第 45 卷　第 5 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2020 年 5 月
Vol. 45　No. 5　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　May　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.05.009

一类非线性三阶微分方程边值问题多个解的存在性①

纪宏伟

南通师范高等专科学校 数学与科学教育系,江苏 南通 226006

摘要: 利用不动点指数理论和拓扑度理论研究非线性三阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,u(t)),\ t\in[0,1] \\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性,通过计算相应的线性问题的特征值与代数重数,获得了 2 个正解、2 个负解及 2 个变号解的存在性结果. 如果非线性项是奇函数,则所述问题至少存在 2 个正解、2 个负解及 4 个变号解.

关　键　词: 三阶微分方程;边值问题;变号解;不动点指数;Leray-Schauder 度

中图分类号:O175　　**文献标志码:A**　　**文章编号:** 1000－5471(2020)05－0051－07

三阶微分方程在应用数学和物理等很多学科中有重要的应用,许多实例都可以用它来刻画,如扰度弯曲的梁、电磁波的传播、重力驱动等,处理此类的方法也有很多. 文献[1]首先对三阶微分方程降阶,然后采用比较原理得到解的存在性结果. 文献[2]利用上下解方法讨论了三阶两点边值问题正解的存在性. 文献[3]运用 Krasnoselskii 不动点定理研究了三阶奇异问题正解的存在性与多重性. 文献[4]运用 Henderson 不动点定理得到了一类三阶三点边值问题至少有 2 个正解的存在性结果. 文献[5]应用 Leggett-williams 不动点定理和格林函数得到边值问题存在三重正解的充分条件. 文献[6-12]应用不动点指数并通过计算相应线性算子的特征值来研究非线性微分方程边值问题解的存在性结果.

受以上启发,本文讨论如下三阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,u(t)),\ t\in[0,1] \\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f\in C([0,1]\times R,R)$,应用不动点指数定理及 Leray-Schauder 度,在某些适当条件下得到 BVP(1) 多个正解及变号解的存在性. 以下给出非线性项 f 的假设.

(H_1) 对任意 $t\in[0,1]$,$u\in R\backslash\{0\}$,$f(t,u)u>0$;

(H_2) 方程 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\lambda}=\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{2}{3}\pi\right)$ 的无穷多个正解是:$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\cdots$;

(H_3) 存在正整数 n_0 和 n_1,使得 $\lambda_{2n_0}^3<\alpha_0<\lambda_{2n_0+1}^3$,$\lambda_{2n_1}^3<\alpha_1<\lambda_{2n_1+1}^3$,其中 $\alpha_0=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(t,u)}{u}$,$\alpha_1=\lim\limits_{|u|\to\infty}\frac{f(t,u)}{u}$ 关于 t 在[0,1]上一致;

(H_4) 存在常数 $M>0$ 使得对任意的 $|u|\leqslant M$,$|f(t,u)|<\frac{24}{17}M$.

① 收稿日期:2019－03－15
基金项目:江苏省高校青蓝工程基金项目(2018).
作者简介:纪宏伟(1977－),男,硕士,副教授,主要从事非线性泛函分析及高等数学研究.

注 1 代数方程 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda}=\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{2}{3}\pi\right)$具无穷多个正解是显然的，注意到$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda}>0$，并且当 $\lambda\to+\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda}\to 0$，而 $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{2}{3}\pi\right)$是取值充满$[-1,1]$中的连续周期函数，所以 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda}=\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{2}{3}\pi\right)$有无穷多个正根.

2 预备知识

设 $E=\{u\in C^2[0,1]:u(0)=u'(0)=u'(1)=0\}$是按范数 $\|u\|=\|u\|_0+\|u'\|_0+\|u''\|_0$ 构成的实 Banach 空间，其中 $\|u\|_0=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$，显然对 $u\in E$ 有 $\|u\|_0\leqslant\|u'\|_0\leqslant\|u''\|_0$. 令 $P=\{u\in E:u(t)\geqslant 0,t\in[0,1]\}$，同时定义算子 K，F 和 A 为

$$Ku(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,1],\ \forall u\in E \tag{2}$$

$$Fu(t)=f(t,u(t)),\ t\in[0,1],\ \forall u\in E \tag{3}$$

$$Au=KFu,\ u\in E \tag{4}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2(1-s)-\frac{1}{2}({}^{t}-s)2, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ \frac{1}{2}t^2(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases} \tag{5}$$

注 2 通过简单的计算可知，$G(t,s)\geqslant 0$.

引理 1 对任意 $f\in C[0,1]$，$u\in C^3[0,1]$是下面问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t),\ t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\end{cases} \tag{6}$$

的解，当且仅当 $u\in C[0,1]$，并且 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s)\mathrm{d}s$.

证 对方程 $-u'''(t)=f(t)$ 在 $t\in[0,1]$上连续积分 3 次，可得

$$u(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}u''(0)t^2+u'(0)t+u(0) \tag{7}$$

$$u'(t)=-t\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s+u''(0)t+u'(0) \tag{8}$$

将 $u(0)=u'(0)=u'(1)=0$ 代入可得

$$u''(0)=\int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

从而

$$u(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}t^2\int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 G(t,s)f(s)\mathrm{d}s \tag{10}$$

注意到

$$u(t)=\frac{1}{2}\int_0^t (2ts-s^2-t^2s)f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}t^2\int_t^1 t^2(1-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

因此

$$u'(t)=\int_0^t (s-ts)f(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 t(1-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{12}$$

$$u''(t)=-\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{13}$$

$$u'''(t)=-f(t) \tag{14}$$

且在边界上成立 $u(0)=u'(0)=u'(1)=0$.

显然算子 K，A：$E\to E$ 全连续，通过引理 1 我们得到边值问题(1) 在 $C^3[0,1]$ 中的解等价于算子方程 $Au=KFu$ 在 E 中的不动点.

引理 2　假设(H_1),(H_3) 成立，则算子 $A=KF$ 在θ和∞点是 Fréchet 可导的，进一步有 $A'(\theta)=\alpha_0K$，$A'(\infty)=\alpha_1K$.

证　由 $\alpha_0=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(t,u)}{u}$ 关于 t 在$[0,1]$上一致，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\forall t\in[0,1]$，$0<|u|<\delta$，有 $|f(t,u)-\alpha_0u|\leqslant\varepsilon|u|$，注意到 $f(t,0)=0$，因此对于 $u\in E$，当 $\|u\|<\delta$时，有$|(Au-A\theta-\alpha_0Ku)(t)|=|K(Fu-\alpha_0u)(t)|\leqslant\|K\|\max\limits_{s\in[0,1]}|f(s,u(s))-\alpha_0u(s)|\leqslant\|K\|\|u\|\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{\|u\|\to 0}\dfrac{\|Au-A\theta-\alpha_0Ku\|}{\|u\|}=0$，即 $A'(\theta)=\alpha_0K$.

再由 $\alpha_1=\lim\limits_{|u|\to\infty}\dfrac{f(t,u)}{u}$ 关于 t 在$[0,1]$上一致，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$ 使得 $\forall t\in[0,1]$，$|u|>R$，有 $|f(t,u)-\alpha_1u|\leqslant\varepsilon|u|$. 令 $\sigma=\max\limits_{|u|\leqslant R}|f(t,u)|$，则 $|Fu(t)-\alpha_1u(t)|=|f(t,u(t))-\alpha_1u(t)|\leqslant\sigma+\alpha_1R+\varepsilon\|u\|$. 因此 $|(Au-\alpha_1Ku)(t)|=|K(Fu-\alpha_1u)(t)|\leqslant\|K\|(\sigma+\alpha_1R+\varepsilon\|u\|)$，从而 $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty}\dfrac{\|Au-\alpha_1Ku\|}{\|u\|}\leqslant\varepsilon\|K\|$，即 $A'(\infty)=\alpha_1K$.

引理 3　假设(H_1) 成立，若 $u\in P\backslash\{\theta\}$ 是边值问题(1) 的解，则 $u\in P^{\circ}$.

证　由于 $u\in P\backslash\{\theta\}$ 及 $u(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$，显然 $u(t)>0$，$u''(0)=\int_0^1(1-s)f(s)\mathrm{d}s>0$，故 $u\in P^{\circ}$.

注 3　类似的，若 $u\in(-P)\backslash\{\theta\}$ 是边值问题(1) 的解，则 $u\in-P^{\circ}$.

引理 4　假设(H_2) 成立，则线性算子 K 的所有正的特征值为$\dfrac{1}{\lambda_1^3}>\dfrac{1}{\lambda_2^3}>\cdots\dfrac{1}{\lambda_n^3}>\cdots>0$，且每个特征值$\dfrac{1}{\lambda_n^3}$ 的代数重数为 1.

证　显然，$\dfrac{1}{\lambda_1^3}>\dfrac{1}{\lambda_2^3}>\cdots\dfrac{1}{\lambda_n^3}>\cdots>0$. 下设 μ 是线性算子 K 的任一正特征值，$u\in E\backslash\{\theta\}$ 为对应于 μ 的特征函数，则有

$$\begin{cases}-u'''(t)=\dfrac{1}{\mu}u(t),\ t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\end{cases}\tag{15}$$

通过计算，线性微分方程边值问题(15) 的特征方程的特征根是 $-\lambda$，$\frac{1}{2}\lambda(1+\sqrt{3}i)$，$\frac{1}{2}\lambda(1-\sqrt{3}i)$，其中 $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\mu}}$，所以其通解为

$$u(t)=C_1\mathrm{e}^{-\lambda t}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t+C_3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t,\ t\in[0,1]\tag{16}$$

于是

$$u'(t)=C_1(-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t})+C_2\lambda\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t+\frac{\pi}{3}\right)+C_3\lambda\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t+\frac{\pi}{3}\right)\tag{17}$$

由边界条件 $u(0)=u'(0)=0$，有 $C_1=-C_2$，$C_3=\sqrt{3}C_1$，$C_1\neq 0$. 再由边界条件 $u'(1)=0$，有

$$\mathrm{e}^{-\lambda}+2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{2}{3}\pi)=0\tag{18}$$

结合(H_2) 不难看出，$\lambda=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\mu}}$为$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots$，$\lambda_n$，$\cdots$ 中一个，从而$\dfrac{1}{\lambda_1^3}$，$\dfrac{1}{\lambda_2^3}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{\lambda_n^3}$，$\cdots$ 为线性算子 K 的特征值，且对应于特征值$\dfrac{1}{\lambda_n^3}$ 的特征函数是

$$u_n(t)=C\left[e^{-\lambda_n t}-e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)\right],\ t\in[0,1] \tag{19}$$

其中 C 是非零常数，据此有

$$\dim\ker\left(\frac{1}{\lambda_n^3}I-K\right)=\dim\ker(I-\lambda_n^3K)=1 \tag{20}$$

以下证明

$$\ker(I-\lambda_n^3K)=\ker(I-\lambda_n^3K)^2 \tag{21}$$

首先 $\ker(I-\lambda_n^3K)\subset\ker(I-\lambda_n^3K)^2$ 显然成立，故只需要证明 $\ker(I-\lambda_n^3K)^2\subset\ker(I-\lambda_n^3K)$. 任给 $u\in\ker(I-\lambda_n^3K)^2$，若 $(I-\lambda_n^3K)^2u\neq\theta$，则 $(I-\lambda_n^3K)u$ 就是属于 K 的特征值 $\frac{1}{\lambda_n^3}$ 的特征函数，由式(19)，则存在非零常数 γ 使得

$$(I-\lambda_n^3K)^2u=\gamma\left[e^{-\lambda_n t}-e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)\right] \tag{22}$$

通过直接的计算，有

$$\begin{cases}u'''(t)+\lambda_n^3u(t)=-\gamma\lambda_n^3\left[\mathrm{e}^{-\lambda_n t}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)+\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)\right]\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\end{cases} \tag{23}$$

边值问题(23)对应的齐次方程的通解为

$$u_0(t)=C_1\mathrm{e}^{-\lambda_n t}+C_2e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)+C_3e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right) \tag{24}$$

进而式(23)的通解为

$$u(t)=u_0(t)+u_1^*(t)+u_2^*(t),\ t\in[0,1] \tag{25}$$

其中 $u*_1(t)=-\frac{1}{3}\gamma\lambda_n t\mathrm{e}^{-\lambda_n t}$ 是方程 $u'''(t)+\lambda_n^3u(t)=-\gamma\lambda_n^3e^{-\lambda_n t}$ 的特解，$u_2^*(t)=\frac{2}{3}\gamma\lambda_n te^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t)$ 是方程 $u'''(t)+\lambda_n^3u(t)=\gamma\lambda_n^3e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t)-\sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t)\right)$ 的特解. 不难得出

$$(u_1^*)'(t)=-\frac{1}{3}\gamma\lambda_n e^{-\lambda_n t}+\frac{1}{3}\gamma\lambda_n^2te^{-\lambda_n t} \tag{26}$$

$$(u_2^*)'(t)=\frac{2}{3}\gamma\lambda_n\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)+\frac{1}{3}\gamma\lambda_n^2te^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\gamma\lambda_n^2t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_n t}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n t\right) \tag{27}$$

代入边界条件 $u(0)=u'(0)=0$，有 $C_1=-C_2$，$C_3=\sqrt{3}C_1$. 再由边界条件 $u'(1)=0$，有

$$(u_0)'(1)+(u*_1)'(1)+(u*_2)'(1)=0 \tag{28}$$

又经计算 $(u_0)'(1)=0$，从而式(28)可化为

$$-\mathrm{e}^{-\lambda_n}+\lambda_n\mathrm{e}^{-\lambda_n}+2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_n}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\right)+\lambda_n\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_n}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\right)+\sqrt{3}\lambda_ne^{\frac{1}{2}\lambda_n}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\right)=0 \tag{29}$$

化简即得 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda_n}=\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n$，这与 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\lambda_n}=\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n+\frac{2}{3}\pi\right)$ 矛盾. 所以 $(I-\lambda_n^3K)^2u=\theta$，即 $\ker(I-\lambda_n^3K)^2\ker(I-\lambda_n^3K)$，故 $\ker(I-\lambda_n^3K)=\ker(I-\lambda_n^3K)^2$，从而每个特征值 $\frac{1}{\lambda_n^3}$ 的代数重数为 1.

下面是有关 Leray-Schauder 度和锥中的不动点指数理论的有关结论. 在下述引理中，设 E 是一个实 Banach 空间，P 是 E 中的锥，Ω 是 E 中的有界开集，$B(x_0, r)$ 表示 E 中以 x_0 为中心，以 r 为半径的球.

引理 5 设 (H_1)—(H_4) 成立，则

1) 存在 $r_0\in(0, M)$，使得对所有的 $r\in(0, r_0]$，有 $i(A, P\cap B(\theta, r), P)=0$，$i(A, (-P)\cap B(\theta, r), -P)=0$.

2) 存在 $R_0>M$，使得对所有的 $R\geqslant R_0$，有 $i(A, P\cap B(\theta, R), P)=0$，$i(A, (-P)\cap B(\theta, R), -P)=0$.

证明 由条件(H_1)显然有 $A(P)\subset P$，$A(-P)\subset -P$. 由引理 2、引理 4 和(H_3)知 $\frac{\alpha_0}{\lambda_1^3}>1$ 是线性算子 $A'(\theta)=\alpha_0 K$ 的特征值，并且相应的特征函数为 $u(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-e^{\frac{1}{2}\lambda_1 t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 t\right)+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}\lambda_1 t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 t\right)$，显然 $u(t)\geqslant 0$，由文献[13]可知，存在 $\tau_0>0$，使得对任意 $0<r<\tau_0$，$i(A,P\cap B(\theta,r),P)=0$. 同理可得，存在 $\tau_1>0$，使得 $0<r<\tau_1$，$i(A,-P\cap B(\theta,r),-P)=0$. 令 $r_0=\min\{\tau_0,\tau_1\}$，则引理 5 的第 1 个结论成立. 引理 5 的第 2 个结论类似可证.

引理 6[14]　设 A 是 E 上的全连续算子，$u_0\in E$ 是 A 的一个不动点，假定 A 在 u_0 的一个邻域内有定义，在 u_0 处 Fréchet 可微，若 1 不是线性算子 $A'(u_0)$ 的特征值，则 u_0 是全连续场 $I-A$ 的孤立的单重零点，且对充分小的 $r>0$，有

$$\deg(I-A,B(u_0,r),\theta)=(-1)^k$$

其中，k 是 $A'(u_0)$ 在$(1,+\infty)$所有实特征值的代数重数之和.

引理 7[14]　设 A 是 E 上的全连续算子，若 1 不是线性算子 $A'(\infty)$ 的特征值，则对充分大的 $\rho>0$，有

$$\deg(I-A,B(\theta,\rho),\theta)=(-1)^k$$

其中，k 是 $A'(\infty)$ 在$(1,+\infty)$所有实特征值的代数重数之和.

引理 8[15]　设 P 是实 Banach 空间 E 中的体锥，Ω 是 P 中的相对有界开集，$A:P\to P$ 是一个全连续的算子. 若 A 在 Ω 中的任意不动点都是 P 的内点，则存在 E 的有界开集 $O\subset\Omega$，使得 O 包含 A 在 E 中的所有不动点，且 $\deg(I-A,O,\theta)=i(A,\Omega,P)$.

3　主要结论

定理 1　设条件(H_1)—(H_4)成立，则边值问题(1)至少存在 2 个正解，2 个负解，2 个变号解.

证　由引理 1，$u\in C^3[0,1]$ 是边值问题(1)的解，当且仅当 $u\in E$ 是算子 A 的不动点. 由(H_4)知对任意 $\forall u\in E$，$t\in[0,1]$，且 $\|u\|=M$ 时，有

$$\begin{aligned}|Au(t)|=&\left|\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\int_0^t\left(ts-\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}t^2s\right)\max_{s\in[0,1]}|f(t,u)|\mathrm{d}s+\int_t^1\frac{1}{2}t^2(1-s)\max_{s\in[0,1]}|f(t,u)|\mathrm{d}s\leqslant\\&\left(-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\right)\frac{24}{17}M\leqslant\\&\frac{2}{17}M\end{aligned}\tag{30}$$

即 $\|Au\|_0<\frac{2}{17}M$. 同理可以证明，对任意 $\forall u\in E$，$t\in[0,1]$，且 $\|u\|=M$ 时，有 $\|(Au)'\|_0<\frac{3}{17}M$，$\|(Au)''\|_0<\frac{12}{17}M$，所以 $\|Au\|=\|Au\|_0+\|(Au)'\|_0+\|(Au)''\|_0<M$.

由文献[16]可知

$$i(A,P\cap B(\theta,M),P)=1\tag{31}$$

$$i(A,-P\cap B(\theta,M),-P)=1\tag{32}$$

$$\deg(I-A,P\cap B(\theta,M),\theta)=1\tag{33}$$

由于算子 $A'(\theta)=\alpha_0 K$ 大于 1 的所有特征值为 $\frac{\alpha_0}{\lambda_1^3}$，$\frac{\alpha_0}{\lambda_2^3}$，…，$\frac{\alpha_0}{\lambda_n^3}$，…，因此由引理 4 和引理 6，存在 $r_1\in(0,r_0]$，使得

$$\deg(I-A,B(\theta,r_1),\theta)=(-1)^{2n_0}=1\tag{34}$$

同理，由引理 7 和(H_3)知，存在 $R_1>R_0$，使得

$$\deg(I-A,B(\theta,R_1),\theta)=(-1)^{2n_1}=1\tag{35}$$

由引理 5 知

$$i(A, P \cap B(\theta, r_1), P) = 0 \tag{36}$$

$$i(A, -P \cap B(\theta, r_1), -P) = 0 \tag{37}$$

$$i(A, P \cap B(\theta, R_1), P) = 0 \tag{38}$$

$$i(A, -P \cap B(\theta, R_1), -P) = 0 \tag{39}$$

所以根据式(31)、式(36)、式(38)有

$$i(A, P \cap (B(\theta, R_1)\backslash \bar{B}(\theta, M)), P) = 0 - 1 = -1 \tag{40}$$

$$i(A, P \cap (B(\theta, M)\backslash \bar{B}(\theta, r_1)), P) = 1 - 0 = 1 \tag{41}$$

这意味着算子 A 至少有 2 个不动点 $u_1 \in P \cap (B(\theta, R_1)\backslash \bar{B}(\theta, M))$ 和 $u_2 \in P \cap (B(\theta, M)\backslash \bar{B}(\theta, r_1))$. 显然，$u_1$ 和 u_2 是边值问题(1) 的正解. 类似的，根据式(32)、式(37) 和式(39) 有

$$i(A, -P \cap (B(\theta, R_1)\backslash \bar{B}(\theta, M)), -P) = 0 - 1 = -1 \tag{42}$$

$$i(A, -P \cap (B(\theta, M)\backslash \bar{B}(\theta, r_1)), -P) = 1 - 0 = 1 \tag{43}$$

这意味着算子 A 至少有 2 个不动点 $u_3 \in -P \cap (B(\theta, M)\backslash \bar{B}(\theta, r_1))$ 和 $u_4 \in -P \cap (B(\theta, R_1)\backslash \bar{B}(\theta, M))$. 显然，$u_3$ 和 u_4 是边值问题(1) 的负解.

由引理 3 和引理 8，结合式(40) — 式(43)，存在 E 的开集 O_1, O_2, O_3, O_4，使得

$$O_1 \subset P \cap (B(\theta, R_1)\backslash \bar{B}(\theta, M))$$

$$O_2 \subset P \cap (B(\theta, M)\backslash \bar{B}(\theta, r_1))$$

$$O_2 \subset (-P) \cap (B(\theta, M)\backslash \bar{B}(\theta, r_1))$$

$$O_3 \subset (-P) \cap (B(\theta, R_1)\backslash \bar{B}(\theta, M))$$

以及

$$\deg(I - A, O_1, \theta) = -1 \tag{44}$$

$$\deg(I - A, O_2, \theta) = 1 \tag{45}$$

$$\deg(I - A, O_3, \theta) = 1 \tag{46}$$

$$\deg(I - A, O_4, \theta) = -1 \tag{47}$$

由式(33)、式(34)、式(45)、式(46)

$$\deg(I - A, B(\theta, M)\backslash(\bar{O}_2 \cup \bar{O}_3 \cup \bar{B}(\theta, r_1)), \theta) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \tag{48}$$

由此可知算子 A 至少有 1 个不动点 $u_5 \in B(\theta, M)\backslash(\bar{O}_2 \cup \bar{O}_3 \cup \bar{B}(\theta, r_1))$. 同理，由式(33)、式(35)、式(44) 和式(47)，有 $\deg(I - A, B(\theta, R_1)\backslash(\bar{O}_1 \cup \bar{O}_4 \cup \bar{B}(\theta, M)), \theta) = 2$，则算子 A 至少存在 1 个不动点 $u_6 \in B(\theta, R_1)\backslash(\bar{O}_1 \cup \bar{O}_4 \cup \bar{B}(\theta, M))$，显然 u_1，u_2 是边值问题(1) 的 2 个变号解.

注 4 对式(44) — 式(47) 的推导过程进行了简化，一定程度上改进了文献[6] 的证明.

推论 如果定理 1 的条件满足，且对每个 $t \in [0, 1]$，$f(t, \cdot)$ 是奇函数，则边值问题(1) 至少存在 2 个正解，2 个负解，4 个变号解.

证明 由定理 1 知，$u_i \in E$，$i = 1, 2, \cdots 6$，满足 $u_1, u_2 \in P^{\circ}$，$u_3, u_4 \in -P^{\circ}$，$u_1, u_2 \notin P \cup (-P)$ 且 $r_1 < \| u_5 \| < M < \| u_6 \| < R_1$，又因为 $f(t, -u) = -f(t, u)$，$(t, u) \in [0, 1] \times R$，知 $-u_5$，$-u_6$ 也是边值问题(1) 的变号解. 故推论成立.

参考文献：

[1] YAO Q L. Successive Iteration of Positive Solution for a Discontinuous Third-Order Boundary Value Problem [J]. Comput Math Appl, 2007, 53(5): 741-749.

[2] YAO Q, FENG Y. The Existence of Solutions for a Third Order Two-Point Boundary Value Problem [J]. Appl Math Lett, 2002, 15(2): 227-232.

[3] LI S H. Positive Solutions of Nonlinear Singular Third-Order Two-Point Boundary Value Problem [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323(10): 413-425.

[4] 张立新，孙 博，张 洪. 三阶三点边值问题的两个正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(10): 30-33.

[5] 傅 强，张二米. 一类非线性边值问题的三重正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2007, 32(3): 23-27.

[6] 王庆云，刘进生，邹杰涛．三阶两点边值问题变号解的多重性 [J]．数学的实践与认识，2008，38(23)：207-214.

[7] ZHANG X，SUN J．On Multiple Sign-Changing Solutions for Some Second-Order Integral Boundary Value Problems [J]．Qualitative Theory of Differential Equations，2010，44(1)：1-15.

[8] 邹玉梅．奇异四点边值问题的正解 [J]．数学的实践与认识，2009，39(11)：233-237.

[9] 王　峰，张辉明．一类非线性无穷多点边值问题正解的存在性 [J]．数学的实践与认识，2014，44(20)：258-263.

[10] 纪宏伟．一个典型弹性梁方程涉及第一特征值的正解 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(1)：14-19.

[11] LI H Y，SUN F．Existence of Solutions for Integral Boundary Value Problems of Second Order Ordinary Differential Equations [J]．Bound Value Problem，2012，147(1)：1-7.

[12] 索建青，王万义，张新艳．一类四阶 Sturm-Liouville 问题的特征值 [J]．内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)，2008，37(3)：296-302.

[13] GUO D，LAKSHMIKANTHAM V．Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]．New York：Academic Press，1988.

[14] KRASNOSELSKII M A，ZABREIKO P P．Ceometrical Methods of Nonlinear Analysis [M]．Berlin：Springer-Verlag，1984.

[15] PANG C，DONG W，WEI Z．Multiple Solutions for Fourth-Order Boundary Value Problems [J]．J Math Anal Appl，2006，314(2)：464-476.

[16] 郭大钧．非线性泛函分析 [M]．济南：山东科学技术出版社，2002.

On Existence of Multiple Solutions for a Class of Nonlinear Third Order Differential Equations with Boundary Value Problems

JI Hong-wei

Department of Mathematics and Science Education，Nantong Teachers College，Nantong Jiangshu 226006，China

Abstract：The existence of solutions to boundary value problems of nonlinear third-order differential equations has been studied according to the fixed point index theory and topological degree theory，

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in[0,\ 1] \\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

By calculating the eigenvalues and algebraic multiplicities of the corresponding linear problems，the existence results of two positive solutions，two negative solutions and two sign-changing solutions have been obtained. If the nonlinearity term is an odd function，there are at least two positive solutions，two negative solutions and four sign-changing solutions.

Key words：third-order differential equation；boundary value problem；sign-changing solution；fixed-point index；Leray-Schauder degree

责任编辑　夏　娟