

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.05.005

基于染病人数检测的布鲁氏菌病动力学模型分析^①

冯建武， 侯 强

中北大学 理学院，太原 030051

摘要：以染病人数作为检测行为的依据，建立动力学模型来分析检测行为对布鲁氏菌病传播的影响. 首先计算基本再生数 R_0 ，分析地方病平衡点的存在性；然后证明无病平衡点是全局渐近稳定的，当 $R_0 > 1$ 时疾病是一致持续的，并且得到了疾病的最优控制解；最后通过数值模拟发现，当参数满足一定条件时，系统会出现周期解.

关 键 词：检测；基本再生数；一致持续；最优控制

中图分类号：O193 **文献标志码：**A **文章编号：**1000-5471(2020)05-0024-08

布鲁氏菌病简称布病，是由各种布鲁氏菌所引起的，能感染家畜、野生动物和人类的世界主要的人畜共患病之一^[1-2].

最近几年，关于布病传播动力学的理论研究已经有很多^[3-6]. 基于传播动力学的应用性研究主要集中在蒙古国和中国部分地区，这些研究主要定量评估免疫措施对布病传播的影响^[7-9]. 文献[10]基于已检测信息建立布病传播动力学模型，研究了模型的全局动力学和周期震荡行为，给出这些动力学性态背后的生物学意义. 本文以染病人数作为检测信息建立人畜耦合的布病传播动力学模型，分析平衡点的存在性，证明无病平衡点的全局稳定性和系统的持续性，研究系统的周期行为，阐述这些现象背后的流行病学意义.

1 模型的建立

人类主要是通过接触动物或者环境中的布鲁氏菌而被感染，而且恢复之后不产生持久免疫，因此，本文将人群分为两类：易感者 $S_h(t)$ 与可传染者 $I_h(t)$. 动物种群一般分为 3 类：易感者 $S(t)$ 、潜伏者 $E(t)$ 、可传染者 $I(t)$. 总种群用 $N(t)$ 表示，则有 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$. M 表示通过疾病流行和媒体报道而产生的有效信息的数量. 易感的人和动物虽然也可通过摄取环境中的布鲁氏菌而被传染，但本文重点研究检测行为对布病传播的影响，所以本文忽略环境感染. 虽然血清学检测会出现假阳性(易感动物检测呈阳性)，但动物检测呈阳性还要再进行确认检测，假阳性率是比较低的，这里不考虑假阳性的情形. ϕ 表示疾病意识引起的检测比率. 本文以染病人数作为检测信息，并假定单位信息引起对动物种群检测的数量是 ϕN ，所以检测到有效的染病动物为 $\phi N \frac{I}{N} M = \phi IM$. 由于布病在中国是自然疫源疾病，而且国家有固定的监测点，因此，假定信息量有一个固定的输入 Λ . 模型建立如下：

① 收稿日期：2019-04-01
基金项目：国家自然科学基金青年基金项目(11501528).
作者简介：冯建武(1993-)，男，硕士研究生，主要从事动力系统及其应用研究.
通信作者：侯 强，副教授.

$$\begin{cases} S'_h(t) = A_1 - \beta_1 S_h I - \mu_1 S_h + \gamma I_h \\ I'_h(t) = \beta_1 S_h I - \mu_1 I_h - \gamma I_h \\ S'(t) = A_2 - \beta_2 SI - \mu_2 S \\ E'(t) = \beta_2 SI - \mu_2 E - \sigma E \\ I'(t) = \sigma E - \mu_2 I - m\phi IM \\ M'(t) = \Lambda + \eta I_h - dM \end{cases} \quad (1)$$

其中: A_1 表示人的补充率; β_1 表示动物对人的传染率; μ_1 表示人的自然死亡率; γ 表示人的恢复率; A_2 表示动物的补充率; β_2 表示动物之间的传染率; μ_2 表示动物的淘汰率; σ 表示潜伏期动物的转移率; m 表示染病动物的真阳性率; 对国家的固定检测点, 信息量以 Λ 速率增加, η 是染病人数转移成有效信息的转移率; d 表示信息量的衰减率.

2 平衡点的存在性和基本再生数

模型(1) 的可行域为 $\Omega = \left\{ (S_h, I_h, S, E, I, M) \mid S_h \geq 0, I_h \geq 0, S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, S_h + I_h \leq \frac{A_1}{\mu_1}, S + E + I \leq \frac{A_2}{\mu_2}, \frac{\Lambda}{d} \leq M \leq \frac{1}{d} \left(\Lambda + \eta \frac{A_1}{\mu_1} \right) \right\}$.

模型(1) 有唯一的无病平衡点 $E_0 = (S_h^0, I_h^0, S^0, E^0, I^0, M^0) = \left(\frac{A_1}{\mu_1}, 0, \frac{A_2}{\mu_2}, 0, 0, \frac{\Lambda}{d} \right)$. 根据下一代矩阵法^[11], 模型的基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta_2 A_2 \sigma d}{(\mu_2 d + m\phi \Lambda)(\mu_2 + \sigma) \mu_2} \quad (2)$$

为求模型(1) 的地方病平衡点的存在性, 令模型(1) 的右端为 0, 则有

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{A_1(\mu_1 + \gamma)}{\mu_1(\beta_1 I^* + \mu_1 + \gamma)} & I_h^* &= \frac{A_1 \beta_1 I^*}{\mu_1(\beta_1 I^* + \mu_1 + \gamma)} & S^* &= \frac{A_2}{\beta_2 I^* + \mu_2} \\ E^* &= \frac{A_2 \beta_2 I^*}{(\beta_2 I^* + \mu_2)(\mu_2 + \sigma)} & M^* &= \frac{1}{d} \left(\Lambda + \frac{A_1 \beta_1 \eta I^*}{\mu_1(\beta_1 I^* + \mu_1 + \gamma)} \right) \end{aligned}$$

且 I^* 是如下二次方程的正根

$$f(I) = AI^2 + BI + C \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -(\beta_1 \beta_2 \mu_2 + \frac{m\phi \beta_1 \beta_2 \Lambda}{d} + \frac{m\phi \beta_1 \beta_2 A_1 \eta}{d \mu_1}) \\ B &= \frac{\beta_1 \mu_2 (\mu_2 d + m\phi \Lambda)}{d} (R_0 - 1) - \frac{\beta_2 (\mu_1 + \gamma) (\mu_2 d + m\phi \Lambda)}{d} - \frac{m\phi \beta_1 \mu_2 A_1 \eta}{d \mu_1} \\ C &= \frac{(\mu_2 d + m\phi \Lambda) (\mu_1 + \gamma) \mu_2}{d} (R_0 - 1) \end{aligned}$$

则有: 当 $R_0 \leq 1$ 时, 方程(3) 没有正根, 即模型(1) 不存在正平衡点; 当 $R_0 > 1$ 时, 方程(3) 仅有一个正根 I^* , 即模型(1) 存在唯一正平衡点 $E_* = (S_h^*, I_h^*, S^*, E^*, I^*, M^*)$, 其中

$$I^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

基于以上讨论, 可得以下结论:

定理 1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(1) 有一个无病平衡点 E_0 ; 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1) 存在唯一正平衡点 E_* .

3 平衡点的稳定性

定理 2 如果 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(1) 的无病平衡点 E_0 在 Ω 内是全局渐近稳定的; 如果 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点是不稳定的.

证 模型(1) 在无病平衡点 E_0 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \gamma & 0 & 0 & -\beta_1 S_h^0 & 0 \\ 0 & -(\mu_1 + \gamma) & 0 & 0 & \beta_1 S_h^0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & -\beta_2 S^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu_2 + \sigma) & \beta_2 S^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_2 + m\phi M^0) & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}$$

矩阵 $J(E_0)$ 的特征方程为:

$$(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_1 + \gamma)(\lambda + \mu_2)(\lambda + d)(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \quad (4)$$

其中

$$a = 2\mu_2 + \sigma + m\phi M^0 > 0, b = (\mu_2 + m\phi M^0)(\mu_2 + \sigma)(1 - R_0)$$

由此可知 $\lambda_1 = -\mu_1 < 0$, $\lambda_2 = -\mu_1 - \gamma < 0$, $\lambda_3 = -\mu_2 < 0$, $\lambda_4 = -d < 0$, 由韦达定理可知: 当 $R_0 \leq 1$ 时, $\lambda_5 \lambda_6 > 0$, $\lambda_5 + \lambda_6 < 0$, 所以 $\lambda_5 < 0$, $\lambda_6 < 0$, 模型(1) 的无病平衡点是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 这里存在正根, 即无病平衡点不稳定.

构造 Lyapunov 函数:

$$L = S - S^0 - S^0 \ln \frac{S}{S^0} + E + \frac{\mu_2 + \sigma}{\sigma} I$$

L 沿着模型(1) 的解的轨线方程求导:

$$\begin{aligned} L' &= S' - \frac{S^0}{S} S' + E' + \frac{\mu_2 + \sigma}{\sigma} I' = \\ &\mu_2 S^0 - \mu_2 S - \mu_2 \frac{S^0}{S} + \beta_2 S^0 I + \mu_2 S^0 - (\mu_2 + \sigma) E + (\mu_2 + \sigma) E - \frac{\mu_2 + \sigma}{\sigma} (\mu_2 + m\phi M) I = \\ &\mu_2 S^0 (2 - \frac{S}{S^0} - \frac{S^0}{S}) + \beta_2 S^0 I - \frac{(\mu_2 + \sigma)(\mu_2 + m\phi M)}{\sigma} I \leq \\ &\mu_2 S^0 (2 - \frac{S}{S^0} - \frac{S^0}{S}) + \beta_2 S^0 I - \frac{(\mu_2 + \sigma)(\mu_2 + m\phi M^0)}{\sigma} I = \\ &\mu_2 S^0 (2 - \frac{S}{S^0} - \frac{S^0}{S}) + \frac{(\mu_2 + \sigma)(\mu_2 + m\phi M^0)}{\sigma} (R_0 - 1) I \end{aligned}$$

1) 当 $R_0 < 1$ 时, $L' < 0$.

2) 当 $R_0 \geq 1$ 时, 有 $S = S^0$, $I = I^0$ 或 $S = S^0$, $M = M^0$.

对于情况 1): $I' = \sigma E \equiv 0$, 意味着 $E = 0$; $I'_h = -\mu_1 I_h - \gamma I_h$, 意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_h = 0$, 从而有 $S_h = S_h^0$; $M' = \Lambda - dM$, 意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} M = M^0$, 因此让 $L' = 0$ 的集合只包含无病平衡点. 对于情况 2), 由 $M = M^0$ 得出 $I_h = 0$. $I'_h = \beta_1 S_h I \equiv 0$, 得出 $I = 0$, 同前一种情况.

因此, 在这两种情况下, $L' = 0$ 的最大不变集包含唯一的点 E_0 , 由 LaSalle 不变集原理^[12] 可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点在 Ω 内是全局渐近稳定的.

定理 3 对于模型(1), $R_0 > 1$, 疾病是一致持续的, 即在 Ω 内, 存在一个正数 ϵ , $\liminf_{t \rightarrow \infty} (E(t), I(t)) \geq (\epsilon, \epsilon)$.

证 定义

$$\partial\Omega = \{(S_h, I_h, S, E, I, M) \in \Omega: E = 0 \text{ 或 } I = 0\} \quad \overset{\circ}{\Omega} = \Omega / \partial\Omega$$

为了证明疾病的一致持续性, 在 $\overset{\circ}{\Omega}$ 中, 说明模型(1) 的解与 $\partial\Omega$ 的交集是空集.

首先, 容易看出 Ω 是正不变集, $\partial\Omega$ 是闭集. 根据第 1 个方程有

$$S'_h = A_1 + \gamma I_h - (\beta_1 I + \mu_1) S_h$$

这意味着

$$S'_h \leq (A_1 + \gamma I_h) - \mu_1 S_h$$

于是得出结论

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S_h(t) \leq \frac{A_1 + \gamma \frac{A_1}{\mu_1}}{\mu_1}$$

根据模型(1) 的第 3 个方程有

$$S' = A_2 - \beta_2 SI - \mu_2 S$$

意味着

$$S' \leq A_2 - \mu_2 S$$

于是得出结论

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{A_2}{\mu_2}$$

同理根据模型(1) 的第 6 个方程有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} M(t) \leq \frac{1}{d} \left(\Lambda + \eta \frac{A_1}{\mu_1} \right)$$

因此, 模型(1) 是点耗散.

设

$$M_\delta = \{(S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t)) : (S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t))\}$$

满足模型(1) 且

$$(S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t)) \in \partial\Omega, \forall t \geq 0\}$$

我们现在证明 $M_\delta = \left\{ (S_h(t), 0, S(t), 0, 0, M(t)) : S_h \leq \frac{A_1}{\mu_1}, S \leq \frac{A_2}{\mu_2}, M \leq \frac{1}{d} \left(\Lambda + \eta \frac{A_1}{\mu_1} \right) \right\}$. 假设对所有 $t \geq 0$, 恒有 $(S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t)) \in M_\delta$. 这就证明对所有 $t \geq 0$, 有 $E(t) = 0$ 和 $I(t) = 0$. 假设不成立, 即存在 $t_0 \geq 0$, 可分以下 2 种情况讨论.

1) $E(t_0) = 0, I(t_0) > 0$, 有

$$E'(t_0) = \beta_2 S(t_0) I(t_0) > 0 \quad (5)$$

由此可见, 存在 $\delta > 0$, 当 $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ 时, 有 $E'(t) > 0$. 这说明 $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ 时, $(S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t)) \notin M_\delta$, 出现了矛盾.

2) $E(t) > 0, I(t_0) = 0$, 有

$$I'(t_0) = \sigma E > 0$$

由此可见, 存在 $\delta > 0$, 当 $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ 时, 有 $I'(t) > 0$. 这说明 $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ 时, $(S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t)) \notin M_\delta$, 出现了矛盾.

这就证明了 $M_\delta = \left\{ (S_h(t), 0, S(t), 0, 0, M(t)) : S_h(t) \leq \frac{A_1}{\mu_1}, S \leq \frac{A_2}{\mu_2}, M \leq \frac{1}{d} \left(\Lambda + \eta \frac{A_1}{\mu_1} \right) \right\}$.

无病平衡点 E_0 在 M_δ 中是唯一的平衡点, 下面证明当 $R_0 > 1$ 时, $W^s(E_0) \cap \dot{\Omega} = \emptyset$ 成立. 现在考虑模型(1) 的几个方程

$$\begin{aligned} E'(t) &= \beta_2 SI - \mu_2 E - \sigma E \\ I'(t) &= \sigma E - \mu_2 I - m\phi IM \end{aligned}$$

由 $R_0 > 1$, 容易得出 $\beta_2 S^0 \sigma > (\mu_2 + m\phi M^0)(\mu_2 + \sigma)$.

选足够小的 $\varepsilon > 0$, 得到

$$(\beta_2 S^0 - \varepsilon)(\sigma - \varepsilon) > (\mu_2 + m\phi M^0 - \varepsilon)(\mu_2 + \sigma - \varepsilon) \quad (6)$$

通过直接计算, 对于足够小的 $\varepsilon_1 > 0$, $E < \varepsilon_1$ 和 $I < \varepsilon_1$, 有

$$\beta_2 S > \beta_2 S^0 - \varepsilon, -(\mu_2 + m\phi M) > -(\mu_2 + m\phi M^0) - \varepsilon$$

考虑模型(1) 的任意正解 $(S_h(t), I_h(t), S(t), E(t), I(t), M(t))$. 假定

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E(t) > 0, \limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) > 0$$

存在 $T > 0$, 对所有的 $t \geq T$, 有 $E(t) \leq \varepsilon_1, I(t) \leq \varepsilon_1$. 从模型(1) 的第 3 个方程得到, 对 $t \geq T$, 有

$$A_2 - \mu_2 S - \beta_2 S \epsilon_1 \leq S' \leq A_2 - \mu_2 S + \beta_2 S \epsilon_1$$

对充分小的 $\epsilon_1 > 0$, 存在 $T_1 > 0$, 对所有的 $t \geq T + T_1$, 有

$$\begin{aligned} E' &> -(\mu_2 + \sigma + \epsilon)E + (\beta_2 S^0 - \epsilon)I \\ I' &> (\sigma - \epsilon)E - (\mu_2 + m\phi M^0 + \epsilon)I \end{aligned} \quad (7)$$

考虑一个辅助系统

$$\begin{aligned} E' &= -(\mu_2 + \sigma + \epsilon)E + (\beta_2 S^0 - \epsilon)I \\ I' &= (\sigma - \epsilon)E - (\mu_2 + m\phi M^0 + \epsilon)I \end{aligned} \quad (8)$$

注意到辅助方程关于 E 和 I 的系数矩阵有正的非对角元素. 由式(6) 意味着矩阵有一个正的特征值和正的特征向量 $\mathbf{v}$, 很容易看到当 $t \rightarrow \infty$ 时模型(8) 的任意正解趋于无穷. 通过比较原则, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(E(t), I(t)) \rightarrow (0, \infty)$. 这意味着对所有的 $t \geq T + T_1$, 有 $E'(t) = \beta_2 S(t)I(t) > 0$. 这与对所有的 $t \geq T$ 有 $E(t) \leq \epsilon_1, I(t) \leq \epsilon_1$ 矛盾. 所以有 E_0 在 M_0 是全局稳定的, 而且 E_0 是孤立不变集和非周期的. 根据文献[13] 可以得到在 $\dot{\Omega}$ 中, 模型(1) 的解是一致持续的. 说明当 $R_0 > 1$ 时, 疾病是一致持续的.

4 最优控制

对动物布病的检测可以有效控制其流行, 但一般需要很大的控制力度, 这关系到检测扑杀处理的费用, 包括检测试剂、检测过程、扑杀带来的损失等. 为了在达到控制目的的同时降低控制成本, 利用最优控制理论对疫情进行时变控制.

在模型(1) 中, 为了分析动物布鲁氏菌病检测扑杀所需的最佳策略, 修改(1) 式引入依赖时间的控制量 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ ^[14], 如下式所示:

$$\begin{cases} S'_h(t) = A_1 - \beta_1 S_h I - \mu_1 S_h + \gamma I_h \\ I'_h(t) = \beta_1 S_h I - \mu_1 I_h - \gamma I_h \\ S'(t) = A_2 - \beta_2 S I - \mu_2 S \\ E'(t) = \beta_2 S I - \mu_2 E - \sigma E \\ I'(t) = \sigma E - \mu_2 I - m\mu_2(t)\phi IM \\ M'(t) = \Lambda + (1 - \mu_1(t))\eta I_h - dM \end{cases} \quad (9)$$

控制量 $\mu_1(t)$ ($0 \leq \mu_1(t) \leq 1$) 通过提高有效信息的数量来提高兽群中布病检测扑杀效率. 控制量 $\mu_2(t)$ ($0 \leq \mu_2(t) \leq 1$, 0 表示无控制作用, 1 表示 100% 的控制作用, 即所有受感染动物将通过检测从兽群中清除) 模拟了检测并清除种群中受感染动物所需的努力. 通过扑杀受感染的动物来控制布鲁氏菌病, 需要检测动物是否受感染, 这就需要业主的合作和政府适当的补偿. 为了成功控制布鲁氏菌病, 政府部门必须适当规划、协调和提供资源.

目标函数是将一个兽群中受感染动物(I) 的数量降到最低, 同时将与控制量 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 相关的成本尽可能降到最低. $U = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1, \mu_2 \text{ 在 } [0, T] \text{ 上是勒贝格可测的}\}$. 因此, 目标函数 J 包含一组可行的控制量 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 且满足有限的时间区间 $[0, T]$ ($T > 0$), 即

$$J(\mu) = \int_0^T \left\{ I(t) + \frac{1}{2} B_1 \mu_1^2(t) + \frac{1}{2} B_2 \mu_2^2(t) \right\} dt \quad (10)$$

其中 B_1 和 B_2 是对应的控制措施成本(权重因子).

因此, 最优控制问题可以描述为

$$OCP: \begin{cases} \min, & J(\mu) \\ s. \ t. & \mu_i \in U, i = 1, 2 \end{cases} \quad (11)$$

为了确定模型(9) 的最优控制解, 首先保证其存在最优控制解. 通过以下定理给出:

定理 4 考虑模型(9) 的控制问题, 存在一个最优控制 $\vec{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*)$, 其中 $\mu_1^*, \mu_2^* \in U$, 使得

$$J(\mu_1^*, \mu_2^*) = \min_{\mu_1, \mu_2 \in U} J(\mu_1, \mu_2)$$

证 这里应用最优存在理论^[15] 来证明这个定理.

- (i) 对任何控制变量 $\mu_1, \mu_2 \in U$ 和模型(9) 的初始状态变量都是非空的;
- (ii) 控制集 U 是闭集且是凸集;
- (iii) 模型(9) 的右边的线性函数满足初始条件, 所以在控制集 U 上是有界的;
- (iv) 目标函数(10) 中的被积函数在控制集 U 上是凸集, 且存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得

$$\left(I + \frac{1}{2}B_1\mu_1^2 + \frac{1}{2}B_2\mu_2^2\right) \geq c_1 \|\mu\|^{c_2} \quad (12)$$

因为 $I \geq 0$, $\frac{1}{2}B_1\mu_1^2 + \frac{1}{2}B_2\mu_2^2 \geq \frac{1}{2}\min\{B_i\} \|\mu\|^2$, 所以取 $c_1 = \frac{1}{2}\min\{B_i\}$, $c_2 = 2$ 可以满足(12) 式. 综上所述, 模型(9) 存在最优控制解.

由文献[16] 导出了最优控制必须满足的必要条件. 定义(11) 式的哈密顿量 H 为

$$H = I(t) + \frac{1}{2}B_1\mu_1^2(t) + \frac{1}{2}B_2\mu_2^2(t) + \lambda_{S_h}\dot{S}_h + \lambda_{I_h}\dot{I}_h + \lambda_S\dot{S} + \lambda_E\dot{E} + \lambda_I\dot{I} + \lambda_M\dot{M} \quad (13)$$

其中 $\lambda_{S_h}, \lambda_{I_h}, \lambda_S, \lambda_E, \lambda_I$ 和 λ_M 是各状态的伴随变量.

通过对 H 各状态变量微分, 可以得到各伴随变量的微分方程, 即

$$\frac{d\lambda_{S_h}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S_h}, \quad \frac{d\lambda_{I_h}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I_h}, \quad \frac{d\lambda_S}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}, \quad \frac{d\lambda_E}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E}, \quad \frac{d\lambda_I}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I}, \quad \frac{d\lambda_M}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial M}$$

从而得出

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{S_h}}{dt} &= \beta_1 I(\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) + \mu_1 \lambda_{S_h} \\ \frac{d\lambda_{I_h}}{dt} &= (\mu_1 + \gamma)\lambda_{I_h} - \gamma\lambda_{S_h} - (1 - \mu_1(t))\gamma\lambda_M \\ \frac{d\lambda_S}{dt} &= \beta_2 I(\lambda_S - \lambda_E) + \mu_2 \lambda_S \\ \frac{d\lambda_E}{dt} &= (\mu_2 + \sigma)\lambda_E - \sigma\lambda_I \\ \frac{d\lambda_I}{dt} &= \beta_1 S_h(\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) + \beta_2 S(\lambda_S - \lambda_E) + \mu_2 \lambda_I + m\mu_2(t)\phi M\lambda_I - 1 \\ \frac{d\lambda_M}{dt} &= m\mu_2(t)\phi I\lambda_I + d\lambda_M \end{aligned} \quad (14)$$

而且满足横截条件

$$\lambda_{S_h}(T) = \lambda_{I_h}(T) = \lambda_S(T) = \lambda_E(T) = \lambda_I(T) = \lambda_M(T) = 0 \quad (15)$$

通过求哈密顿方程(13) 对各控制变量的偏导数可以得到导数等于零的控制点, 从而有最优控制解, 即

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_1} \Big|_{\mu_1^*} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mu_2} \Big|_{\mu_2^*} = 0 \quad (16)$$

结合各控制量的边界条件, 通过求解方程(16) 得到

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{\lambda_M \eta I_h^*}{B_1}\right\}\right\} \\ \mu_2^* &= \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{\lambda_I m \phi I^* M^*}{B_2}\right\}\right\} \end{aligned}$$

其中 λ_I, λ_M 可以通过解方程组(14) 得到.

权重的真实值需要通过大量的实地调查和数据挖掘获得. 在已知真实权重值的情况下, 在目标函数中加入补助项可以改善计算结果. 在研究中 J 中包含 $I(t)$ 项不会对这个最优控制问题的总体结论产生重大影响, 但对我们未来的控制问题很有帮助.

5 数值模拟和讨论

利用数值模拟的方法分析模型(1) 在地方病平衡点 E_* 处的动力学性质. 所取参数 $A_1 = 1$, $\beta_1 = 0.1$,

$\mu_1 = 0.06, \gamma = 0.001, A_2 = 60, \beta_2 = 0.03, \mu_2 = 0.3, \sigma = 0.1, m = 1, \Lambda = 0.12, \eta = 0.1, d = 0.02$. 图 1 是数值模拟图, 其中: (a), (c), (e) 分别表示 ϕ 值不同时关于 I 的时间序列图; (b), (d), (f) 表示 ϕ 值不同时 M 和 I 的相图. 图 1(a) 是 $\phi = 0.03$ 时关于 I 的时间序列图, 曲线最后趋于一条直线, 平衡点是全局稳定的; 图 1(c) 是 $\phi = 0.07$ 时关于 I 的时间序列图, 曲线产生周期性的震荡; 图 1(d) 中曲线最后趋于一个环, 由此可知在这种情况下模型(1) 在地方病平衡点 E_* 处会出现分支; 图 1(e) 是 $\phi = 0.12$ 时关于 I 的时间序列图, 周期解消失, 曲线再次趋于一条直线. ϕ 的值从小到大, 周期解从无到有, 然后再消失, 说明检测比率的变化对模型的动力学有很大的影响, 从而对疾病的控制起到极其重要的影响. 对于模型(9), 由于没有进行实地的考察和调研, 对权重因子没有一个有价值的估计, 所以模拟的结果没有大的实用价值.

本文基于布病传播的具体特点, 建立反映检测行为的动力学模型, 通过分析这个模型, 发现检测对模型的动力学性质有显著的影响. 周期震荡行为的出现会严重影响防控措施的有效执行(例如疫病在周期运行的最低点, 人们可能误认为疫病开始消失). 因此, 在对动物进行检测时, 结合最优控制解, 适当提高动物的检测比率, 可使布病得到较好控制.

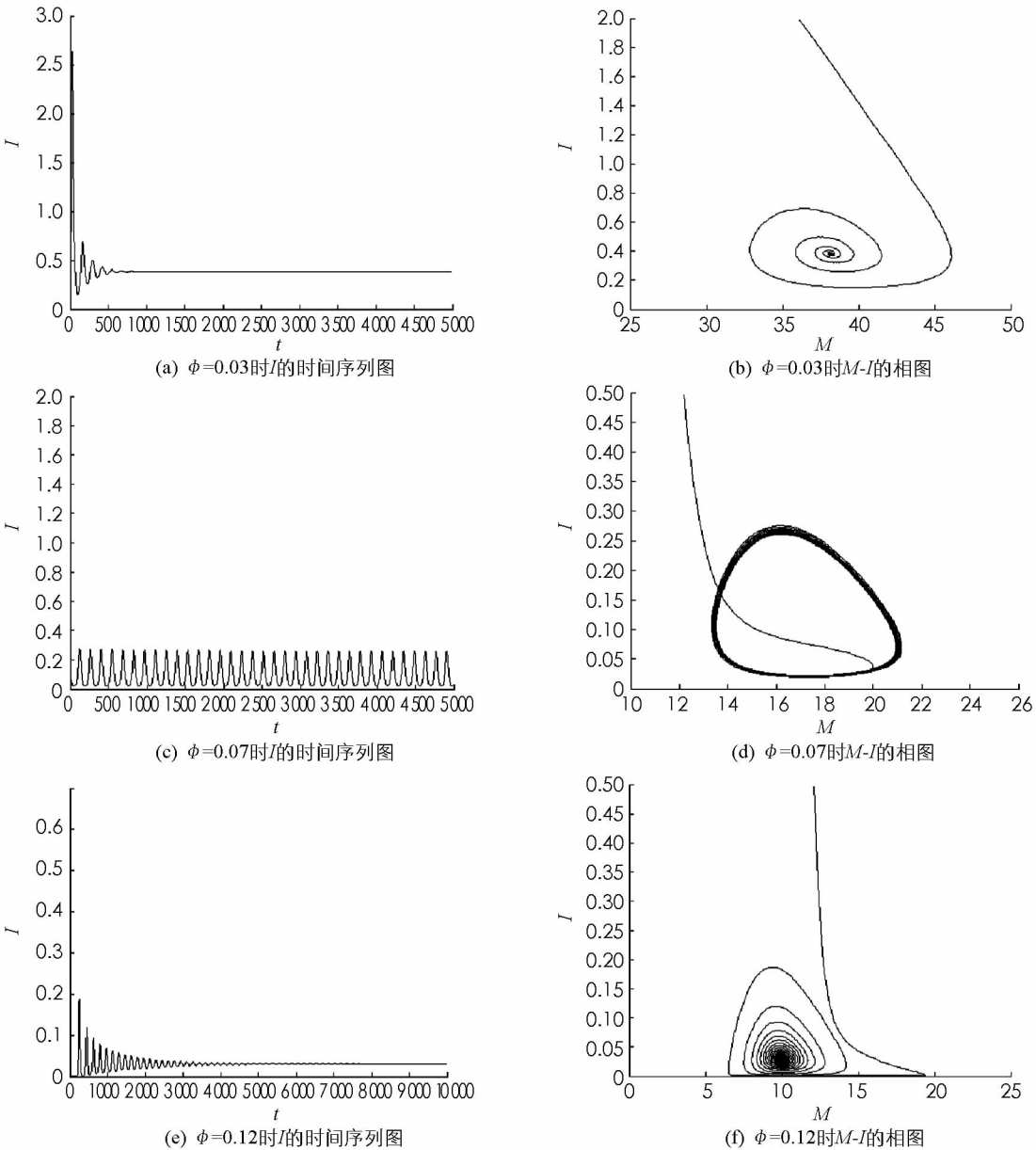


图 1 数值模拟图

参考文献:

- [1] CAPASSO L. Bacteria in Two-Millennia-Old Cheese, and Related Epizoonoses in Roman Populations [J]. *Journal of Infection*, 2002, 45(2): 122-127.
- [2] 中国疾病预防控制中心. 布鲁氏菌病. (2018-01-04) [2018-04-01]. <http://www.chinacdc.cn/jkzt/crb/zl/blsjb/>.
- [3] SUN G Q, ZHANG Z K. Global Stability for a Sheep Brucellosis Model with Immigration [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 246: 336-345.
- [4] MING TAO LI, GUI QUAN SUN, ZHEN JIN, et al. Transmission Dynamics of a Multi-Group Brucellosis Model with Mixed Cross Infection in Public Farm [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 237(15): 582-594.
- [5] JORGE G, RAUL N. Analysis of a Model of Bovine Brucellosis Using Singular Perturbations [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1994, 33(2): 211-223.
- [6] QIANG H, ZHEN J, ZHEN J, et al. Global Properties of a General Dynamic Model for Animal Diseases: A Case Study of Brucellosis and Tuberculosis Transmission [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, 414(1): 424-433.
- [7] QIANG H, XIANG D S, ZHEN J, et al. Modeling the Transmission Dynamics of Sheep Brucellosis in Inner Mongolia Autonomous Region, China [J]. *Mathematical Biosciences*, 2013, 242(1): 51-58.
- [8] MING T L, GUI Q S, ZHEN J, et al. Transmission Dynamics and Control for a Brucellosis Model in Hinggan League of Inner Mongolia, China [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering: MBE*, 2014, 11(5): 1115-1137.
- [9] ZINSSTAG J, ROTH F, ORKHON D, et al. A Model of Animal-Human Brucellosis Transmission in Mongolia [J]. *Preventive Veterinary Medicine*, 2005, 69(1-2): 77-95.
- [10] 南瑶瑶, 侯强, 杨晓峰. 基于检测行为的布病传播动力学模型分析 [J]. *数学实践与认识*, 2018, 48(18): 314-320.
- [11] DREESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1-2): 29-48.
- [12] LASALLE J P. *The Stability of Dynamical Systems* [M]. Providence: ACM Press, 1976: 7-12.
- [13] THIEME H R. Persistence Under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model) [J]. *SIAM J Math Anal*, 1993, 24(2): 407-435.
- [14] 赵清梅, 张俊容. 最优控制问题的 Tikhonov 正则化 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2019, 41(5): 59-63.
- [15] FLEMING W H, RISHEL R W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control* [M]. New York: Springer Verlag, 1975: 151-159.
- [16] PONTRYAGIN L S, BOLTYANSKII V G, GAMKRELIDZE R V. *The Mathematical Theory of Optimal Processes* [M]. Hoboken: Wiley, 1962: 318-353.

Analysis of Brucellosis Dynamics Model with the Number of Infected People as the Detection Information

FENG Jian-wu, HOU Qiang

School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China

Abstract: The implementation of detecting and killing measures plays an important role in the prevention, control and purification of animal epidemic diseases. Considered the number of infected people as the basis of detection of behavior, a dynamic model has been established in this paper to analyze the impact of detection of behavior on the transmission of brucellosis. We first calculate the basic reproduction number of R_0 , and analyze the existence of endemic equilibrium point. Then it is proved that the disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable, and the disease is uniformly persistent at $R_0 > 1$ and the optimal control solution of the disease is obtained. Finally, it is found through numerical simulation that periodic solutions will appear when the parameters satisfy certain conditions.

Key words: testing; basic reproduction number; uniform persistent; optimal control