第 45 卷 第 5 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2020 年 5 月
Vol. 45　No. 5　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　May　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.05.002

两个异质城市间具有路途感染的SEIR传染病模型①

康　萍，　刘贤宁

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 建立并分析了两个异质城市间具有路途感染的 SEIR 传染病模型．计算得出了基本再生数 R_0，证得当 $R_0<1$ 时，存在一个全局渐近稳定的无病平衡点；当 $R_0>1$ 时，存在一个地方病平衡点且系统是一致持久的．

关 键 词： 异质城市；路途感染；一致持久

中图分类号：O175　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2020)05－0007－06

随着跨地区交流的日益密切，大量传染病通过种群迁移迅速扩散到世界各地，如流感、非典、甲型 H1N1 等[1]．为了研究人群流动对传染病传播的影响，文献[2]建立了两斑块间具有路途感染的 SIS 传染病模型，文献[3-4]研究了具有路途感染和出入境检查的 SIQS 传染病模型．鉴于流感、水痘、麻疹等传染病的宿主从感染者变成患者期间会有一个潜伏期，并且康复后对疾病具有免疫力，文献[5-6]分析了具有路途感染的 SEIS，SEIRS 传染病模型的动力学行为．这些模型均采用相同的流行病学参数来描述不同斑块间传染病的传播．然而，各城市的人群密度、结构组成、资源分配等都是不同的．本文在文献[6]的基础上，进一步研究空间异质性及路途感染对传染病传播的影响．建立如下具有路途感染的 SEIR 模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}=a_1-b_1S_1-\dfrac{\beta_1S_1I_1}{N_1}-\alpha_1S_1+\alpha_2S_2-\dfrac{\gamma_2\alpha_2S_2I_2}{N_2}\\ \dfrac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta_1S_1I_1}{N_1}-(b_1+c_1+\alpha_1)E_1+\alpha_2E_2+\dfrac{\gamma_2\alpha_2S_2I_2}{N_2}\\ \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=c_1E_1-(b_1+e_1+d_1+\alpha_1)I_1+\alpha_2I_2\\ \dfrac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}=d_1I_1-(b_1+\alpha_1)R_1+\alpha_2R_2\\ \dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}=a_2-b_2S_2-\dfrac{\beta_2S_2I_2}{N_2}-\alpha_2S_2+\alpha_1S_1-\dfrac{\gamma_1\alpha_1S_1I_1}{N_1}\\ \dfrac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta_2S_2I_2}{N_2}-(b_2+c_2+\alpha_2)E_2+\alpha_1E_1+\dfrac{\gamma_1\alpha_1S_1I_1}{N_1}\\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=c_2E_2-(b_2+e_2+d_2+\alpha_2)I_2+\alpha_1I_1\\ \dfrac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t}=d_2I_2-(b_2+\alpha_2)R_2+\alpha_1R_1\end{cases}\tag{1}$$

1）将每个城市的总人口分为 4 类：易感者 S、潜伏者 E、患者 I 和免疫者 R，则城市 i 在 t 时刻的总人口为 $N_i(t)=S_i(t)+E_i(t)+I_i(t)+R_i(t)$．城市 i 单位时间内新增加的人口为 a_i，每类个体的自然死亡率

① 收稿日期：2019－05－20

基金项目：国家自然科学基金项目(11671327)．

作者简介：康　萍(1993－)，女，硕士研究生，主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究．

通信作者：刘贤宁，教授，博士研究生导师．

为 b_i，且单位时间内每个潜伏者的发病率为 c_i，患者的因病死亡率为 e_i，患者的恢复率为 d_i，$i=1,2$.

2）城市 i 中疾病发生率为标准发病率$\frac{\beta_i S_i I_i}{N_i}$，其中 β_i 为城市 i 中的接触率. 两城市之间有直接的迁移，城市 i 到城市 j 的人均迁移率为 $\alpha_i (j \neq i, i=1,2)$，迁移路途中的疾病发生率为

$$\frac{\gamma_i(\alpha_i S_i)(\alpha_i I_i)}{\alpha_i S_i+\alpha_i E_i+\alpha_i I_i+\alpha_i R_i}=\frac{\gamma_i \alpha_i S_i I_i}{S_i+E_i+I_i+R_i}=\frac{\gamma_i \alpha_i S_i I_i}{N_i},\ i=1,2$$

其中 γ_i 为路途感染率，并且个体在迁移途中无出生和死亡.

3）易感者在迁移途中可能变成患者，但患者在迁移途中不会恢复，且个体在潜伏期没有传染能力，不能直接恢复成易感者.

初始条件为

$$S_i(0) \geqslant 0,\ E_i(0) \geqslant 0,\ I_i(0) \geqslant 0,\ R_i(0) \geqslant 0,\ i=1,2 \tag{2}$$

注 1 迁移过程中部分易感者会变成感染者，但剩余易感者数量必须非负，即对所有的 $S_i, E_i, I_i, R_i \geqslant 0$，$\alpha_i S_i-\frac{\gamma_i \alpha_i S_i I_i}{N_i} \geqslant 0$，所以始终要求 $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$，$i=1,2$.

注 2 迁移途中的新感染不能大于每个城市内部的感染，即对所有的 $S_i, E_i, I_i, R_i \geqslant 0$，当 $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$ 时，$\beta_i>\gamma_i \alpha_i$，$i=1,2$.

1 模型分析

1.1 两城市间没有个体迁移

若没有个体的迁移，即 $\alpha_1=\alpha_2=0$，则模型(1) 降维成简单的 SEIR 模型：

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\mathrm{d} S_i}{\mathrm{d} t}=a_i-b_i S_i-\frac{\beta_i S_i I_i}{N_i} \\
\frac{\mathrm{d} E_i}{\mathrm{d} t}=\frac{\beta_i S_i I_i}{N_i}-(b_i+c_i) E_i \\
\frac{\mathrm{d} I_i}{\mathrm{d} t}=c_i E_i-(b_i+e_i+d_i) I_i \\
\frac{\mathrm{d} R_i}{\mathrm{d} t}=d_i I_i-b_i R_i
\end{array}\right. \tag{3}$$

由问题的实际含义，仅在区域

$$D=\left\{(S_i, E_i, I_i, R_i) \in \mathbb{R}_+^4: S_i \geqslant 0, E_i \geqslant 0, I_i \geqslant 0, R_i \geqslant 0, S_i+E_i+I_i+R_i \leqslant \frac{a_i}{b_i}, i=1,2\right\}$$

中讨论系统(3) 解的性态，容易验证 D 是系统(3) 的可行域. 易得系统(3) 存在唯一无病平衡点

$$\boldsymbol{P}_{0i}=(S_{0i}, 0, 0, 0)=\left(\frac{a_i}{b_i}, 0, 0, 0\right)$$

利用下一代矩阵理论[7]，可以得到基本再生数

$$R_{0i}=\frac{\beta_i c_i}{(b_i+c_i)(b_i+e_i+d_i)},\ i=1,2$$

当 $R_{0i}>1$ 时，系统(3) 存在唯一的地方病平衡点 $\boldsymbol{P}_{*i}=(S_{*i}, E_{*i}, I_{*i}, R_{*i})$，其中，

$$S_{*i}=\frac{a_i b_i(b_i+c_i+d_i+e_i)+a_i c_i d_i}{\Lambda} \qquad E_{*i}=\frac{a_i b_i(R_{0i}-1)(b_i+d_i+e_i)}{\Lambda}$$

$$I_{*i}=\frac{a_i b_i c_i(R_{0i}-1)}{\Lambda} \qquad R_{*i}=\frac{a_i c_i d_i(R_{0i}-1)}{\Lambda}$$

其中 $\Lambda=b_i c_i(R_{0i}-1)(b_i+e_i)+R_{0i} b_i[b_i(b_i+d_i+e_i)+c_i d_i]+b_i^2 c_i$，$i=1,2$.

根据文献[6] 中定理 3.1 和定理 3.2 的证明过程可得如下结论：

定理 1 当 $R_{0i}<1$ 时，系统(3) 的无病平衡点 $\boldsymbol{P}_{0i}$ 局部渐近稳定；当 $R_{0i}>1$ 时，系统(3) 的无病平衡点 $\boldsymbol{P}_{0i}$ 不稳定，但是系统(3) 的地方病平衡点 $\boldsymbol{P}_{*i}$ 局部渐近稳定.

1.2　两城市间所有个体均迁移

定理 2　在初始条件(2) 下，系统(1) 的解始终非负，并且是一致最终有界的.

证　易证系统(1) 的满足初值条件的解(S_1，E_1，I_1，R_1，S_2，E_2，I_2，R_2) 始终非负. 根据系统(1) 可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t}=a_1-(b_1+\alpha_1)N_1(t)+\alpha_2 N_2(t)-e_1 I_1(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}=a_2-(b_2+\alpha_2)N_2(t)+\alpha_1 N_1(t)-e_2 I_2(t)\end{cases}\tag{4}$$

令 $y(t)=N_1(t)+N_2(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_1+a_2-b_1N_1-b_2N_2-e_1I_1-e_2I_2\leqslant a_1+a_2-\min\{b_1,b_2\}y$$

从而$\limsup\limits_{t\to\infty}y(t)\leqslant\dfrac{a_1+a_2}{\min\{b_1,b_2\}}$ 且 $y(t)\leqslant\max\left\{\dfrac{a_1+a_2}{\min\{b_1,b_2\}},y(0)\right\}$，因此系统(1) 的满足初值条件的解($S_1$，$E_1$，$I_1$，$R_1$，$S_2$，$E_2$，$I_2$，$R_2$) 是一致最终有界的. 证毕.

下面讨论平衡点的存在性及稳定性.

系统(1) 始终存在一个无病平衡点 $\boldsymbol{P}^0=(S_1^0,0,0,0,S_2^0,0,0,0)$，其中

$$S_1^0=\frac{a_2\alpha_2+a_1(b_2+\alpha_2)}{b_1\alpha_2+b_2\alpha_1+b_1b_2}\qquad S_2^0=\frac{a_1\alpha_1+a_2(b_1+\alpha_1)}{b_1\alpha_2+b_2\alpha_1+b_1b_2}$$

根据下一代矩阵理论可得系统(1) 的基本再生数：

$$R_0=\frac{m_3m_4n_1R_{01}+m_1m_2n_2R_{02}+\alpha_1\alpha_2\phi_{11}+\sqrt{\Delta}}{2(m_1m_3-\alpha_1\alpha_2)(m_2m_4-\alpha_1\alpha_2)}$$

其中 $\Delta=(m_3m_4n_1R_{01}-m_1m_2n_2R_{02}+\alpha_1\alpha_2\phi_{12})^2+4\alpha_1\alpha_2(m_4n_1R_{01}+\phi_{13})(m_2n_2R_{02}+\phi_{14})>0$，定义

$$m_1=b_1+c_1+\alpha_1,\ m_2=b_1+e_1+d_1+\alpha_1,\ m_3=b_2+c_2+\alpha_2,\ m_4=b_2+e_2+d_2+\alpha_2$$

$$n_1=(b_1+c_1)(b_1+e_1+d_1),\ n_2=(b_2+c_2)(b_2+e_2+d_2)$$

$$\phi_{11}=\gamma_1(c_1m_4+c_2m_1)+\gamma_2(c_1m_3+c_2m_2)+\beta_1c_2+\beta_2c_1$$

$$\phi_{12}=\gamma_2(c_1m_3+c_2m_2)-\gamma_1(c_1m_4+c_2m_1)+\beta_1c_2-\beta_2c_1$$

$$\phi_{13}=\gamma_2(c_1\alpha_1\alpha_2+c_2m_1m_2)+\beta_1c_2m_1,\ \phi_{14}=\gamma_1(c_2\alpha_1\alpha_2+c_1m_3m_4)+\beta_2c_1m_3$$

如果两城市间没有个体迁移，则

$$R_0=\frac{n_1n_2R_{01}+n_1n_2R_{02}+n_1n_2\mid R_{01}-R_{02}\mid}{2n_1n_2}=\frac{R_{01}+R_{02}+\mid R_{01}-R_{02}\mid}{2}$$

对城市 1，$R_0=R_{01}$；对城市 2，$R_0=R_{02}$.

如果在迁移途中没有路途感染，即 $\gamma_1=\gamma_2=0$，则$\hat{\phi}_{11}=\beta_1c_2+\beta_2c_1$，$\hat{\phi}_{12}=\beta_1c_2-\beta_2c_1$，$\hat{\phi}_{13}=\beta_1c_2m_1$，$\hat{\phi}_{14}=\beta_2c_1m_3$，显然

$$\hat{R}_0=\frac{m_3m_4n_1R_{01}+m_1m_2n_2R_{02}+\alpha_1\alpha_2\hat{\phi}_{11}+\sqrt{\hat{\Delta}}}{2(m_1m_3-\alpha_1\alpha_2)(m_2m_4-\alpha_1\alpha_2)}<R_0$$

即路途感染使得基本再生数增大，从而加剧了传染病的传播.

定理 3　当 $R_0<1$ 时，系统(1) 的无病平衡点 $\boldsymbol{P}^0$ 全局渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，系统(1) 的无病平衡点 $\boldsymbol{P}^0$ 不稳定.

证　根据文献[7] 中定理 2，很容易验证系统(1) 满足假设(A_1)－(A_5)，从而当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}^0$ 是局部渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，无病平衡点 $\boldsymbol{P}^0$ 是不稳定的. 下证 $\boldsymbol{P}^0$ 的全局吸引性. 由于

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}\leqslant a_1-(b_1+\alpha_1)S_1+\alpha_2S_2\\ \dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}\leqslant a_2-(b_2+\alpha_2)S_2+\alpha_1S_1\end{cases}\tag{5}$$

考虑辅助的线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=a_1-(b_1+\alpha_1)u_1+\alpha_2u_2\\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}=a_2-(b_2+\alpha_2)u_2+\alpha_1u_1\end{cases}\tag{6}$$

系统(6)有唯一的平衡点 $\boldsymbol{E}^*=(u_1{}^*,u_2{}^*)$，其中

$$u_1^*=\frac{a_2\alpha_2+a_1(b_2+\alpha_2)}{b_1\alpha_2+b_2\alpha_1+b_1b_2}=S_1^0\qquad u_2^*=\frac{a_1\alpha_1+a_2(b_1+\alpha_1)}{b_1\alpha_2+b_2\alpha_1+b_1b_2}=S_2^0$$

平衡点 $\boldsymbol{E}^*$ 处对应的特征方程的所有根均具有负实部，因此 $\boldsymbol{E}^*$ 是局部渐近稳定的. 由于系统(6)是一个合作的不可约系统，则 $\lim\limits_{t\to\infty}(u_1(t),u_2(t))=(S_1^0,S_2^0)$.

令 $u_1(0)\geqslant S_1(0)$，$u_2(0)\geqslant S_2(0)$，由比较定理可得，对任意足够小的 $\varepsilon_1>0$，存在 $t_0>0$，当 $t>t_0$ 时，

$$S_1(t)\leqslant u_1(t)\leqslant S_1^0+\varepsilon_1,\ S_2(t)\leqslant u_2(t)\leqslant S_2^0+\varepsilon_1$$

所以对 $t>t_0$，可以得到 E_1,I_1,R_1,E_2,I_2,R_2 的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}t}\leqslant\beta_1I_1-(b_1+c_1+\alpha_1)E_1+\alpha_2E_2+\gamma_2\alpha_2I_2\\ \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=c_1E_1-(b_1+e_1+d_1+\alpha_1)I_1+\alpha_2I_2\\ \dfrac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}=d_1I_1-(b_1+\alpha_1)R_1+\alpha_2R_2\\ \dfrac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}t}\leqslant\beta_2I_2-(b_2+c_2+\alpha_2)E_2+\alpha_1E_1+\gamma_1\alpha_1I_1\\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=c_2E_2-(b_2+e_2+d_2+\alpha_2)I_2+\alpha_1I_1\\ \dfrac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t}=d_2I_2-(b_2+\alpha_2)R_2+\alpha_1R_1\end{cases}\tag{7}$$

显然，系统(7)的辅助线性系统有一个平衡点 $\boldsymbol{E}_0=(0,0,0,0,0,0)$. 且辅助线性系统右边的系数矩阵为 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V}$，根据文献[7]中定理2证明过程，如果 $R_0<1$，则 $s(\boldsymbol{J})=s(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})<0$，所以矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的所有特征值具有负实部，因此系统(7)的辅助线性系统的每个解均趋于零. 由比较定理可得：$E_i(t)\to0$，$I_i(t)\to0$，$R_i(t)\to0$，$t\to\infty$，所以，系统(1)的极限系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}=a_1-(b_1+\alpha_1)S_1+\alpha_2S_2\\ \dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}=a_2-(b_2+\alpha_2)S_2+\alpha_1S_1\end{cases}\tag{8}$$

系统(8)有一个正平衡点 $\boldsymbol{E}_1=(S_1^0,S_2^0)$，由系统(6)的分析可知 $\boldsymbol{E}_1$ 是全局渐近稳定的，因此根据渐近自治系统理论[8]，当 $R_0<1$ 时，系统(1)的无病平衡点 $\boldsymbol{P}^0$ 是全局渐近稳定的.

定理4 当 $R_0>1$ 时，系统(1)至少存在一个地方病平衡点 $\boldsymbol{P}^*=(S_1^*,E_1^*,I_1^*,R_1^*,S_2^*,E_2^*,I_2^*,R_2^*)$，且存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得系统(1)的每个满足初值条件 $S_i(0)\geqslant0$，$E_i(0)\geqslant0$，$I_i(0)\geqslant0$，$R_i(0)\geqslant0$ 且满足 $I_1(0)+I_2(0)>0$ 的解$(S_1(t),E_1(t),I_1(t),R_1(t),S_2(t),E_2(t),I_2(t),R_2(t))$满足

$$\lim_{t\to\infty}\inf S_i(t)\geqslant\varepsilon,\ \lim_{t\to\infty}\inf E_i(t)\geqslant\varepsilon,\ \lim_{t\to\infty}\inf I_i(t)\geqslant\varepsilon,\ \lim_{t\to\infty}\inf R_i(t)\geqslant\varepsilon,\ i=1,2$$

证 由系统(1)可知，

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}=a_1-\frac{\beta_1S_1I_1}{N_1}-b_1S_1-\alpha_1S_1+\alpha_2S_2-\frac{\gamma_2\alpha_2S_2I_2}{N_2}\geqslant a_1-(\beta_1+b_1+\alpha_1)S_1$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf S_1(t)\geqslant\dfrac{a_1}{2(\beta_1+b_1+\alpha_1)}$，同理可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf S_2(t)\geqslant\dfrac{a_2}{2(\beta_2+b_2+\alpha_2)}$. 根据系统(1)可知，如果 $I_i(t)$ 是持久的，则 $E_i(t)$ 和 $R_i(t)$ 也是持久的，从而只需证明 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf I_i(t)\geqslant\varepsilon$，$i=1,2$. 令

$$X=\{(S_1,E_1,I_1,R_1,S_2,E_2,I_2,R_2)\mid S_i\geqslant0,E_i\geqslant0,I_i\geqslant0,R_i\geqslant0,\ i=1,2\}$$

$$X_0 = \{(S_1, E_1, I_1, R_1, S_2, E_2, I_2, R_2) \in X \mid I_1 + I_2 > 0\}$$
$$\partial X_0 = X / X_0$$
则可以证明传染病关于$(X_0, \partial X_0)$是一致持久的.

显然 X 和 X_0 都是系统(1)的正不变集，且 ∂X_0 在 X 上是相对闭的，由定理 2 可知，系统(1)是点耗散的. 定义

$$M_\partial = \{(S_1(0), E_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0), R_2(0)) \mid (S_1(t), E_1(t), I_1(t), R_1(t)\ S_2(t), E_2(t), I_2(t), R_2(t)) \in \partial X_0,\ \forall t \geqslant 0\}$$

根据文献[9]，容易证明 $M_\partial = \{(S_1, E_1, 0, R_1, S_2, E_2, 0, R_2) \mid S_i \geqslant 0, E_i \geqslant 0, R_i \geqslant 0\ , i = 1,2\}$.

定义系统(1)从初值 $\phi(0) = (S_1(0), E_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0) R_2(0)) \in X$ 开始的解的 ω 极限集为 $\omega(S_1(0), E_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0), R_2(0))$，则有

$$\Omega = \bigcup \{\omega(\phi(0)) \mid \phi(0) \in M_\partial\} = \{\boldsymbol{P}^0\}$$

对任意 $\phi(0) \in M_\partial$，$I_i(t, \phi) = 0$，$\forall t \geqslant 0$. 则对系统(1)，$\lim\limits_{t\to\infty} E_i(t, \phi) = 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} R_i(t, \phi) = 0$. 根据渐近自治半流理论[8]，可得 $S_i(t)$ 满足系统(8)，由系统(8)的分析可知 $\lim\limits_{t\to\infty} S_i(t, \phi) = S_i^0$，所以 $\Omega = \{\boldsymbol{P}^0\}$. 显然 $\boldsymbol{P}^0$ 是 Ω 的一个孤立覆盖，且由于在 M_∂ 上不存在连接 $\boldsymbol{P}^0$ 到它自身的解，所以是非周期的，下证

$$W^s(\boldsymbol{P}^0) \cap X_0 = \varnothing \tag{9}$$

这里 $W^s(\boldsymbol{P}^0)$ 表示 $\boldsymbol{P}^0$ 的稳定流形. 假设(9)式不成立，则系统(1)存在一个满足初值条件的解$\{(S_1(t), E_1(t), I_1(t), R_1(t), S_2(t), E_2(t), I_2(t), R_2(t)) \in X_0, \forall t \geqslant 0\}$，使得

$$\lim_{t\to\infty} S_i(t) = S_i^0,\ \lim_{t\to\infty} E_i(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} I_i(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} R_i(t) = 0,\ i = 1,2$$

从而对任意小的 $\delta > 0$，且 $\delta < S_i^0$，存在 $t_1 > 0$，使得对所有 $t > t_1$，

$$S_i^0 - \delta < S_i(t) < S_i^0 + \delta,\ 0 < E_i(t) < \delta,\ 0 < I_i(t) < \delta,\ 0 < R_i(t) < \delta,\ i = 1,2$$

因此对 $t > t_1$，根据系统(1)可得

$$\begin{cases} \dfrac{dE_1}{dt} \geqslant \left(\beta_1 - \dfrac{3\beta_1}{N_1}\delta\right) I_1 - (b_1 + c_1 + \alpha_1) E_1 + \alpha_2 E_2 + \left(\gamma_2\alpha_2 - \dfrac{3\gamma_2\alpha_2}{N_2}\delta\right) I_2 \\ \dfrac{dI_1}{dt} = c_1 E_1 - (b_1 + e_1 + d_1 + \alpha_1) I_1 + \alpha_2 I_2 \\ \dfrac{dR_1}{dt} = d_1 I_1 - (b_1 + \alpha_1) R_1 + \alpha_2 R_2 \\ \dfrac{dE_2}{dt} \geqslant \left(\beta_2 - \dfrac{3\beta_2}{N_2}\delta\right) I_2 - (b_2 + c_2 + \alpha_2) E_2 + \alpha_1 E_1 + \left(\gamma_1\alpha_1 - \dfrac{3\gamma_1\alpha_1}{N_1}\delta\right) I_1 \\ \dfrac{dI_2}{dt} = c_2 E_2 - (b_2 + e_2 + d_2 + \alpha_2) I_2 + \alpha_1 I_1 \\ \dfrac{dR_2}{dt} = d_2 I_2 - (b_2 + \alpha_2) R_2 + \alpha_1 R_1 \end{cases} \tag{11}$$

其辅助的线性系统右边的系数矩阵为 $\boldsymbol{J}_\delta$，且 $\boldsymbol{J}_\delta = \boldsymbol{J} - \delta \boldsymbol{J}_1$，其中

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3\beta_1}{N_1} & 0 & 0 & \dfrac{3\gamma_2\alpha_2}{N_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3\gamma_1\alpha_1}{N_1} & 0 & 0 & \dfrac{3\beta_2}{N_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

由于 $R_0 > 1$，则 $s(\boldsymbol{J}) = s(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{V}) > 0$，取充分小的 $\delta > 0$，使得当 $R_0 > 1$ 时，$s(\boldsymbol{J} - \delta \boldsymbol{J}_1) > 0$. 因此 $\boldsymbol{J}_\delta$ 有一个具有正特征向量的正特征值 $s(\boldsymbol{J}_\delta)$，由比较定理可得

$$\lim_{t\to\infty} E_i(t, \phi) = \infty,\ \lim_{t\to\infty} I_i(t, \phi) = \infty,\ \lim_{t\to\infty} R_i(t, \phi) = \infty,\ i = 1,2$$

与(10)式矛盾，故 $W^s(\boldsymbol{P}^0) \cap X_0 = \varnothing$. 所以系统(1)关于($X_0$，$\partial X_0$)是一致持久的[10]. 根据文献[11]，系统(1)至少存在一个正平衡点 $\boldsymbol{P}^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$. 定理得证.

2 结 论

本文基于文献[6]研究了两异质城市间具有路途感染的SEIR传染病模型. 证明了当 $R_0 < 1$ 时，两城市间的传染病不能入侵人群，当 $R_0 > 1$ 时，存在地方病平衡点且系统是一致持久的.

参考文献：

[1] LIU X N，CHEN X P，TAKEUCHI Y. Dynamics of an SIQS Epidemic Model with Transport-Related Infection and Exit-entry Screenings [J]. Journal of Theoretical Biology，2011，285(1)：25-35.

[2] WANG L，YANG W. Global Dynamics of a Two-Patch SIS Model with Infection during Transport [J]. Applied Mathematics and Computation，2011，217(21)：8458-8467.

[3] CHEN X P，LIU X，CHEN X. An SIQS Epidemic Model with Transport-Related Infection and Exit Screening [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2011，33(5)：14-21.

[4] 陈 玲，陈晓平. 具有路途感染和入境检查的SIQS模型的全局稳定性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(5)：24-29.

[5] WAN H，CUI J A. An SEIS Epidemic Model with Transport-Related Infection [J]. Journal of Theoretical Biology，2007，247(3)：507-524.

[6] DENPHEDTNONG A，CHINVIRIYASIT S，CHINVIRIYASIT W. On the Dynamics of SEIRS Epidemic Model with Transport-Related Infection [J]. Mathematical Biosciences，2013，245(2)：188-205.

[7] VAN DEN DRIESSCHE P，WATMOUGH J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. Mathematical Biosciences，2002，180(1-2)：29-48.

[8] THIEME H. Convergence Results and a Poincaré-BendixsonTrichotomy for Asymptotically Autonomous Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Biology，1992，30(7)：755-763.

[9] LIU J L，JIA Y，ZHANG T L. Analysis of a Rabies Transmission Model with Population Dispersal [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2017，35：229-249.

[10] THIEME H R. Persistence under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model) [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，1993，24(2)：407-435.

[11] HUTSON V，SCHMITT K. Permanence and the Dynamics of Biological Systems [J]. Mathematical Biosciences，1992，111(1)：1-71.

On Dynamics of an SEIR Epidemic Model with Transport-Related Infection between Two Heterogeneous Cities

KANG Ping， LIU Xian-ning

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：An SEIR epidemic model with transport-related infection between two heterogeneous cities has been formulated and analyzed. The basic reproduction number R_0 of the model been derived. If $R_0 < 1$, there exists only the disease-free equilibrium which is globally asymptotically stable, and if $R_0 > 1$ then there is a disease endemic equilibrium and the disease is persistent.

Key words：heterogeneous city；transport-related infection；uniform persistence

责任编辑 张 栒