第 45 卷 第 4 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2020 年 4 月
Vol. 45 No. 4　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.04.008

加权黎曼流形中超曲面的第一稳定特征值[①]

刘子健，　刘建成

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：加权黎曼流形$(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$在黎曼流形$(M^{n+1}, g)$上赋予一个加权体积$\mathrm{d}v_f = e^{-f}\mathrm{d}v$，其中$f$是$M^{n+1}$上的光滑实值函数，$\mathrm{d}v$为$M^{n+1}$的体积元，记$\Sigma^n$为加权黎曼流形$(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$中具有常加权平均曲率$H_f$的紧致无边超曲面，在截面曲率$\overline{Sec} \geqslant c$的条件下，研究了超曲面上加权稳定算子$J_f$的第一特征值问题，运用了不等式

$$(a+b)^2 \geqslant \frac{a^2}{1+k} - \frac{b^2}{k}$$

等号成立当且仅当$b = -\dfrac{k}{1+k}a$，其中任意的$a, b \in \mathbb{R}$和$k > -1$，得到了超曲面上第一稳定特征值的一个上界. 当f为常数时，加权黎曼流形也就回到了通常的黎曼流形，此时也得到了稳定算子J的第一非零特征值的上界，进而从这个上界来讨论超曲面的稳定性.

关 键 词：加权黎曼流形；第一稳定特征值；加权稳定算子；Bakry-Emery-Ricci 张量

中图分类号：**O186.12**　**文献标志码**：**A**　**文章编号**：1000-5471(2020)04-0036-05

加权黎曼流形是黎曼几何和共形几何等学科共同研究的对象之一，在证明庞加莱猜想的过程中，Perelman证明了Ricci流就是加权黎曼流形的梯度流. 近年来，在加权黎曼流形的背景下，关于Ricci流、平均曲率流、孤立子等问题的研究较多(见文献[1-8]). 下面将介绍加权黎曼流形的一些基本概念.

定义加权黎曼流形$(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$上的张量

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f \tag{1}$$

称Ric_f为∞-Bakry-Emery张量(见文献[3,9]). 当f为常数时，$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric}$. 显然$\mathrm{Ric}_f$是Ricci张量在加权黎曼流形中的推广.

设Σ^n是加权黎曼流形$(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$中的超曲面，则在$(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$上选取局部标准正交标架$\{\boldsymbol{e}_A\}_{A=1}^{n+1}$，使得限制在$\Sigma^n$上时$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^{n}$为切标架场，$\{\boldsymbol{e}_{n+1}\}$为法标架场. 记$\{\boldsymbol{\omega}_A\}_{A=1}^{n+1}$为$\{\boldsymbol{e}_A\}_{A=1}^{n+1}$的对偶标架场，则$\Sigma^n$的第二基本型为

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i,j} h_{ij}\boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_j \otimes \boldsymbol{e}_{n+1}$$

平均曲率为

$$H = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}$$

记H_f为Σ^n的加权平均曲率，根据文献[10]，有

$$H_f = H + \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}) \tag{2}$$

① 收稿日期：2019-06-26
基金项目：国家自然科学基金项目(11761061).
作者简介：刘子健(1996—)，男，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

这里$\vec{n}$为Σ^n的单位外法向量场．若$H_f=0$，则称Σ^n是加权黎曼流形的f-极小超曲面．与此同时，对于Σ^n上的任一向量场$\boldsymbol{X}$，加权散度算子[8]定义为

$$\mathrm{div}_f(\boldsymbol{X})=e^f\mathrm{div}(e^{-f}\boldsymbol{X})$$

于是加权 Lapacian 算子为

$$\Delta_f u=\mathrm{div}_f(\nabla u)=\Delta u-\nabla f\nabla u$$

定义Σ^n的加权体积[1,11]为

$$\mathrm{vol}_f(\Sigma)=\int_\Sigma e^{-f}\mathrm{d}v$$

则Σ^n的第二加权体积变分为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{vol}_f(\Sigma)\mid_{t=0}=-\int_\Sigma uJ_f u e^{-f}\mathrm{d}v$$

其中

$$J_f=\Delta_f+(|\boldsymbol{A}|^2+\mathrm{Ric}_f(\vec{n},\vec{n}))\tag{3}$$

这里J_f为加权稳定算子(也称加权 Jacobi 算子)．

对于Σ^n上加权稳定算子的第一特征值λ_1，存在特征函数$\rho\in C^\infty(\Sigma)$，使得

$$J_f\rho+\lambda_1\rho=0$$

由(3)式可知，等价于

$$\lambda_1\rho=-\Delta_f\rho-(|\boldsymbol{A}|^2+\mathrm{Ric}_f(\vec{n},\vec{n}))\rho$$

定义 1　设Σ^n是加权黎曼流形$(M^{n+1},g,e^{-f}\mathrm{d}v)$中的等距浸入超曲面，其上的加权稳定算子$J_f$由(3)式定义，$J_f$的第一特征值$\lambda_1$为

$$\lambda_1=\inf\left\{\frac{-\int_\Sigma uJ_f u\,\mathrm{d}v_f}{\int_\Sigma u^2\mathrm{d}v_f}:u\in C^\infty(\Sigma),u\neq 0\right\}\tag{4}$$

近年来，对于加权黎曼流形上加权稳定算子的第一非零特征值估计问题的研究已取得了一系列重要进展．文献[12]研究了 3 维加权黎曼流形(M^3,g,f)中闭曲面的加权稳定算子，得到了如下的结论：

定理 1[12]　$(M^3,g,e^{-f}\mathrm{d}v)$是截面曲率$\overline{Sec}\geqslant c$的加权黎曼流形，且 $\mathrm{Hess}\,f\geqslant\frac{\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f}{2m}$，$\Sigma^2$是$M^3$中具有常加权平均曲率$H_f$的闭曲面．则：

(i) $\lambda_1\leqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{H_f^2}{1+m}+4c\right)$，等号成立当且仅当$\Sigma^2$是全脐的，且$\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})=2c$，$\mathrm{d}f(\vec{n})=\frac{m}{1+m}H_f$，$\mathrm{Hess}\,f(\vec{n},\vec{n})=\frac{\mathrm{d}f(\vec{n})^2}{2m}$；

(ii) $\lambda_1\leqslant-\frac{H_f^2}{1+2m}-4c+\frac{2}{\mathrm{vol}_f(\Sigma)}\int_\Sigma K\,\mathrm{d}v_f$，等号成立当且仅当高斯曲率$K$为常数，且$\overline{Sec}=c$，$\mathrm{d}f(\vec{n})=\frac{m}{1+m}H_f$，$\mathrm{Hess}\,f(\vec{n},\vec{n})=\frac{\mathrm{d}f(\vec{n})^2}{2m}$.

自然地，本文将定理 1 中的加权黎曼流形$(M^3,g,e^{-f}\mathrm{d}v)$推广到更高维的情形，得到了如下结论：

定理 2　$(M^{n+1},g,e^{-f}\mathrm{d}v)$是截面曲率$\overline{Sec}\geqslant c$的加权黎曼流形，且 $\mathrm{Hess}\,f\geqslant\frac{\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f}{nm}$，$\Sigma^n$是$(M^{n+1},g,e^{-f}\mathrm{d}v)$中具有常加权平均曲率$H_f$的闭超曲面．则

$$\lambda_1\leqslant-\frac{H_f^2}{n(1+m)}-nc\tag{5}$$

等号成立当且仅当Σ^n是全脐的，且

$$\mathrm{Ric}(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = nc \qquad \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}) = \frac{m}{1+m}H_f \qquad \mathrm{Hess}\ f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = \frac{\mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}})^2}{nm}$$

定义 2 若加权稳定算子 J_f 的第一特征值 $\lambda_1 \geqslant 0$，则超曲面 Σ^n 是强稳定的，否则 Σ^n 是不稳定的.

设 Σ^n 上的二阶无迹张量

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A} - \frac{1}{n}HI$$

其中 I 为恒等映射，通过计算，有

$$|\boldsymbol{\phi}|^2 = |\boldsymbol{A}|^2 - \frac{1}{n}H^2$$

若 $|\boldsymbol{\phi}| = 0$，则 Σ^n 为全脐的，称二阶无迹张量 $\boldsymbol{\phi}$ 为 Σ^n 的全脐张量. 结合(3)式，则加权稳定算子即为

$$J_f u = \Delta_f u + \left(|\boldsymbol{\phi}|^2 + \frac{1}{n}H^2 + \mathrm{Ric}_f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}})\right)u \tag{6}$$

定理 2 的证明 对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $k > -1$，有

$$(a+b)^2 \geqslant \frac{a^2}{1+k} - \frac{b^2}{k}$$

等号成立当且仅当 $b = -\dfrac{k}{1+k}a$.

令

$$k = m \qquad a = H_f \qquad b = -\mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}})$$

则

$$(H_f - \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}))^2 \geqslant \frac{H_f^2}{1+m} - \frac{\mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}})^2}{m}$$

令 $u = 1$，结合(4),(6)式有

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \leqslant & \frac{-\int_\Sigma 1 J_f 1 \mathrm{d}v_f}{\int_\Sigma 1 \mathrm{d}v_f} = -\frac{1}{\mathrm{vol}_f(\Sigma)}\left(\int_\Sigma |\boldsymbol{\phi}|^2 \mathrm{d}v_f + \frac{1}{n}\int_\Sigma |H|^2 \mathrm{d}v_f + \int_\Sigma \mathrm{Ric}_f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) \mathrm{d}v_f\right) = \\
& -\frac{1}{\mathrm{vol}_f(\Sigma)}\left(\int_\Sigma |\boldsymbol{\phi}|^2 \mathrm{d}v_f + \frac{1}{n}\int_\Sigma (H_f - \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}))^2 \mathrm{d}v_f + \int_\Sigma \mathrm{Ric}_f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) \mathrm{d}v_f\right) \leqslant \\
& -\frac{1}{\mathrm{vol}_f(\Sigma)}\left(\int_\Sigma |\boldsymbol{\phi}|^2 \mathrm{d}v_f + \frac{1}{n}\int_\Sigma \left(\frac{H_f^2}{1+m} - \frac{\mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}})^2}{m}\right) \mathrm{d}v_f + \int_\Sigma \mathrm{Ric}_f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) \mathrm{d}v_f\right) \leqslant \\
& -\frac{1}{\mathrm{vol}_f(\Sigma)}\left(\frac{1}{n}\int_\Sigma \frac{H_f^2}{1+m} \mathrm{d}v_f + \int_\Sigma \mathrm{Ric}(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) \mathrm{d}v_f\right) \leqslant \\
& -\frac{H_f^2}{n(1+m)} - nc
\end{aligned}$$

下面讨论定理 2 中(5)式等号成立的情形.

充分性 由于 $\lambda_1 = -\dfrac{H_f^2}{n(1+m)} - nc$，因此以上证明过程中所有不等式均取等号，易知 Σ^n 为全脐的，且

$$\mathrm{Ric}(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = nc \qquad \mathrm{Hess}\ f = \frac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{nm} \qquad \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}) = \frac{mH_f}{1+m}$$

必要性 由于 Σ^n 为全脐的，

$$\mathrm{Ric}(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = nc \qquad \mathrm{Hess}\ f = \frac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{nm} \qquad \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}) = \frac{mH_f}{1+m}$$

于是(1),(2)式为

$$H = H_f - \mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}}) = \frac{H_f}{1+m}$$

$$\mathrm{Ric}_f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = nc + \frac{\mathrm{d}f(\vec{\boldsymbol{n}})^2}{nm} = nc + \frac{mH_f^2}{n(1+m)^2}$$

结合(3)式可得

$$J_f = \Delta_f + \frac{H^2}{n} + nc + \mathrm{Hess}\ f(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) =$$

$$\Delta_f + \frac{H_f^2}{n(1+m)} + nc$$

因此

$$\lambda_1 = -\frac{H_f^2}{n(1+m)} - nc$$

定理 2 得证.

当 f 为常数时，易知加权平均曲率和 ∞-Bakry-Emery 张量即为通常的平均曲率和 Ricci 张量，由此可以得到如下推论.

推论 1　(M^{n+1}, g) 是截面曲率 $\overline{Sec} \geqslant c$ 的黎曼流形. Σ^n 是 M^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的闭超曲面. 则

$$\lambda_1 \leqslant -\frac{H^2}{n} - nc$$

等号成立当且仅当 Σ^n 是全脐的，且 $\mathrm{Ric}(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = nc$.

另一方面，考虑加权黎曼流形中超曲面的稳定性，根据定义 2 和定理 2，有以下的推论：

推论 2　$(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$ 是截面曲率 $\overline{Sec} \geqslant c$ 的加权黎曼流形，且 $\mathrm{Hess}\ f \geqslant \dfrac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{nm}$，$\Sigma^n$ 是 $(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$ 中具有常加权平均曲率 H_f 的闭超曲面. 则：

(i) 当 $c \geqslant 0$，$H_f \neq 0$ 时，超曲面 Σ^n 为不稳定的；

(ii) 当 $c = 0$，且超曲面 Σ^n 强稳定时，$H_f = 0$，即 Σ^n 为 $(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$ 的 f-极小超曲面.

参考文献：

[1] PERELMAN G. The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications [EB/OL]. [2019-06-09]. https://cn.bing.com/academic/profile.

[2] CHEN B Y, DESHMUKH S. Yamabe and Quasi-Yamabe Solitons on Euclidean Submanifolds [J]. Mediterr J Math, 2018, 15(5): 194.

[3] 马　蕾，刘建成. 局部对称空间中常平均曲率超曲面的拼挤定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(2)：5-9.

[4] WEI G F, WYLIE W. Comparison Geometry for the Bakry-Emery Ricci Tensor [J]. J Differential Geom, 2009, 83(2): 337-405.

[5] GROMOV M. Isoperimetry of Waists and Concentration of Maps [J]. Geom Funct Anal, 2003, 13(1): 178-215.

[6] BAKRY D, ÉMERY M. Diffusions Hypercontractives [M]//Lecture Notes in Mathematics Berlin, Heidelberg: Springer, 1985: 177-206.

[7] DE LIMA E L, DE LIMA H F, DOS SANTOS FR. dos Santos. On the Stability and Parabolicity of Complete f-Minimal Hypersurfaces in Weighted Warped Products [J]. Results Math, 2018, 73: 14.

[8] BATISTA M, SANTOS J I. Upper Bounds for the First Stability Eigenvalue of Surfaces 3-Riemannian Manifolds [J]. Potential Anal, 2018, 49(1): 91-103.

[9] 周俞洁，张泽宇，王林峰. 黎曼流形上 p-Laplace 算子的 Liouville 定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(10)：62-68.

[10] CAO H D, ZHOU D T. On Complete Gradient Shrinking Ricci Solitons [J]. J Differential Geom, 2010, 85(2): 175-186.

[11] MUNTEANU O, WANG J P. Geometry of Manifolds with Densities [J]. Adv Math, 2014, 259: 269-305.

[12] IMPERA D, RIMOLDI M. Stability Properties and Topology at Infinity of Fminimal Hypersurfaces [J]. Geom Dedicata, 2015, 178: 21-47.

On the First Stability Eigenvalue of Hypersurfaces in the Weighted Riemannian Manifolds

LIU Zi-jian, LIU Jian-cheng

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, it's gived a weighted volume $\mathrm{d}v_f = e^{-f}\mathrm{d}v$ for weighted Riemannian manifold $(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$ on Riemannian manifold (M^{n+1}, g), where f is the smooth and real function on M^{n+1}, $\mathrm{d}v$ is volume of M^{n+1}, Σ^n is a compact infinitesimal hypersurface on weighted Riemann manifold $(M^{n+1}, g, e^{-f}\mathrm{d}v)$ with constant weighted mean curvature H_f. Under the condition of section curvature $\overline{Sec}\geqslant c$, the first eigenvalue problem of the weighted stability operator J_f on the hypersurface is studied. The equality of inequality

$$(a+b)^2 \geqslant \frac{a^2}{1+k} - \frac{b^2}{k}$$

is established if and only if $b=-\dfrac{k}{1+k}a$, where any $a, b\in\mathbb{R}$ and $k>-1$, upper bound on the first stable eigenvalue on the hypersurface is obtained. When f is a constant, the weighted Riemannian manifold returns to the usual Riemannian manifold, and the upper bound of the first nonzero Eigenvalue of the stable operator J is obtainedan. Furthermore, the stability of the hypersurface can be discussed from the obtained upper bound.

Key words: weighted Riemannian manifolds; first stability eigenvalue; weighted stability operator; Bakry-Emery-Ricci tensor

责任编辑 廖 坤