第 45 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 6 月
Vol. 45 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.001

S-拟正规嵌入子群与有限群的 p-幂零性①

袁 媛[1], 唐 康[2], 刘建军[2]

1. 重庆工商大学融智学院 金融学院,重庆 401320;2. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要:设 H 是有限群 G 的子群.如果 H 的 Sylow 子群也分别是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow 子群,则称 H 在 G 中 S-拟正规嵌入.利用子群的 S-拟正规嵌入性给出了有限群为 p-幂零群的一个充分条件,推广了已有的结论.

关 键 词:S-拟正规嵌入子群;S-拟正规子群;幂零类;p-幂零群

中图分类号:O152.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2020)06-0001-04

本文所涉及的群均为有限群.Sylow 子群的正规化子在有限群的研究中扮演着十分重要的角色.假定 P 是有限群 G 的 Sylow 子群,$N_G(P)$ 如何影响有限群的结构?许多学者对其进行了研究,并获得了丰富的结果.比如著名的 Burnside 定理[1]:

定理 1[1] 假定 p 是素数,且 P 是有限群 G 的 Sylow p- 子群.如果 P 包含在 $N_G(P)$ 的中心中,则 G 是 p- 幂零群.

文献[2] 对文献[1] 的结果进行了推广,得到:

定理 2[2] 假定 p 是素数,且 P 是有限群 G 的 Sylow p- 子群.如果 $N_G(P)$ 是 p- 幂零的,且 P 的幂零类不大于 p,即 $P \leqslant Z_{p-1}(P)$,则 G 是 p- 幂零的.

在这之后,许多学者对文献[2] 的结果进行了推广(参见文献[3-9]).

文献[10] 首次引入了 S- 拟正规的概念:设 H 是群 G 的子群.如果对于 G 的任意 Sylow 子群 P,都有 $HP = PH$,则称 H 为 G 的 S- 拟正规子群.如果对 H 的阶中的每一个素因子 p,H 的 Sylow p- 子群也是 G 的某个 S- 拟正规子群的 Sylow p- 子群,则称 H 在 G 中为 S- 拟正规嵌入的.这个概念由文献[11] 引入,它对群的结构有着重要的影响,许多学者对此进行了研究.本文主要通过假定群 G 的 Sylow 子群 P 在 G 的正规化子 $N_G(P)$ 是 p- 幂零的及 P 中子群的 S- 拟正规嵌入性来研究有限群的 p- 幂零性,推广了前人的一些结果.本文所涉及的所有术语和符号都是标准的,见文献[1].

定义 1[11] 如果对 H 的阶中的每一个素因子 p,H 的 Sylow p- 子群也是 G 的某个 S- 拟正规子群的 Sylow p- 子群,则称 H 在群 G 中为 S- 拟正规嵌入的.

引理 1[11] 设 H 在群 G 中为 S- 拟正规嵌入的,则下列结论成立:

(i) 如果 $H \leqslant M \leqslant G$,那么 H 在 M 中是 S- 拟正规嵌入的;

---

① 收稿日期:2019-07-10

基金项目:国家自然科学基金项目(11301426);重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2018jcyjAX0147);中央高校基本科研业务费项目(XDJK2020B052);西南大学教改项目(2019JY096).

作者简介:袁 媛(1983-),女,助教,主要从事群论的研究.

通信作者:刘建军,副教授.

(ii) 如果 $N \trianglelefteq G$，那么 HN/N 在 G/N 中是 S- 拟正规嵌入的.

引理 2[10,12] 如果 H 是群 G 的 S- 拟正规子群，则下列结论成立：

(i) $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$；

(ii) H/H_G 是幂零的；

(iii) 如果 H 是 G 的 p- 子群，则 $N_G(H) \geqslant O^p(G)$.

定理 3 假定 p 是素数，且 P 是有限群 G 的 Sylow p- 子群. 如果 $N_G(P)$ 是 p- 幂零的，P 中存在一个包含在 $\Phi(P)$ 中的正规子群 P_1，使得 P_1 在 G 中是 S- 拟正规嵌入的，且 P/P_1 的幂零类不大于 p，即 $P/P_1 \leqslant Z_{p-1}(P/P_1)$，则 G 是 p- 幂零的.

证 假设定理结论不成立，且设 G 为极小阶反例. 我们按下列步骤证明：

步骤 1 P_1 是非平凡的，且 G 不是单群.

如果 G 是单群，则 G 中存在一个 S- 拟正规子群 K，使得 P_1 是 K 的 Sylow p- 子群. 由引理 2 知，$K \trianglelefteq\trianglelefteq G$，这导致 $P_1 = 1$. 根据定理 2 的结果知，G 是 p- 幂零的，矛盾.

步骤 2 $O_{p'}(G) = 1$.

如果 $O_{p'}(G) \neq 1$. 根据引理 1，$G/O_{p'}(G)$ 满足定理 3 的条件. 因此，由 G 的极小性，$G/O_{p'}(G)$ 是 p- 幂零的，从而 G 是 p- 幂零的，矛盾.

步骤 3 若 $P \leqslant H < G$，则 H 是 p- 幂零的.

显然 $N_H(P) = N_G(P) \cap H \leqslant N_G(P)$. 由引理 1 知，$P_1$ 在 H 中是 S- 拟正规嵌入的. 因此 H 满足定理 3 的假设，从而由 G 的极小性知 H 是 p- 幂零的.

步骤 4 设 N 是 G 的极小正规子群，则 G/N 是 p- 幂零群. 进一步，N 是 G 的唯一极小正规子群且 $\Phi(G) = 1$.

显然 $N_{\bar{G}}(\bar{P}) = \overline{N_G(P)}$ 是 p- 幂零的. 由引理 1 知，G/N 满足定理 3 的假设，由 G 的极小性得到 G/N 是 p- 幂零的. 若 G 有两个极小正规子群 N_1 和 N_2，则 G/N_1 和 G/N_2 都是 p- 幂零的，从而 $G/(N_1 \cap N_2) \cong G$ 也是 p- 幂零的，矛盾. 因此 G 有唯一的极小正规子群 N. 若 $N \leqslant \Phi(G)$，则 $G/\Phi(G)$ 是 p- 幂零的. 这意味着 G 是 p- 幂零的，矛盾于 G 的极小性. 因此 $\Phi(G) = 1$.

步骤 5 $P_1 \cap N < N$.

如果 $P_1 \cap N = N$，则 $N \leqslant P_1 \leqslant \Phi(P)$，这意味着 $N \leqslant \Phi(G) = 1$，矛盾.

步骤 6 $O_p(G) = 1$ 且 N 不是 p- 幂零的.

如果 $O_p(G) \neq 1$，则由步骤 4 知 $N \leqslant O_p(G)$. 我们分为以下几步来证明步骤 6：

步骤 6.1 $N = O_p(G)$.

由步骤 4，存在 G 的极大子群 M，使得 $G = MN$. 由于 N 是初等交换的，所以 $N \cap M \trianglelefteq G$. 再由 N 的极小性得 $M \cap N = 1$. 易得

$$O_p(G) = O_p(G) \cap MN = N(O_p(G) \cap M)$$

而 $\Phi(O_p(G)) \leqslant \Phi(G) = 1$，这表明 $O_p(G)$ 交换. 因此 $O_p(G) \cap M \trianglelefteq G$. N 的极小性及唯一性意味着 $O_p(G) \cap M = 1$. 通过阶的比较可知 $N = O_p(G)$.

步骤 6.2 $P_1 \cap N = 1$.

因为 P_1 在 G 中是 S- 拟正规嵌入的，所以 G 中存在 S- 拟正规子群 K，使得 P_1 是 K 的 Sylow p- 子群. 如果 $K_G \neq 1$，则由步骤 6.1 及步骤 4 知 $N \leqslant K_G \leqslant K$. 这说明 $N \leqslant P_1$，与步骤 5 矛盾. 因此，$K_G = 1$. 由引理 2 可得 K 是幂零的. 再由文献[12] 的定理 1.2.7，P_1 是 G 的 S- 拟正规子群. 又根据文献[12] 的定理 1.2.19，$P_1 \cap N$ 是 G 的 S- 拟正规子群. 应用引理 2，得到

$$O^p(G) \leqslant N_G(P_1 \cap N)$$

这表明 $P_1 \cap N \trianglelefteq G$. 步骤 5 说明了 $P_1 \cap N = 1$.

步骤 6.3　$N \leqslant Z_{p-1}(P)$.

令 $\overline{P} = P/P_1$ 且 $\overline{N} = NP_1/P_1$，我们有

$$[\overline{N}, \underbrace{\overline{P}, \overline{P}, \cdots \overline{P}}_{p-1}] = 1$$

因为 N 是 G 的正规子群，所以

$$[N, \underbrace{P, P, \cdots P}_{p-1}] = 1$$

这表明 $N \leqslant Z_{p-1}(P)$.

步骤 6.4　完成步骤 6 的证明.

令 L 是 G 的 Hall p'- 子群，则由 G/N 的 p- 幂零性得 $LN \trianglelefteq G$. 因为 G/LN 是 p- 群，所以 $O^p(G) \leqslant LN$. 由此可得

$$O^p(G) \cap P \leqslant P \cap LN = N \leqslant Z_{p-1}(P)$$

根据文献[8] 的引理 2.2，G 是 p- 幂零的，矛盾.

步骤 7　$P_1 \cap N = 1$.

因为 P_1 在 G 中是 S- 拟正规嵌入的，所以 G 中存在 S- 拟正规子群 K，使得 P_1 是 K 的 Sylow p- 子群. 如果 $K_G \neq 1$，则由步骤 4 知 $N \leqslant K_G \leqslant K$. 又由步骤 3 有 $PK_G = G$. 这意味着 $P_1 \cap N \leqslant \Phi(P)$，再由文献[13] 的结果得 N 是 p- 幂零的，矛盾. 因此，$K_G = 1$. 所以 $P_1 \cap N \trianglelefteq G$. 步骤 5 与 N 的极小性说明了 $P_1 \cap N = 1$.

步骤 8　最后的矛盾.

令 N_p 是 N 的 Sylow p- 子群，则 $N_G(N_p) < G$ 且 $P \leqslant N_G(N_p)$. 由步骤 3，$N_G(N_p)$ 是 p- 幂零的. 又由步骤 7，可得

$$N_p \cong N_p/N_p \cap P_1 \cong N_pP_1/P_1 \leqslant P/P_1$$

所以 N_p 的幂零类不大于 p. 根据定理 2 得 N 是 p- 幂零的，这与步骤 6 矛盾.

推论 1　假定 p 是素数，且 P 是有限群 G 的 Sylow p- 子群. 如果 $N_G(P)$ 是 p- 幂零的，且 P' 在 G 中是 S- 拟正规嵌入的，则 G 是 p- 幂零的.

证　由假定，P' 在 G 中是 S- 拟正规嵌入的. 因为 $P' \leqslant \Phi(P)$，且 P/P' 是交换的，所以根据定理 3 可得 G 是 p- 幂零的.

推论 2[14]　假定 p 是 G 的阶的最小素因子，且 P 是 G 的 Sylow p- 子群. 如果 P 的每个极大子群都在 $N_G(P)$ 中是 S- 拟正规嵌入的，且 P' 在 G 中是 S- 拟正规嵌入的，则 G 是 p- 幂零的.

证　由引理 1 及文献[15] 可得 $N_G(P)$ 是 p- 幂零的. 又由推论 1 可证推论 2.

参考文献：

[1]　ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York：Springer，1982.

[2]　HALL P. On a Theorem of Frobenius [J]. Proc London Math Soc，1936，40：468-501.

[3]　常　健，刘建军. 有限群的 SS-可补子群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(10)：1-4.

[4]　蹇　祥，吕　恒. 具有极大正规化子的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：56-60.

[5]　曹建基，高建玲. 非正规循环子群的正规化子皆极大的两类有限可解群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：81-85.

[6]　BALLESTER-BOLINCHES A，GUO X Y，LI Y M，et al. On Finite p-Nilpotent Groups [J]. Monatsh Math，2016，181(1)：63-70.

[7] LI Y M, SU N, WANG Y M. A Generalization of Burnside's p-Nilpotency Criterion [J]. J Group Theory, 2017, 20(1): 185-192.

[8] 苏 宁, 李样明, 王燕鸣. p-幂零群的一个判定准则 [J]. 数学进展, 2018, 47(1): 65-70.

[9] XU X Y, LI Y M. A Criterion on the Finite p-Nilpotent Groups [J]. J Math Res Appl, 2019, 39(3): 254-258.

[10] KEGEL O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler Endlicher Gruppen [J]. Math Z, 1962, 78(1): 205-221.

[11] BALLESTER-BOLICHES A, PEDRAZA-AQUILERA M C. Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups [J]. J Pure Appl Algebra, 1998, 127: 113-118.

[12] BALLESTER-BOLINCHES A, ESTEBAN-ROMERO R, ASAAD M. Products of Finite Grous [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

[13] TATE J. Nilpotent Quotient Groups [J]. Topology, 1964, 3(3): 109-111.

[14] 高金新, 李保军. S-拟正规嵌入子群 [J]. 大学数学, 2012, 28(1): 45-49.

[15] ASAAD M, HELIEL A A. On S-Quasinormality Embedded Subgroups of Finite Groups [J]. J Pure Appl Algebra, 2001, 165: 129-135.

The S-Quasinormally Embedded Subgroups and p-Nilpotency of Finite Groups

YUAN Yuan[1], TANG Kang[2], LIU Jian-jun[2]

1. School of Finance, Rongzhi College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 401320, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: A subgroup H of a group G is said to be S-quasinormally embedded in G, if every Sylow subgroup of H is also a Sylow subgroup of some S-quasinorml subgroup of G. In this paper, a sufficient condition for p-nilpotent groups have been obtained based on the assumption that some subgroups are S-quasinormal embedded. Our theorem is a generalization of the known results.

Key words: S-quasinormally embedded subgroup; S-quasinormal subgroup; nilpotency class; p-nilpotent group

责任编辑 廖 坤