第 45 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 6 月
Vol. 45　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.002

# 用交换子群的个数刻画 $A_5$ 和 $S_5$ ①

钱　焱，　陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要：**利用完全初等的方法刻画交错群 $A_5$ 和对称群 $S_5$. 得到如下结论：若群 $G$ 的阶为 60，则 $G \cong A_5$ 的充要条件是 $G$ 的交换子群的阶为 2,3,4,5，且个数分别是 15,10,5,6；若群 $G$ 的阶为 120，则 $G \cong S_5$ 的充要条件是 $G$ 的交换子群的阶为 2,3,4,5,6，且个数分别是 25,10,35,6,10.

**关　键　词：**群的阶；交换子群；群的结构

**中图分类号：O152.1**　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2020)06－0005－04

$A_5$ 是阶最小的非交换单群，关于它的刻画有很多. 文献[1]证明了：如果 $G$ 为非可解质元群，那么 $G \cong A_5$. 文献[2]证明了：$G \cong A_5$ 的充要条件是 $\pi_e(G) = \{1, 2, 3, 5\}$，其中 $\pi_e(G)$ 表示群中元素阶的集合. 文献[3]用初等方法证明了：$G \cong A_5$ 的充要条件是 $\pi_e(G) = \{1, p, q, r\}$，其中 $p, q, r$ 为互不相同的素数. 文献[4]证明了：$G \cong A_5$ 的充要条件是 $m(G) = 5$，$\psi(G) = 211$，其中 $m(G)$ 表示群 $G$ 中元的最高阶，$\psi(G)$ 表示群 $G$ 中所有元素阶之和. 文献[5]证明了：当 $G$ 的阶和同阶类类数与 $A_5$ 相同时，$G \cong A_5$. 文献[6]证明了：60 阶群 $G \cong A_5$ 的充要条件是 $G$ 中只有 46 个不可补子群. 文献[7]证明了：$A_5$ 可被其阶和 $K_1(A_5)$ 唯一刻画，其中 $K_1(A_5)$ 表示 $A_5$ 的最高阶元素的阶. 文献[8]证明了：如果一个群 $G$ 的阶为 60，并且满足在 $G$ 的所有不可约特征标中恰好存在两个不可约特征标，使得这两个特征标在不同的共轭类上均为不同的值，那么 $G \cong A_5$.

关于对称群 $S_5$ 的刻画也有很多. 文献[9]证明了：$G \cong S_5$ 的充要条件是 $m(G) = 6$，$\psi(G) = 471$，其中 $m(G)$ 表示群 $G$ 中元的最高阶，$\psi(G)$ 表示群 $G$ 中所有元素阶之和. 文献[10]证明了：$S_5$ 可以由其阶和最高阶元素的阶 $K_1(S_5)$ 唯一刻画. 文献[11]证明了：$S_5$ 可在 5 阶自同构下的状态空间图唯一确定.

本文继续对 $A_5$ 和 $S_5$ 进行刻画，证明：$A_5$ 和 $S_5$ 可以由其阶和不同阶的交换子群个数唯一决定. 本文的证明只用到 Sylow 定理和置换表示，是完全初等的证明.

本文所涉及的群都是有限群，所用符号都是标准的.

**引理 1**[12]　设 $U$ 是群 $G$ 的指数为 $n$ 的子群，则 $G/U_G$ 同构于 $S_n$ 的一个子群，其中 $U_G = \bigcap_{g \in G} U^g$.

**引理 2**[12]　设 $p^e$ 是整除 $G$ 的最大 $p$-幂，则：

(a) $G$ 的 Sylow $p$- 子群恰是阶为 $p^e$ 的子群；

(b) 群 $G$ 的 Sylow $p$- 子群在 $G$ 中共轭，特别地，$|\mathrm{Syl}_p(G)| = |G : N_G(P)|$，其中 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，$\mathrm{Syl}_p(G)$ 是 $G$ 的 Sylow $p$- 子群的集合，$p$ 为素数；

---

①　收稿日期：2019－12－29
基金项目：国家自然科学基金项目(11671324).
作者简介：钱　焱(1997－)，女，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：陈贵云，教授.

(c) $|\mathrm{Syl}_p(G)|\equiv 1(\bmod\ p)$.

**引理3** 设$H$是30阶群，则$H$中一定存在特征列：$H_5\ \mathrm{char}\ T\ \mathrm{char}\ H$，其中$H_5=|5|$，$T=|15|$.

**证** 如果$H$的Sylow 5-子群不正规，则由$|H|=30=2\times3\times5$及Sylow定理知，$H$的Sylow 5-子群有6个，进而其5阶元有24个，这导致其Sylow 3-子群必定只有1个，即Sylow 3-子群$H_3$正规.此时让$H$的Sylow 5-子群$H_5$共轭作用于Sylow 3-子群$H_3$上，由$N/C$定理知，$H_5$中心化$H_3$，从而$H_3H_5\cong H_3\times H_5$，故$H$至少有8个15阶元，但$24+3+8>30$，矛盾于$|H|=30$.从而$H$的Sylow 5-子群正规，即$H_5\ \mathrm{char}\ H$.因为$H/H_5$是6阶群，所以$H/H_5$有特征的3阶子群，从而$H$有特征的15阶子群$T$，且使得$H_5\ \mathrm{char}\ T$.故由特征子群的传递性知引理3成立.

**引理4** $A_5$的非平凡交换子群的阶分别为2,3,4,5，且2阶子群有15个，3阶子群有10个，4阶子群有5个，5阶子群有6个.

**证** 因为$A_5$的2阶元都形如$(ab)(cd)$，故$A_5$的2阶元个数为$5!/8=15$，进而$A_5$的Sylow 2-子群的个数为5，即$A_5$的4阶子群的个数为5.又因任何两个Sylow 2-子群的交是平凡的，从而可得到$A_5$的2阶子群的个数为15.

因为$A_5$的3阶元的个数为$(5\times4\times3)/3=20$，所以$A_5$的3阶子群的个数为$20/2=10$.

因为$A_5$的5阶元的个数为$5!/5=24$，所以$A_5$的5阶子群的个数为$24/4=6$.

**引理5**[13] $S_5$的非平凡交换子群的阶分别为2,3,4,5,6，且2阶子群的个数为25，3阶子群的个数为10，4阶子群的个数为35，5阶子群的个数为6，6阶子群的个数为10.

**定理1** 设$G$是有限群，$|G|=60$，则$G\cong A_5$的充要条件是$G$的3,4,5阶交换子群个数分别是10，5,6.

**证** 必要性由引理4即可得到.下证充分性.

令$G$的4阶子群之集为

$$S=\{N_1,N_2,N_3,N_4,N_5\}$$

因为$G$的4阶子群是$G$的Sylow子群，且个数为5，所以由引理2可得$|N_G(N_1)|=12$.考虑$G$在$N_G(N_1)$的左陪集上的置换表示$\sigma$，且此表示的核为$\mathrm{Ker}\,\sigma$，则由引理1可得$G/\mathrm{Ker}\,\sigma$同构于$S_5$的子群，且

$$\mathrm{Ker}\,\sigma=\bigcap_{g\in G}N_G(N_1)^g$$

从而$|\mathrm{Ker}\,\sigma|\,\big|\,12$.下面对$\mathrm{Ker}\,\sigma$的阶分情况讨论：

若$3\,\big|\,|\mathrm{Ker}\,\sigma|$，则由$\mathrm{Ker}\,\sigma\trianglelefteq G$得$G$的所有3阶子群全部含于$\mathrm{Ker}\,\sigma$，但$|\mathrm{Ker}\,\sigma|\,\big|\,12$，因此$\mathrm{Ker}\,\sigma$中不可能有10个3阶子群，矛盾.从而有$(3,|\mathrm{Ker}\,\sigma|)=1$，即$|\mathrm{Ker}\,\sigma|\,\big|\,4$.

若$|\mathrm{Ker}\,\sigma|=4$，则由$\mathrm{Ker}\,\sigma\trianglelefteq G$且$G$的4阶子群为Sylow子群知，$G$的4阶子群有且只有1个，矛盾.

若$|\mathrm{Ker}\,\sigma|=2$.因为$|\mathrm{Ker}\,\sigma|=2$，所以$|G/\mathrm{Ker}\,\sigma|=30$，此时$\mathrm{Ker}\,\sigma\leqslant Z(G)$，其中$Z(G)$为$G$的中心，且$G/\mathrm{Ker}\,\sigma$有正规的5阶子群$K/\mathrm{Ker}\,\sigma$，所以$K$是10阶交换群，从而$K=K_5\times K_2$，其中$K_2\in\mathrm{Syl}_2(K)$，$K_5\in\mathrm{Syl}_5(K)$.因为$|K|=10$，所以$K$的Sylow 5-子群唯一，即有$K_5\ \mathrm{char}\ K$.又因为$K\trianglelefteq G$，所以$K_5\ \mathrm{char}\ K\trianglelefteq G$，即有$K_5\trianglelefteq G$，从而$G$的5阶子群唯一，矛盾.

若$|\mathrm{Ker}\,\sigma|=1$，则$G$同构于$S_5$的子群.如果$G$全部由偶置换组成，则显然有$G\cong A_5$.如果$G$含有奇置换，则$G$中奇偶置换各占一半，即$G$中的偶置换作成30阶子群，记为$H$.因为$|G:H|=2$，所以$H\trianglelefteq G$.又由引理3可得$H_5\ \mathrm{char}\ H$，所以$H_5\ \mathrm{char}\ H\trianglelefteq G$，从而有$H_5\trianglelefteq G$.因为$G$的5阶子群是Sylow子群，所以$H_5$为$G$唯一的5阶子群，矛盾.

综上所述，$G\cong A_5$.

由定理1的证明知，在条件中多增加一个2阶交换子群对结论不产生影响，从而可得到以下的推论：

**推论1** 设$G$是有限群，$|G|=60$，则$G\cong A_5$的充要条件是$G$的交换子群的阶为2,3,4,5，且个数分

别是 15，10，5，6.

下面证明 $S_5$ 可以由其阶和不同阶的交换子群个数唯一决定.

**定理 2**　设 $G$ 是有限群，$|G|=120$，则 $G\cong S_5$ 的充要条件是 $G$ 的交换子群的阶为 2，3，4，5，6，且个数分别是 25，10，35，6，10.

**证**　必要性由引理 5 即可得到. 下证充分性.

令 $G$ 的 5 阶子群之集为

$$S=\{M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6\}$$

因为 $G$ 的 5 阶子群是 $G$ 的 Sylow 子群且个数为 6，所以由引理 2 可得 $|N_G(M_1)|=20$. 考虑 $G$ 在 $N_G(M_1)$ 的左陪集上的置换表示 $\tau$，且此表示的核为 $\mathrm{Ker}\ \tau$，则由引理 1 可得 $G/\mathrm{Ker}\ \tau$ 同构于 $S_6$ 的子群，且

$$\mathrm{Ker}\ \tau=\bigcap\nolimits_{g\in G}N_G(M_1)^g$$

从而 $|\mathrm{Ker}\ \tau|\mid 20$. 下面对 $\mathrm{Ker}\ \tau$ 的阶分情况讨论：

若 $5\mid|\mathrm{Ker}\ \tau|$，则由 $\mathrm{Ker}\ \tau\trianglelefteq G$ 得 $G$ 的所有 5 阶子群全部含于 $\mathrm{Ker}\ \tau$ 中，但 $|\mathrm{Ker}\ \tau|\mid 20$，因此 $\mathrm{Ker}\ \tau$ 中不可能有 6 个 5 阶子群，矛盾. 从而 $(5,|\mathrm{Ker}\ \tau|)=1$，即 $|\mathrm{Ker}\ \tau|\mid 4$.

若 $|\mathrm{Ker}\ \tau|=2,4$. 当 $|\mathrm{Ker}\ \tau|=2$ 时，$\mathrm{Ker}\ \tau\cong C_2$（2 阶循环群）；当 $|\mathrm{Ker}\ \tau|=4$ 时，$\mathrm{Ker}\ \tau\cong C_4$（4 阶循环群），或 $\mathrm{Ker}\ \tau\cong C_2\times C_2$（4 阶交换群）. 但以上 3 种情形均有 $5\nmid|\mathrm{Aut}(\mathrm{Ker}\ \tau)|$. 因为 $\mathrm{Ker}\ \tau\trianglelefteq G$，所以 $N_G(\mathrm{Ker}\ \tau)=G$. 又由 $N/C$ 定理得 $G/C_G(\mathrm{Ker}\ \tau)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Ker}\ \tau)$ 的子群，则 $5\mid|C_G(\mathrm{Ker}\ \tau)|$，从而 $G$ 中的 5 阶元都平凡地作用在 $\mathrm{Ker}\ \tau$ 上，故 $G$ 中有 10 阶元，所以 $G$ 中有 10 阶交换子群，矛盾.

若 $|\mathrm{Ker}\ \tau|=1$，则 $G$ 同构于 $S_6$ 的子群. 不妨将 $G$ 看成 $S_6$ 的子群，即 $G\leqslant S_6$ 且 $|G|=120$. 如果 $G$ 的所有元素都是偶置换，即 $G\leqslant A_6$. 因为 $G\leqslant A_6$，所以可考虑 $A_6$ 在 $G$ 的左陪集上的置换表示 $\phi$，则由引理 1 可得 $A_6/\mathrm{Ker}\ \phi$ 是 $S_3$ 的子群，从而 $\mathrm{Ker}\ \phi$ 不可能是单位群，这导致 $A_6$ 中有正规子群 $\mathrm{Ker}\ \phi$，这与 $A_6$ 是单群矛盾. 如果 $G$ 中元素奇偶置换各一半. 设 $Q$ 是由 $G$ 中所有偶置换作成的群，从而 $|Q|=60$，$G/Q\cong C_2$. 下证 $Q\cong A_5$. 若 $Q$ 中有 10 阶元，则 $Q$ 中有 10 阶交换子群，矛盾. 所以 $Q$ 中无 10 阶元，同理 $Q$ 中无 15 阶元. 因为 $S_6$ 中所有 6 阶元都是奇置换，所以 $Q$ 中无 6 阶元. 从而 $Q$ 中元素的阶都是素数的方幂. 由 $|\mathrm{Syl}_5(G)|=6$，$|\mathrm{Syl}_3(G)|=10$，有 $|\mathrm{Syl}_5(Q)|=6$，$|\mathrm{Syl}_3(Q)|=10$，所以 $Q$ 中 1 阶元有 1 个，非单位 5- 元有 24 个，非单位 3- 元有 20 个，从而 $Q$ 中非单位 2- 元有 15 个. 又因为

$$Q=60=2^2\times 3\times 5$$

所以 $|\mathrm{Syl}_2(Q)|=5$，显然 $Q$ 的 5 阶交换子群为 6 个，3 阶交换子群为 10 个，4 阶交换子群为 5 个，从而由定理 1 可得 $Q\cong A_5$. 因为 $Q\trianglelefteq G$，所以 $G=N_G(Q)$. 因为 $Q\cong A_5$，所以 $\mathrm{Aut}(Q)\cong S_5$，从而由 $N/C$ 定理得 $G/C_G(Q)$ 同构于 $S_5$ 的子群. 因为 $C_G(Q)\trianglelefteq G$，$Q\trianglelefteq G$，所以 $C_G(Q)\cap Q\trianglelefteq Q$. 又因 $Q$ 为单群，所以 $C_G(Q)\cap Q=Q$ 或 $C_G(Q)\cap Q=1$. 若 $C_G(Q)\cap Q=Q$，则 $Q\leqslant C_G(Q)$，从而 $Q$ 是交换子群，与 $Q\cong A_5$ 矛盾，所以 $C_G(Q)\cap Q=1$. 因为 $C_G(Q)\cdot Q\leqslant G$，$|G|=120$，$|Q|=60$，所以 $|C_G(Q)|=1,2$. 当 $|C_G(Q)|=1$ 时，$G$ 是 $S_5$ 的子群. 因为 $|G|=120$，$|S_5|=120$，所以 $G\cong S_5$. 当 $|C_G(Q)|=2$ 时，则 $G$ 中有 10 阶元，从而有 10 阶交换子群，矛盾.

综上所述，$G\cong S_5$.

**参考文献：**


[1]　施武杰，杨文泽. $A_5$ 的一个新刻划与有限质元群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1984，9(1)：36-40.

[2]　施武杰. $A_5$ 的一个特征性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1986，11(3)：11-14.

[3]　钱国华，施武杰. $A_5$ 的一个特征及其初等证明 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(2)：1-4.

[4]　王华丽，周　伟，晏燕雄. 单群 $A_5$ 的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(12)：47-50.

[5] 李　月，曹洪平. 交错群 $A_5$，$A_6$，$A_7$ 的新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：47-50.
[6] 黄　宇，宋科研. 用不可补子群个数刻画单群 $A_5$[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：90-93.
[7] 高彦伟，曹洪平. 交错群 $A_n(5\leqslant n\leqslant 15)$的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(2)：68-71.
[8] 周　茹，吕　恒. 交错群 $A_5$ 的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(12)：6-9.
[9] 王孝敏. 对称群 $S_5$ 的一个新刻画 [J]. 德州学院学报，2018，34(2)：26-28.
[10] 何立官，陈贵云. 关于一些对称群的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(6)：1-3.
[11] 王孝敏，周　伟. 对称群 $S_5$ 的一个新数量刻画 [J]. 德州学院学报，2019，35(4)：11-15.
[12] 施武杰，李士恒. 有限群论导引 [M]. 北京：科学出版社，2009.
[13] 赵俊锋，王　飞，贾　有. $S_5$ 的子群 [J]. 长治学院学报，2010，27(5)：50-52.

# Characterizing $A_5$ and $S_5$ by the Numbers of Its Abelian Subgroups

QIAN Yan, CHEN Gui-yun
*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

**Abstract**: It is proved that $A_5$ and $S_5$ can be uniquely determined by its order and the numbers of its abelian subgroups of different orders by elementary approaches. The conclusions are as following: If the order of group $G$ is 60, then $G\cong A_5$ if and only if the orders of the abelian subgroups of $G$ are 2,3,4,5 and the numbers of them are 15,10,5,6 respectively; If the order of group $G$ is 120, then $G\cong S_5$ if and only if the orders of the abelian subgroups of $G$ are 2, 3, 4, 5, 6, and the numbers of them are 25, 10, 35, 6, 10 respectively.

**Key words**: the order of group; abelian subgroup; the structure of group

责任编辑　廖　坤