

带非线性滑移边界条件的 Stokes 方程的 一种并行有限元算法^①

周康瑞, 尚月强

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 在完全区域分解法的基础上, 提出一种解带非线性滑移边界条件的 Stokes 方程的并行有限元算法. 由于这类边界具有次微分性, 故其弱变分形式是第二类变分不等式. 并行有限元近似解的最优误差估计将通过理论分析得到. 最后, 数值结果验证了算法的高效性.

关键词: Stokes 方程; 非线性滑移边界条件; 完全区域分解; 并行有限元算法

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)05-0032-07

考虑下列不可压缩的 Stokes 问题

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma \\ u_n = 0, -\sigma_\tau(\mathbf{u}) \in g\partial | u_\tau | & \text{on } S \end{cases} \quad (1)$$

其中: 有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$, $\Gamma \cap S = \emptyset$, $\overline{\Gamma \cup S} = \partial\Omega$; 标量函数 $g \geq 0$ 是阈值滑移函数; $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $u_\tau = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$ 是速度在 S 上的法向分量和切向分量; $\sigma_\tau = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}$ 是 Cauchy 压力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的切向分量, 满足 $\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{u}, p) = (\nu e_{ij}(\mathbf{u}) - p\delta_{ij})n_j$, 其中 $e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2$, 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$, 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$. 令 $\psi: \mathbb{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ 是一个具有凸性和弱下半连续性的函数(ψ 与 $+\infty$ 不等), 次微分集 $\partial\psi(a)$ 表示函数 ψ 在点 a 处的次微分: $\partial\psi(a) = \{b \in \mathbb{R}: \psi(h) - \psi(a) \geq b(h-a), \forall h \in \mathbb{R}\}$.

带非线性滑移边界条件^[1]的方程被应用于动脉硬化患者的血液流动、水和岩石的雪崩等模型中. 在对 Stokes 方程进行数值模拟时, 有限元是一种有效的方法^[2-4]. 并行有限元算法由文献^[5]提出, 并被广泛应用与推广^[6-10]. 本文在完全区域分解法^[11]的基础上, 设计了求解带非线性滑移边界条件的 Stokes 方程的一种并行有限元离散方法, 其主要思想为在整个求解区域上定义多尺度网格(多尺度网格由所负责的子区域的细网格元素和覆盖余下区域的粗网格元素组成), 并在多尺度网格上求解一个全局问题, 获得给定子区域的近似解.

^① 收稿日期: 2019-02-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(11361016); 重庆市基础与前沿探索研究计划项目(cstc2018jcyjAX0305); 中央高校基本科研业务费专项(XDJK2018B032).

作者简介: 周康瑞(1994—), 女, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程数值解的研究.

通信作者: 尚月强, 博士, 教授.

1 预备知识

空间 $H^k(\Omega)^2$ 的范数表示为 $\|\cdot\|_k$, $L^2(\Omega)^2$ 的内积与范数表示为 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$. 本文所使用的空间为:

$$V = \{\mathbf{u} \in H_1(\Omega)^2, \mathbf{u}|_r = 0, u_n|_s = 0\}, V_0 = H_0^1(\Omega)^2, M = L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p dx = 0\}$$

空间 V 的内积与范数表示为 $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)$ 和 $\|\cdot\|_v = \|\nabla \cdot\|$, 定义: $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$, $d(\mathbf{v}, q) = (\nabla \cdot \mathbf{v}, q)$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, q \in M$. 本文定义字母 c 为一个大于 0 的常数, 它与网格参数无关, 在不同式子可代表不同值.

方程(1)的变分形式^[12]为: 求 $(\mathbf{u}, p) \in V \times M$, 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(v_\tau) - j(u_\tau) - d(\mathbf{v} - \mathbf{u}, p) \geqslant (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) & \forall \mathbf{v} \in V \\ d(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in M \end{cases} \quad (2)$$

其中 $j(\zeta) = \int_S g |\zeta| ds$, $\zeta \in H^{\frac{1}{2}}(S)$. 方程(2)等价于以下变分等式^[13]: 求 $(\mathbf{u}, p) \in V \times M$, 存在且仅存在一个 $\lambda \in \Lambda$, 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p) + \int_S \lambda g v_\tau ds = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V \\ d(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in M \\ \lambda u_\tau = |u_\tau| & a. e. \text{ on } S \end{cases} \quad (3)$$

其中凸集 Λ 满足: $\Lambda = \{\mu \in L^2(S), |\mu(x)| \leqslant 1, a. e. \text{ on } S\}$.

假设对 Ω 的粗网格剖分 T^H 和细网格剖分 T^h ($0 < h < H < 1$) 都是拟一致剖分, 速度和压力的有限元空间分别为 $V_H(\Omega) \subset V_h(\Omega) \subset V$, $M_H(\Omega) \subset M_h(\Omega) \subset M$. 若给定 $G \subset \Omega$, 对于剖分 T^h , 定义 $T^h(\Omega)$, $V_h(\Omega), M_h(\Omega)$ 在 G 上的限制为 $T^h(G), V_h(G), M_h(G)$, 且 $V_0^h(G) = \{\mathbf{v} \in V_h(G): \text{supp } \mathbf{v} \subset\subset G\}$, $M_0^h(G) = \{q \in M_h(G): \text{supp } q \subset\subset G\}$. 在混合空间的基本假设^[6]条件下, 方程(3)的有限元逼近如下: 求 $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V \times M$, 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p_h) + \int_S \lambda g v_\tau ds = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_h(\Omega) \\ d(\mathbf{u}_h, q) = 0 & \forall q \in M_h(\Omega) \\ \lambda u_{h\tau} = |u_{h\tau}| & a. e. \text{ on } S \end{cases} \quad (4)$$

应用插值逼近定理^[14], 有以下结果

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leqslant c \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\frac{1}{2},L^2(S)} \right) \leqslant \\ &ch^s (\|\mathbf{u}\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}) + ch^{\frac{s+1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\frac{1}{2},1+s,\partial\Omega}, 0 \leqslant s \leqslant t \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{-1,\Omega} &\leqslant ch \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\frac{1}{2},L^2(S)} \right) \leqslant \\ &ch^{s+1} (\|\mathbf{u}\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}) + ch^{\frac{s+3}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\frac{1}{2},1+s,\partial\Omega}, 0 \leqslant s \leqslant t \end{aligned} \quad (6)$$

2 有限元局部算法

设 $T^H(\Omega)$ 是网格尺寸为 $H \gg h$ 的粗网格, $T^h(\Omega_0)$ 是局部细网格, 其中 Ω_0 是由子区域 D 向外扩展一定尺寸得到的 (即 $D \subset\subset \Omega_0 \subset \Omega$). 全局多尺度网格 $T^{H,h}(\Omega)$ 表示对子区域 Ω_0 生成尺寸为 h 的细网格, 对其余区域生成尺寸为 H 的粗网格, 它可以通过对整个区域的初始粗网格 $T^H(\Omega)$ 进行局部加密并通过自适应相容 (即两单元交集或为空, 或为一公共顶点, 或为一公共边) 得到. 定义对应的有限元空间 $V_{H,h}(\Omega) \subset V$, $M_{H,h}(\Omega) \subset M$, 满足混合空间基本假设. 因为子区域 D 包含多尺度网格 $T^{H,h}(\Omega)$ 的绝大多数自由度, 故当

我们使用 $T^{H,h}(\Omega)$ 解一个全局问题时, 得到的是子区域 D 上的局部近似解.

算法 1 局部有限元算法

求 $(\mathbf{u}_H^h, p_H^h) \in V_{H,h}(\Omega) \times M_{H,h}(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_H^h, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p_H^h) + \int_S \lambda g v_\tau ds = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_{H,h}(\Omega) \\ d(\mathbf{u}_H^h, q) = 0 & \forall q \in M_{H,h}(\Omega) \end{cases} \quad (7)$$

引理 1^[15] 假设 $\varphi \in H^{-1}(\Omega)^2$, $D \subset \subset \Omega_0 \subset \Omega$, 对于 $(\mathbf{w}, r) \in V_h(\Omega) \times M_h(\Omega)$, 满足

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, r) + d(\mathbf{w}, q) = (\varphi, \mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V_h(\Omega_0) \times M_h(\Omega_0)$$

且有以下局部误差估计

$$\|\mathbf{w}\|_{1,D} + \|r\|_{0,D} \leq c(\|\mathbf{w}\|_{0,\Omega_0} + \|r\|_{-1,\Omega_0} + \|\varphi\|_{-1,\Omega_0})$$

定理 1 假设 $(\mathbf{u}_h, p_h)$ 是方程(4) 的标准有限元解, $(\mathbf{u}_H^h, p_H^h)$ 由算法 1 得到, 满足

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_H^h\|_{1,D} + \|p_h - p_H^h\|_{0,D} \leq cH^{s+1}(\|\mathbf{u}\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}) + cH^{\frac{s+3}{2}}\|\mathbf{u}\|_{\frac{1}{2},1+s,\Omega}, \quad 0 \leq s \leq t$$

则

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H^h\|_{1,D} + \|p - p_H^h\|_{0,D} \leq c(h^s + H^{s+1})(\|\mathbf{u}\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}) + c(h^{\frac{s+1}{2}} + H^{\frac{s+3}{2}})\|\mathbf{u}\|_{\frac{1}{2},1+s,\Omega}, \quad 0 \leq s \leq t$$

证 由于 $T^h(\Omega)$ 与 $T^{H,h}(\Omega)$ 在 Ω_0 上的假设一致, 由方程(4) 和算法 1 得到

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p_h) + \int_S \lambda g v_\tau ds + d(\mathbf{u}_h, q) = a(\mathbf{u}_H^h, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p_H^h) + \int_S \lambda g v_\tau ds + d(\mathbf{u}_H^h, q)$$

即

$$a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_H^h, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p_h - p_H^h) + d(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_H^h, q) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V_0^h(\Omega_0) \times M_0^h(\Omega_0)$$

由引理 1 得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_H^h\|_{1,D} + \|p_h - p_H^h\|_{0,D} &\leq c(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_H^h\|_{0,\Omega_0} + \|p_h - p_H^h\|_{-1,\Omega_0}) \leq \\ &c(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H^h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{-1,\Omega} + \|p - p_H^h\|_{-1,\Omega}) \leq \\ &cH^{s+1}(\|\mathbf{u}\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}) + cH^{\frac{s+3}{2}}\|\mathbf{u}\|_{\frac{1}{2},1+s,\Omega} \end{aligned} \quad (8)$$

结合(5) 式、(6) 式和(8) 式, 定理得证.

3 有限元并行算法

首先对求解区域 Ω 进行分解, 得到互不重叠的子区域 $D_1, D_2, \dots, D_J$, 然后将 D_j 向外扩展一定尺寸得到相互重叠的子区域 Ω_j , 满足 $D_j \subset \subset \Omega_j \subset \Omega (j = 1, 2, \dots, J)$. 对于每一个 Ω_j , 我们通过对初始粗网格 $T^H(\Omega)$ 进行局部改进和自适应过程得到多尺度网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$, 它由 Ω_j 区域的细网格元素和覆盖余下区域的粗网格元素组成. 所有这些 $T_j^{H,h}(\Omega) (j = 1, 2, \dots, J)$ 就是对求解区域 Ω 的一个完全区域分解. 并行有限元算法的基本思想就是在每个 $T_j^{H,h}(\Omega)$ 并行地使用局部有限元算法, 获得每个子区域 D_j 上的局部近似解. 网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$ 所对应的有限元空间记为 $V_j^{H,h}(\Omega) \subset V, M_j^{H,h}(\Omega) \subset M$.

算法 2 并行有限元算法

1) 并行求 $(\mathbf{u}_j^{H,h}, p_j^{H,h}) \in V_j^{H,h}(\Omega) \times M_j^{H,h}(\Omega) (j = 1, 2, \dots, J)$, 满足

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_j^{H,h}, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p_j^{H,h}) + \int_S \lambda g v_\tau ds = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_j^{H,h}(\Omega) \\ d(\mathbf{u}_j^{H,h}, q) = 0 & \forall q \in M_j^{H,h}(\Omega) \end{cases} \quad (9)$$

2) 在 D_j 中, 取 $(\mathbf{u}^h, p^h) = (\mathbf{u}_j^{H,h}, p_j^{H,h}) (j = 1, 2, \dots, J)$.

为进行并行有限元算法的误差分析, 定义分片范数如下:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^J \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,D_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|p - p^h\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^J \|p - p^h\|_{0,D_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

定理 2 设 $(\mathbf{u}^h, p^h)$ 是由算法 2 得到的近似解, 满足

$$\| \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}^h \| \|_{1,\Omega} + \| \| p_h - p^h \| \|_{0,\Omega} \leqslant cH^{s+1} (\| \mathbf{u} \|_{s+1,\Omega} + \| p \|_{s,\Omega}) + cH^{\frac{s+3}{2}} \| \mathbf{u} \|_{\frac{1}{1+s},\partial\Omega}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \quad (10)$$

则

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_{1,\Omega} + \| p - p^h \|_{0,\Omega} \leqslant c(h^s + H^{s+1}) (\| \mathbf{u} \|_{s+1,\Omega} + \| p \|_{s,\Omega}) + c(h^{\frac{s+1}{2}} + H^{\frac{s+3}{2}}) \| \mathbf{u} \|_{\frac{1}{1+s},\partial\Omega}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

证 由定理 1 得

$$\| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}^h \|_{1,D_j} + \| p_h - p^h \|_{0,D_j} \leqslant cH^{s+1} (\| \mathbf{u} \|_{s+1,\Omega} + \| p \|_{s,\Omega}) + cH^{\frac{s+3}{2}} \| \mathbf{u} \|_{\frac{1}{1+s},\partial\Omega} \\ 0 \leqslant s \leqslant t, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

对所有子区域 $D_j (j = 1, 2, \dots, J)$ 上的结果求和, 可得(10) 式, 再结合(5) 式, 定理得证.

4 数值结果

本节中将给出数值算例以验证并行算法的有效性. 数值实验所使用的计算机处理器为 Inter(R) Core(TM)i3-2350M CPU 2.30 GHz, 内存为 4 GB. 对每个多尺度网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$, 通过 Uzawa 迭代^[13] 解方程(9), 得到子区域 Ω_j 上的近似解 $(\mathbf{e}_j, \eta_j)$. 给定一个初始值 $\lambda^0 \in \Lambda$, 则 λ^n 为已知, 我们通过以下式子求解 $(\mathbf{e}_j^n, \eta_j^n)$ 和 $\lambda^{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$:

$$\begin{cases} a(\mathbf{e}_j^n, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, \eta_j^n) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \int_S \lambda g v_\tau \mathrm{d}s & \forall \mathbf{v} \in V_j^{H,h}(\Omega) \\ d(\mathbf{e}_j^n, q) = 0 & \forall q \in M_j^{H,h}(\Omega) \end{cases}$$

和

$$\lambda^{n+1} = P_\Lambda(\lambda^n + \rho g \mathbf{e}_{j\tau}^n)$$

其中: 参数 $\rho > 0$, $P_\Lambda: L^2(S) \longrightarrow \Lambda$, 满足 $P_\Lambda(\gamma) = \sup(-1, \inf(1, \gamma))$, $\forall \gamma \in L^2(S)$. 通过 Uzawa 迭代法求解时, 其迭代收敛标准为 $\frac{\| \mathbf{e}_j^{n+1} - \mathbf{e}_j^n \|_{0,\Omega}}{\| \mathbf{e}_j^{n+1} \|_{0,\Omega}} < 10^{-6}$, 其中 $\mathbf{e}_j^n$ 是第 n 次迭代解.

4.1 已知解析解

考虑求解区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 其边界包含 Γ 和 S 两个部分:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) \mid 0 < y < 1\} \\ S &= S_1 \cup S_2 = \{(1, y) \mid 0 < y < 1\} \cup \{(x, 1) \mid 0 < x < 1\} \end{aligned}$$

准确解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= (u_1(x, y), u_2(x, y)), \quad p(x, y) = (2x - 1)(2y - 1) \\ u_1(x, y) &= -x^2 y(x - 1)(3y - 2), \quad u_2(x, y) = xy^2(y - 1)(3x - 2) \end{aligned}$$

容易验证, 准确解 $\mathbf{u}$ 满足: 在 Γ 上, $\mathbf{u} = 0$; 在 S_1 上, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ 以及在 S_2 上, $u_1 \neq 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_2 = 0$, 切向单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 在 S_1, S_2 上分别为 $(0, 1), (-1, 0)$, 则

$$\begin{cases} \sigma_\tau = 4v y^2(y - 1) & \text{on } S_1 \\ \sigma_\tau = 4v x^2(x - 1) & \text{on } S_2 \end{cases}$$

另一方面, 在 $S = S_1 \cup S_2$ 上有 $|\sigma_\tau| \leqslant g$, 则标量函数 g 在 S_1 和 S_2 上可取为 $g = -\sigma_\tau \geqslant 0$. 为考察算法的渐进误差, 将求解区域分解成互不重叠的 4 个子区域:

$$D_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad D_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad D_3 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad D_4 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

然后将每个子区域 D_j 向外扩展尺寸 h 得到 $\Omega_j (j = 1, 2, 3, 4)$. 计算时, 取 $v = 0.01$, 迭代初值 $\lambda^0 = 1$, 参数

$\rho = v$, 使用 $P_1 b - P_1$ 元. 算法 2 中细网格尺寸为 $h = \frac{1}{n^2} (n = 4, 6, \dots, 16)$, 粗网格与细网格尺寸关系满足

$2H = h^{\frac{1}{2}}$. 表 1 为标准有限元算法的数值结果, 表 2 为算法 2 的数值结果, 其中, T 为算法在 4 个子区域上

计算时间的最大值, 计算时间为网格生成时间、方程求解时间和误差计算时间之和. RuH^1 和 RpL^2 分别表示相对误差 $\frac{\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{1,\Omega}}{\| \mathbf{u} \|_{1,\Omega}}$ 和 $\frac{\| p - p_h \|_{0,\Omega}}{\| p \|_{0,\Omega}}$ 关于 h 的收敛率. 对比表 1 和表 2 可知, 算法 2 与标准有限元算

法的收敛阶(如图 1,2) 和近似解精度没有明显差别,但对比 T 可以看出算法 2 能节省大量的计算时间.

表 1 标准有限元算法的近似解误差

$\frac{1}{h}$	T/s	$\frac{\ u-u_h\ _{1,\Omega}}{\ u\ _{1,\Omega}}$	$\frac{\ p-p_h\ _{0,\Omega}}{\ p\ _{0,\Omega}}$	RuH^1	RpL^2
16	0.156	0.286 814	0.003 183 23	—	—
36	0.813	0.080 394 2	0.000 666 393	1.568 44	1.928 37
64	2.875	0.038 801	0.000 226 279	1.266 15	1.877 26
100	8.672	0.023 533 1	0.000 100 182	1.120 45	1.825 68
144	18.14	0.015 989 4	5.238 51e-005	1.059 88	1.778 09
196	37.391	0.011 628 2	3.066 85e-005	1.033 07	1.736 57
256	94.814	0.008 855 51	1.946 93e-005	1.019 95	1.701 46

表 2 算法 2 的近似解误差

$\frac{1}{h}$	$\frac{1}{H}$	T/s	$\frac{\ u-u_h\ _{1,\Omega}}{\ u\ _{1,\Omega}}$	$\frac{\ p-p_h\ _{0,\Omega}}{\ p\ _{0,\Omega}}$	RuH^1	RpL^2
16	8	0.125	0.268 674	0.004 194 52	—	—
36	12	0.547	0.081 586	0.000 720 336	1.469 72	2.172 59
64	16	1.438	0.041 336 2	0.000 239 958	1.181 72	1.910 53
100	20	3.328	0.025 667 1	0.000 102 672	1.067 77	1.902 2
144	24	5.22	0.017 640 9	5.396 04e-005	1.031 03	1.780 86
196	28	16.015	0.012 791 6	3.248 28e-005	1.039 45	1.626 49
256	32	18.026	0.009 869 58	2.069 22e-005	0.971 049	1.688 58

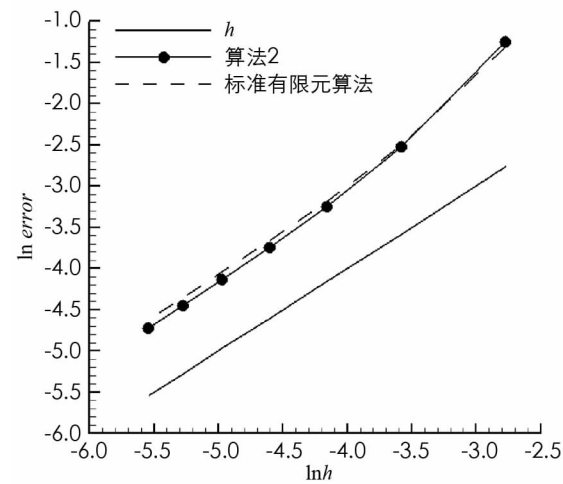


图 1 速度 u 的 H^1 误差

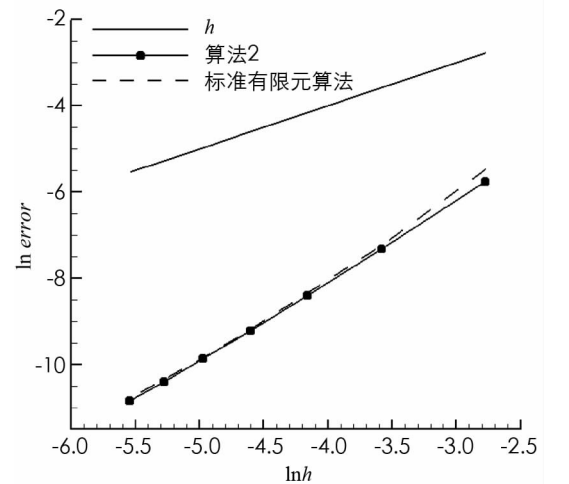


图 2 压力 p 的 L^2 误差

4.2 分叉血液流动模型

该算例研究了分叉动脉血管中血液流动的二维简化模型,假设血管为具有一定长度的“Y”字形管(图 3),血液从左入口流入主血管再从两个分支血管流出,流入速度为 $u_1 = 1.2 - 1.2(y - 1)^2$, $u_2 = 0$. 设主血管的直径为 2,主分支出口的宽度为 1.25,另一个分支出口的宽度为 0.75,在主血管的上、下边界取滑移边界,阈值函数 $g = |\sigma_\tau|$,其余的区域边界取 Dirichlet 边界. 计算时使用 $P_2 - P_1$ 元, $\nu = 1$,应用 Delaunay 网格生成方法,细网格区域为每单位 12

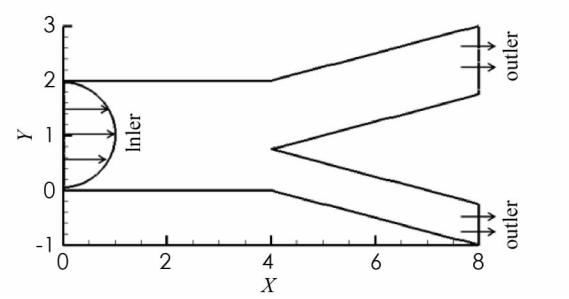


图 3 分叉血管模型的计算区域

个网格点, 粗网格区域为每单位 4 个网格点. 图 4—5 分别为压力等值线、速度与流线的数值模拟图. 图 4—5 中, 3 组结果没有明显差别, 压力在分叉连接处变化剧烈, 速度在主分支血管内变化较大, 并达到最大值.

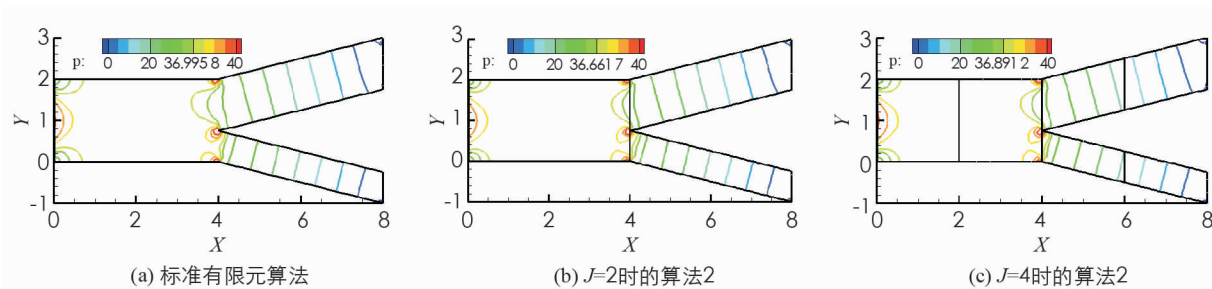


图 4 压力等值线

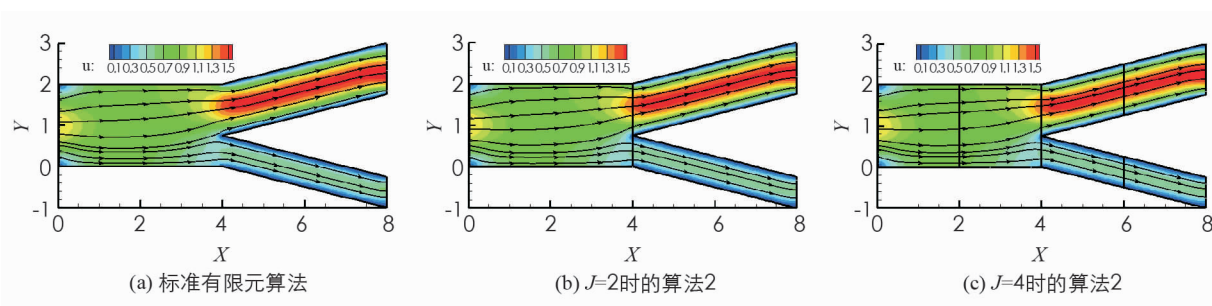


图 5 速度与流线

5 结 论

基于完全区域分解法, 本文设计并分析了一种求解带非线性滑移边界条件 Stokes 方程的并行有限元算法. 通过数值算例, 对比标准有限元算法, 验证了并行有限元算法的有效性和高效性.

参考文献:

- [1] FUJIT H. A Mathematical Analysis of Motions of Viscous Incompressible Fluid under Leak or Slip Boundary Conditions [J]. RIMS Kokyuroku, 1994, 888(1): 199-216.
- [2] 黄淑梅, 尚月强. 三维定常 Navier-Stokes 方程的有限元计算 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2013, 31(5): 31-37.
- [3] 刘 青, 尚月强. 非定常 Navier-Stokes 方程有限元算子分裂算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(3): 75-83.
- [4] 杨晓成, 尚月强. Navier-Stokes 方程的回溯两水平有限元变分多尺度方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 47-57.
- [5] XU J C. A Novel Two-Grid Method for Semilinear Elliptic Equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1994, 15(1): 231-237.
- [6] XU J C, ZHOU A H. Local and Parallel Finite Element Algorithms Based on Two-Grid Discretizations [J]. Mathematics of Computation, 2000, 69(231): 881-910.
- [7] 尚月强, 何银年. 不可压缩流动的并行数值方法 [J]. 中国科学: 数学, 2013, 43(6): 576-589.
- [8] SHANG Y Q, WANG K. Local and Parallel Finite Element Algorithms Based on Two-Grid Discretizations for the Transient Stokes Equations [J]. Numerical Algorithms, 2010, 54(2): 195-218.
- [9] 尚月强, 何银年. 定常 Stokes 方程一种基于完全区域分解的有限元并行算法 [J]. 应用数学和力学, 2010, 31(5): 609-617.
- [10] SHANG Y Q, QIN J. Parallel Finite Element Variational Multiscale Algorithms for Incompressible Flow at High Reynolds Numbers [J]. Applied Numerical Mathematics, 2017, 117: 1-21.

- [11] MITCHELL W F. Parallel Adaptive Multilevel Methods with Full Domain Partitions [J]. *Applied Numerical Analysis & Computational Mathematics*, 2004, 1(1): 36-48.
- [12] LI Y, AN R. Penalty Finite Element Method for Navier-Stokes Equations with Nonlinear Slip Boundary Conditions [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2012, 69(3): 550-566.
- [13] LI Y, LI K T. Uzawa Iteration Method for Stokes Type Variational Inequality of the Second Kind [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2011, 27(2): 303-316.
- [14] CHEN Z X. *Finite Element Methods and Their Applications* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [15] HE Y N, XU J C, ZHOU A H, et al. Local and Parallel Finite Element Algorithms for the Stokes Problem [J]. *Numerische Mathematik*, 2008, 109(3): 415-434.

A Parallel Finite Element Algorithm for Stokes Equations with Nonlinear Slip Boundary Conditions

ZHOU Kang-rui, SHANG Yue-qiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Based on full domain partition, a parallel finite element algorithm has been proposed for the Stokes equations with nonlinear slip boundary conditions. The variational form of these equations are variational inequalities of the second kind due to the subdifferential property included by the nonlinear slip boundary condition. The optimal error estimates of the parallel finite element approximate solutions have been obtained by theoretical analysis. Some numerical results have been given to demonstrate the high efficiency of the parallel algorithm.

Key words: Stokes equations; nonlinear slip boundary conditions; full domain partition; parallel finite element algorithm

责任编辑 张 枸