N-2}\right)$，使得 $\liminf\limits_{t\to 0^+}\frac{H(t)}{t^p}>0$，其中 $H(t)=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$.

---

① 收稿日期：2019-05-18

基金项目：国家自然科学基金项目(11861021，11661021)；贵州民族大学科研基金项目(2017YB082).

作者简介：徐　宁(1995-)，女，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：储昌木，教授.

由条件(h_1)和(h_2)知 $q \leqslant p$，且存在 $\delta > 0$，$a_1, a_2 > 0$，使得

$$|h(t)| \leqslant a_2 \cdot qt^{q-1} \qquad a_1 t^p \leqslant H(t) \leqslant a_2 t^q \qquad t \in [0, 2\delta]$$

文献[14]给出了 h 满足条件(h_1)和(h_2)的例子，并在径向对称空间中讨论了正解的存在性.

若考虑将条件(V_1)换成如下非紧性条件：

(V_1') 对任意 $x \in \mathbb{R}^N$，$0 < V_0 \leqslant V(x) \leqslant V_\infty = \lim\limits_{|x| \to \infty} V(x)$.

则方程(1)的讨论将变得更加困难.

设 $\eta \in C^1(\mathbb{R}, [0, 1])$ 满足 $|\eta'(t)| \leqslant \dfrac{2}{\delta}$，当 $|t| \leqslant \delta$ 时，$\eta(t) = 1$；当 $|t| \geqslant 2\delta$ 时，$\eta(t) = 0$. 定义

$$F(t) = \eta(t)H(t) + (1 - \eta(t))a_2 |t|^q$$

$$f(t) = F'(t)$$

由条件(h_1)和(h_2)知，存在 $C > 0$，使得

$$|f(t)| \leqslant C|t|^{q-1} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

此外，任意给定 $T > 0$，存在 $C_T > 0$，有

$$F(t) \geqslant C_T t^p \qquad t \in [0, T] \tag{4}$$

考虑辅助方程

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta[(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}] \frac{u}{2(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}} = \mu f(u) \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{5}$$

方程(5)对应的能量泛函为

$$I_\mu(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} g^2(u)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x$$

其中 $g(t) = \sqrt{1 + \dfrac{t^2}{2(1 + t^2)}}$. 设 $G(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s$，由文献[16]知，函数 $G^{-1}(t)$ 有如下性质：

引理 1[16]　(i) 对任意 $t \in \mathbb{R}$，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}|t| \leqslant |G^{-1}(t)| \leqslant |t|$，$\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{-1}(t)\right| \leqslant 1$；

(ii) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{G^{-1}(t)}{t} = 1$，$\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{G^{-1}(t)}{t} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$；

(iii) 当 $t \geqslant 0$ 时，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}G^{-1}(t) \leqslant t \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{-1}(t) \leqslant G^{-1}(t)$.

由于 I_μ 不具有光滑性和紧性，故通过 $u = G^{-1}(v)$ 进行变量替换. 记

$$J_\mu(v) = I_\mu(G^{-1}(v)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)(G^{-1}(v))^2)\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(G^{-1}(v))\mathrm{d}x$$

则 $J_\mu \in H^1(\mathbb{R}^N)$，且 J_μ 的临界点是半线性椭圆方程

$$-\Delta v + V(x)\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{\mu f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

的弱解. 显然，若 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 为 J_μ 的临界点，则 $u = G^{-1}(v)$ 就是方程(5)的弱解.

引理 2[8]　设 X 是 Banach 空间，$\mathcal{J} \subset \mathbb{R}_+$，$E_\lambda(v) = \Phi(v) - \lambda\Psi(v)$，满足：

(i) 对任意的 $v \in X$，$\Psi(v) \geqslant 0$；

(ii) 当 $\|v\|_X \to \infty$ 时，$\Phi(v) \to +\infty$ 或 $\Psi(v) \to +\infty$.

若存在两个点 $v_1, v_2 \in X$，

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) \mid \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

使得

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} E_\lambda(\gamma(t)) > \max\{E_\lambda(v_1), E_\lambda(v_2)\} \qquad \lambda \in \mathcal{J}$$

则对几乎所有的 $\lambda \in \mathcal{J}$，存在 E_λ 的有界$(\mathrm{PS})_{c_\lambda}$ 序列 $\{v_n\} \subset X$，且映射 $\lambda \longmapsto c_\lambda$ 是左连续的.

为了应用引理 2 获得方程(5)的解，取 $\mathcal{J} = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$，定义

$$J_{\lambda,\mu}(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2+V(x)(G^{-1}(v))^2)\mathrm{d}x-\lambda\mu\int_{\mathbb{R}^N}F(G^{-1}(v))\mathrm{d}x$$

$$J_{\lambda,\mu}^{\infty}(v)=I_{\lambda,\mu}^{\infty}(G^{-1}(v))=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2+V_{\infty}(x)(G^{-1}(v))^2)\mathrm{d}x-\lambda\mu\int_{\mathbb{R}^N}F(G^{-1}(v))\mathrm{d}x$$

令

$$\Phi(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2+V(x)(G^{-1}(v))^2)\mathrm{d}x$$

$$\Psi_{\mu}(v)=\mu\int_{\mathbb{R}^N}F(G^{-1}(v))\mathrm{d}x$$

则 $J_{\lambda,\mu}(v)=\Phi(v)-\lambda\Psi_{\mu}(v)$. 由引理1和 F 的定义知，当 $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$ 时 $\Psi_{\mu}(v)\geqslant 0$. 由条件(V_1')知，当 $\|v\|\to+\infty$ 时 $\Phi(v)\to+\infty$.

下面证明泛函 $J_{\lambda,\mu}$ 具有山路结构和$(PS)_c$ 条件.

引理3 假设条件(V_1')成立，则当 $\lambda\in\mathscr{J}$ 时，存在 $w\in H^1(\mathbb{R}^N)$，满足 $J_{\lambda,\mu}(w)<0$，且

$$c_{\lambda,\mu}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_{\lambda,\mu}(\gamma(t))>\max\{J_{\lambda,\mu}(0),\ J_{\lambda,\mu}(w)\}$$

其中

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N))\mid\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=w\}$$

证 由 F 的定义和引理1可知 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{F(G^{-1}(t))}{t^2}=+\infty$. 固定一个非负函数 $v_0\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. 当 $t>0$ 充分大时，有

$$J_{\frac{1}{2},\mu}(tv_0)\leqslant\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_0|^2+V_{\infty}v_0^2)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^N}F(G^{-1}(tv_0))\mathrm{d}x=$$

$$\frac{t^2}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_0|^2+V_{\infty}v_0^2)\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(G^{-1}(tv_0))}{t^2}\mathrm{d}x\right]<0$$

设 $w=tv_0$，则当 $\lambda\in\mathscr{J}$ 时，$J_{\lambda,\mu}(w)\leqslant J_{\frac{1}{2},\mu}(w)<0$.

由引理1和Sobolev不等式可得

$$\begin{aligned}J_{\lambda,\mu}(v)\geqslant&\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2+V_0(G^{-1}(v))^2)\mathrm{d}x-a_2\mu\int_{\mathbb{R}^N}|G^{-1}(v)|^q\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2+V_0v^2)\mathrm{d}x-a_2\mu\int_{\mathbb{R}^N}|v|^q\mathrm{d}x\geqslant\\&C\|v\|^2-C\mu\|v\|^q\end{aligned}$$

因此

$$c_{\lambda,\mu}>0=\max\{J_{\lambda,\mu}(0),\ J_{\lambda,\mu}(w)\}$$

类似于文献[17]，有如下引理：

引理4 假设条件(V_1')和(V_2)成立，对任一给定的 $\lambda\in\mathscr{J}$，若$\{v_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 为 $J_{\lambda,\mu}$ 的一列有界$(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ 序列，则存在$\{v_n\}$的子列(仍记为$\{v_n\}$)和 v，$l\in N\cup\{0\}$，$\{y_n^k\}\subset\mathbb{R}^N$，$w^k\in H^1(\mathbb{R}^N)(1\leqslant k\leqslant l)$，使得：

(i) $v_n\rightharpoonup v$ 且 $J'_{\lambda,\mu}(v)=0$；

(ii) $|y_n^k|\to+\infty$，$|y_n^k-y_n^{k'}|\to+\infty(k\neq k')$；

(iii) $w^k\neq 0$，$(J_{\lambda,\mu}^{\infty})'(w^k)=0$；

(iv) $\left\|v_n-v-\sum\limits_{k=1}^{l}w^k(\cdot-y_n^k)\right\|\to 0$；

(v) $J_{\lambda,\mu}(v_n)\to J_{\lambda,\mu}(v)+\sum\limits_{k=1}^{l}J_{\lambda,\mu}^{\infty}(w^k)$.

若 $l=0$，则上述结论在去掉 w^k 和$\{y_n^k\}$后仍成立.

引理5 假设条件(V_1')和(V_2)成立，对任一给定的 $\lambda\in\mathscr{J}$，$\{v_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 为 $J_{\lambda,\mu}$ 的有界$(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ 序列，则存在$\{v_n\}$ 的子列(仍记为$\{v_n\}$)，$v_{\lambda}\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$，使得 $v_n\to v_{\lambda}$.

证　由引理 4 可知，当 $\lambda \in \mathscr{J}$ 时，存在 $v_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$，使得 $v_n \rightharpoonup v_\lambda$，$J'_{\lambda,\mu}(v_\lambda)=0$. 当 $l \geqslant 0$ 时，有

$$\left\| v_n - v_\lambda - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k) \right\| \to 0$$

$$J_{\lambda,\mu}(v_n) \to J_{\lambda,\mu}(v_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} J_{\lambda,\mu}^{\infty}(w^k)$$

其中 $w^k(1 \leqslant k \leqslant l)$ 为 $J_{\lambda,\mu}^{\infty}$ 的非平凡临界点. 因此，要证在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上 $v_n \to v_\lambda$，只需证 $l=0$. 若 $l>0$，由引理 1 可推出

$$c_{\lambda,\mu} = \lim_{t\to+\infty} J_{\lambda,\mu}(v_n) = J_{\lambda,\mu}(v_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} J_{\lambda,\mu}^{\infty}(w^k) \geqslant l m_{\lambda,\mu}^{\infty} \geqslant m_{\lambda,\mu}^{\infty} \tag{6}$$

其中

$$m_{\lambda,\mu}^{\infty}(v) = \inf\{J_{\lambda,\mu}^{\infty}(v) \mid v \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\},\ (J_{\lambda,\mu}^{\infty})'(v)=0\}$$

考虑方程

$$-\Delta v + V_\infty \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{\mu f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \tag{7}$$

由文献[14]知，方程(7)存在一个极小能量解 w_λ，且存在 $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$，使得

$$\gamma(0)=0 \qquad J_{\lambda,\mu}^{\infty}(\gamma(1))<0 \qquad w_\lambda(x) \in \gamma([0,1])$$

$$\max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,\mu}^{\infty}(\gamma(t)) = J_{\lambda,\mu}^{\infty}(w_\lambda)$$

又因为 $V(x) \leqslant V_\infty$ 且 $V(x) \neq V_\infty$，由 $c_{\lambda,\mu}$ 的定义可得

$$c_{\lambda,\mu} \leqslant \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) < \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,\mu}^{\infty}(\gamma(t)) = J_{\lambda,\mu}^{\infty}(w_\lambda) = m_{\lambda,\mu}^{\infty}$$

这与(6)式矛盾. 因此，在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $l=0$，即 $v_n \to v_\lambda$.

定理 1　假设条件(V_1'),(V_2),(h_1),(h_2)成立，则存在 $\bar{\mu}>0$，对任意 $\mu>\bar{\mu}$，方程(1)至少有一个正解.

证　由引理 2 和引理 3 可知，存在 $\mathscr{J}_1 \subset \mathscr{J}(\mathrm{meas}(\mathscr{J}_1)=0)$，对任意 $\lambda \in \mathscr{J}\setminus\mathscr{J}_1$，$J_{\lambda,\mu}$ 都有有界$(\mathrm{PS})_{c_{\lambda,\mu}}$ 序列 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. 由引理 5 知，对任意 $\lambda \in \mathscr{J}\setminus\mathscr{J}_1$，存在 $v_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，使得 $v_n \to v_\lambda$ 且 $J_{\lambda,\mu}(v_\lambda)=c_{\lambda,\mu}$.

取 $\{\lambda_n\} \in \mathscr{J}\setminus\mathscr{J}_1$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=1$，则

$$J_{\lambda_n,\mu}(v_{\lambda_n}) = c_{\lambda_n,\mu} \qquad J'_{\lambda_n,\mu}(v_{\lambda_n})=0$$

且 v_{λ_n} 满足 Pohozaev 恒等式

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_n}|^2 \mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(G^{-1}(v_{\lambda_n}))^2 \mathrm{d}x +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x)\cdot x\,(G^{-1}(v_{\lambda_n}))^2 \mathrm{d}x - \lambda_n \mu N \int_{\mathbb{R}^N} F(G^{-1}(v_{\lambda_n}))\mathrm{d}x \equiv 0$$

注意到 $J_{\lambda_n,\mu}(v_{\lambda_n}) \leqslant c_{\frac{1}{2},\mu}$，由引理 1、条件$(\mathrm{V}_2)$和 Hardy 不等式，可推出

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_n}|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x)\cdot x\,(G^{-1}(v_{\lambda_n}))^2 \mathrm{d}x + N c_{\frac{1}{2},\mu} \leqslant$$

$$\frac{A}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{v_{\lambda_n}^2}{|x|^2}\mathrm{d}x + N c_{\frac{1}{2},\mu} \leqslant$$

$$\frac{2A}{(N-2)^2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_n}|^2 \mathrm{d}x + N c_{\frac{1}{2},\mu}$$

因 $\dfrac{2A}{(N-2)^2}<1$，所以 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_n}|^2 \mathrm{d}x$ 有界. 由引理 1 和 F 的定义知，存在 $C>0$，对任意的 $t \in \mathbb{R}$，有

$$|F(G^{-1}(t))| \leqslant \frac{V_0}{6\mu}|G^{-1}(t)|^2 + C|G^{-1}(t)|^{\frac{2N}{N-2}} \leqslant \frac{V_0}{6\mu}t^2 + C|t|^{\frac{2N}{N-2}}$$

再次使用引理 1 和 $J_{\lambda_n,\mu}(v_{\lambda_n}) \leqslant c_{\frac{1}{2},\mu}$ 得

$$V_0\int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_n}^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_{\lambda_n}|^2 + V(x)(G^{-1}(v_{\lambda_n}))^2)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$3\lambda_n\mu\int_{\mathbb{R}^N} F(G^{-1}(v_{\lambda_n}))\mathrm{d}x + 3c_{\frac{1}{2},\mu} \leqslant$$

$$\frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_n}^2 \mathrm{d}x + C\mu\int_{\mathbb{R}^N} |v_{\lambda_n}|^{\frac{2N}{N-2}} \mathrm{d}x + 3c_{\frac{1}{2},\mu} \leqslant$$
$$\frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_n}^2 \mathrm{d}x + C\mu\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{\lambda_n}|^2 \mathrm{d}x + 3c_{\frac{1}{2},\mu}$$

因此$\int_{\mathbb{R}^N} v_{\lambda_n}^2 \mathrm{d}x$有界. 由于映射$\lambda \longmapsto c_{\lambda,\mu}$左连续,可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup J_\mu(v_{\lambda_n}) = \lim_{n\to\infty}\sup\left(J_{\lambda_n,\mu}(v_{\lambda_n}) + (\lambda_n - 1)\mu\int_{\mathbb{R}^N} F(G^{-1}(v_{\lambda_n}))\mathrm{d}x\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu} = c_{1,\mu}$$

类似地,可得$\lim_{n\to\infty} J_\mu'(v_{\lambda_n}) \to 0$. 因此,$\{v_{\lambda_n}\}$是$J_\mu$的有界$(\mathrm{PS})_{c_{1,\mu}}$序列. 由引理5知,泛函$J_\mu$存在非平凡临界点$v_\mu$,即方程(5)有一个非平凡解$u_\mu = G^{-1}(v_\mu)$. 利用与文献[16-17]相似的论述,不难推出$u_\mu$为方程(5)的正解.

类似文献[14]中的引理3.1可得

$$|v_\mu|_\infty \leqslant C\mu^{\frac{1}{2^*-q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\mu|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-2}{2(2^*-q)}} \tag{8}$$

利用Pohozaev恒等式,$J_\mu(v_\mu) = c_{1,\mu}$和条件(V_2)可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\mu|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{(N-2)^2}{(N-2)^2 - 2A} \cdot N c_{1,\mu} \tag{9}$$

在(4)式中取$T = |w|_\infty$,利用引理1可得

$$\begin{aligned} c_{1,\mu} &\leqslant \max_{t\in[0,1]} J_\mu(tw) \leqslant \\ &\max_{t\in[0,1]}\left(\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2)\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}^N} F(G^{-1}(tw))\mathrm{d}x\right) \leqslant \\ &\max_{t\in[0,1]}\left(\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w|^2 + V_\infty w^2)\mathrm{d}x - C\mu t^p\int_{\mathbb{R}^N} w^p \mathrm{d}x\right) \leqslant \\ &C\mu^{-\frac{2}{p-2}} \end{aligned} \tag{10}$$

由(8)-(10)式可推出$|v_\mu|_\infty \leqslant C\mu^{\frac{-(2^*-p)}{(p-2)(2^*-q)}}$. 因此,当$\mu > 0$充分大时,

$$|u_\mu|_\infty = |G^{-1}(v_\mu)|_\infty \leqslant |v_\mu|_\infty < \delta$$

由f的定义可知,u_μ是方程(1)的正解.

参考文献:

[1] BERESTYCKI H, LIONS P L. Nonlinear Scalar Field Equations I, Existence of a Ground State [J]. Arch Rational Mech Anal, 1983, 82(4): 313-345.

[2] BOROVSKII A V, GALKIN A L. Dynamical Modulation of an Ultrashort High-intensity Laser Pulse in Matter [J]. JETP, 1993, 77(4): 562-573.

[3] 陈 华, 吴行平, 唐春雷. 一类拟线性Schrödinger方程非平凡解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 64-68.

[4] 刘海燕, 廖家锋, 唐春雷. 带Hardy-Sobolev临界指数的半线性椭圆方程正解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 60-65.

[5] 孙娇娇, 储昌木. 一类凹凸拟线性椭圆方程解的存在性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(8): 33-37.

[6] DENG Y B, HUANG W T. Positive Ground State Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation with Critical Exponent [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37(8): 4213-4230.

[7] FANG X D, SZULKIN A. Multiple Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation [J]. Journal of Differential Equations, 2013, 254(4): 2015-2032.

[8] JEANJEAN L. On the Existence of Bounded Palais-Smale Sequences and Application to a Landesman-Lazer Type Problem Set on $\mathbb{R}^N$ [J]. Proc Roy Soc Edinburgh (Sect A), 1999, 129(4): 787-809.

[9] LIU J Q, WANG Y Q, WANG Z Q. Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations II [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 187(2): 473-493.

[10] LIU J Q, WANG Y Q, WANG Z Q. Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations Via the Nehari Method [J]. Comm Partial Differential Equations, 2004, 29(5-6): 879-901.

[11] LIU J Q, WANG Z Q. Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations I [J]. Proc Amer Math Soc, 2003, 131(2): 441-448.

[12] LIU J Q, WANG Z Q. Multiple Solutions for Quasilinear Elliptic Equations with a Finite Potential Well [J]. J Differential Equations, 2014, 257(8): 2874-2899.

[13] LIU X Q, LIU J Q, WANG Z Q. Quasilinear Elliptic Equations Via Perturbation Method [J]. Proc Amer Math Soc, 2013, 141(1): 253-263.

[14] CHU C M, LIU H D. Existence of Positive Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2016, 44: 118-127.

[15] LIANG Z P, GAO J F, LI A R. Infinitely Many Solutions to a Quasilinear Schrödinger Equation with a Local Sublinear Term [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 89: 22-27.

[16] YANG J, WANG Y J, ABDELGADIR A A. Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations [J]. J Math Phys, 2013, 54(7): 071502.

[17] ADACHI S, WATANABE T. G-Invariant Positive Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation [J]. Adv Differential Equations, 2011, 16: 289-324.

Existence of Positive Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation

XU Ning, CHU Chang-mu

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: Make appropriate assumptions about the potential function V and the nonlinear term h, a class of quasilinear Schrödinger equation is studied by variable substitution and monotonicity trick, when the parameter μ is sufficiently large, the existence of a positive solution for the equation is obtained.

Key words: quasilinear equation; variable substitution; monotonicity trick; priori estimate

责任编辑　廖　坤