第 45 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 6 月
Vol. 45 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.003

半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的格林(星)关系及富足性①

张前滔, 赵 平, 罗永贵

贵州师范大学 数学科学学院, 贵阳 550025

摘要: 广义格林关系为研究非正则半群提供了一个有效途径. 基于这一方法, 对半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的元素和蛋盒图进行相关研究. 得到了半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的格林关系和星格林关系. 进一步证明了: 当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时, 半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 是非正则富足半群.

关 键 词: 局部方向保序变换半群; 格林关系; 格林星关系; 正则元; 非正则富足半群

中图分类号: O152.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)06-0009-07

设 $[n]=\{1, 2, \cdots, n\}(n \geqslant 3)$, 并赋予自然数的大小序. T_n 是 $[n]$ 上的全变换半群. 任意给定 $k \in [n]$, $\alpha \in T_n$, 对任意的 $x \in [n]$, 若由 $x \leqslant k$ 可推出 $x\alpha \leqslant k$ 且 $(1\alpha, 2\alpha, \cdots, k\alpha)$ 是一个圈, 即最多存在一个自然数 $1 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $i\alpha > (i+1)\alpha$, 则称 α 是局部 k-型方向保序的. 记 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 为 T_n 中所有局部 k-型方向保序的元素全体, 称为局部 k-型方向保序变换半群.

设 S 是半群, 且 $a, b \in S$. 若 $S^1 a = S^1 b$, 则称 a 与 b 是 L 等价的, 记为 $a\mathrm{L}b$ 或 $(a, b) \in \mathrm{L}$; 若 $aS^1 = bS^1$, 则称 a 与 b 是 R 等价的, 记为 $a\mathrm{R}b$ 或 $(a, b) \in \mathrm{R}$; 若 $S^1aS^1 = S^1bS^1$, 则称 a 与 b 是 J 等价的, 记为 $a\mathrm{J}b$ 或 $(a, b) \in \mathrm{J}$. 令 $\mathrm{H}=\mathrm{L} \wedge \mathrm{R}$, $\mathrm{D}=\mathrm{L} \vee \mathrm{R}$. 则 L, R, J, H 和 D 都是半群 S 上的等价关系. 这 5 个等价关系通常称为格林关系. 设 $a \in S$, 若存在 $b \in S$, 使得 $a=aba$, 则称 a 是 S 的正则元. 若 S 中的每个元素都是正则元, 则称 S 是正则半群. 若 S 的每个 L-类和 R-类都至少包含一个幂等元, 则称 S 是富足半群.

对于半群的格林关系、格林星关系、正则元及富足性的研究目前已有许多结果[1-8]. 文献[1]对格林关系的来龙去脉进行了综述. 文献[2]研究了定义在无限集上的拟一一变换半群的格林关系、正则元及富足性. 文献[3]刻画了保序且保双向等价关系变换半群的格林关系和正则元. 文献[4]得到了保等价关系 E 的变换半群的基数以及正则元的计算公式. 文献[5]给出了具有良恰当断面的富足半群的一个对称的织积结构定理, 是对逆断面和恰当断面中相应结果的丰富和推广. 文献[6-8]分别研究了半群 $\mathrm{PO}(X, Y, \theta)$, $T_{(X \times X)}$ 和 OS_n 的格林关系及正则元.

本文在文献[1-12]的基础上考虑半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的格林关系、格林星关系、正则元及富足性.

定义 1 设 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $\alpha \in \mathrm{TOP}_n(k)$, 用 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 表示 α 的定义域, $\mathrm{im}(\alpha)$ 表示 α 的象集, $\ker(\alpha)$ 表示 X_n 上的一个等价关系, $\ker(\alpha)=\{(x, y) \in X_n \times X_n: x\alpha = y\alpha\}$, 对任意的 $t \in \mathrm{im}(\alpha)$, $t\alpha^{-1}$ 表示 t 的原象集. 令 $I_x=\{y \in [n]: 1 \leqslant y \leqslant x\}$,

$$\varphi_\alpha(k)=\mathrm{im}(\alpha) \cap I_k$$
$$\phi_\alpha(k)=\{x\alpha^{-1}: x \in \varphi_\alpha(k)\}$$

① 收稿日期: 2019-12-04
基金项目: 国家自然科学基金项目(11861022, 11461014).
作者简介: 张前滔(1995-), 女, 硕士研究生, 主要从事半群代数理论的研究.
通信作者: 赵 平, 教授.

$$\tilde{\varphi}_\alpha(k)=\{x\in\varphi_\alpha(k):x\alpha^{-1}\cap I_k\neq\varnothing\}$$

定义 2 设 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $\alpha\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\alpha$ 的标准形式为

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

其中：$1\leqslant r\leqslant n$，$A_p\cap I_k\neq\varnothing(1\leqslant p\leqslant i)$，$A_q\cap I_k=\varnothing(i+1\leqslant q\leqslant r)$；$a_p\in I_k(1\leqslant p\leqslant j)$，且$(a_1, a_2, \cdots, a_i)$ 是一个圈；$a_q\notin I_k(j+1\leqslant q\leqslant r)$. 令

$$(a_p, a_{p+1})_k=\begin{cases}\{x\in\varphi_\alpha(k)\setminus\tilde{\varphi}_\alpha(k):a_p<x<a_{p+1}\} & 1\leqslant p\leqslant i-1\\ \{x\in\varphi_\alpha(k)\setminus\tilde{\varphi}_\alpha(k):a_i<x<a_1\}=(a_i, a_1)_k & p=i\end{cases}$$

$$[a_p, a_{p+1})_k=\begin{cases}\{x\in I_k:a_p\leqslant x<a_{p+1}\} & 1\leqslant p\leqslant i-1\\ \{x\in I_k:a_i\leqslant x<a_1\}=[a_i, a_1)_k & p=i\end{cases}$$

当 $a_p>a_{p+1}$ 时，

$$(a_p, a_{p+1})_k=\{x\in\varphi_\alpha(k)\setminus\tilde{\varphi}_\alpha(k):a_p<x\text{ 或 }x<a_{p+1}\}\qquad 1\leqslant p\leqslant i$$

$$[a_p, a_{p+1})_k=\{x\in I_k:a_p\leqslant x\text{ 或 }x<a_{p+1}\}\qquad 1\leqslant p\leqslant i$$

对任意的 $\beta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_i & \cdots & B_j & \cdots & B_m\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_i & \cdots & b_j & \cdots & b_m\end{pmatrix}\in \mathrm{TOP}_n(k)$，其中 $1\leqslant m\leqslant n$，若满足：

(a) $|\varphi_\alpha(k)|=|\varphi_\beta(k)|$ 且 $|\tilde{\varphi}_\alpha(k)|=|\tilde{\varphi}_\beta(k)|$；

(b) $a_s\in(a_p, a_{p+1})_k$ 当且仅当$b_s\in(b_p, b_{p+1})_k(1\leqslant p\leqslant i, i+1\leqslant s\leqslant j)$.

则称 α 与 β 一致保圈，记作 $\alpha\tilde{k}\beta$.

定义 3 设 $1\leqslant k\leqslant n$，在半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 上定义等价关系 $\sim^*$：$\alpha\sim^*\beta$ 当且仅当 $|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$.

本文未定义的术语及符号参见文献[9-12].

1 半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的格林关系及非正则性

众所周知，在有限半群中，J = D. 因此我们只需讨论半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 上的 L,R 和 D 关系.

定理 1 设 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $\alpha,\beta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，则$(\alpha, \beta)\in$ L 当且仅当 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$ 且$\tilde{\varphi}_\alpha(k)=\tilde{\varphi}_\beta(k)$.

证 注意到$(\mathrm{TOP}_n(k))^1=\mathrm{TOP}_n(k)$，设$(\alpha, \beta)\in$ L，则存在 $\delta,\gamma\in \mathrm{TOP}_n(k)$，使得 $\alpha=\delta\beta$ 且 $\beta=\gamma\alpha$，则 $\mathrm{im}(\alpha)=([n])\alpha=([n])\delta\beta\subseteq([n])\beta=\mathrm{im}(\beta)$. 同理由 $\beta=\gamma\alpha$，可得 $\mathrm{im}(\beta)\subseteq \mathrm{im}(\alpha)$. 因此 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$. 从而 $\varphi_\alpha(k)=\varphi_\beta(k)$. 对任意的 $x\in\tilde{\varphi}_\alpha(k)$，$x\alpha^{-1}\cap I_k\neq\varnothing$，从而存在 $y\in x\alpha^{-1}\cap I_k$，使得 $x=y\alpha=(y\delta)\beta$，则 $y\delta\in x\beta^{-1}$. 由 $\delta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，有 $y\delta\leqslant k$，从而 $y\delta\in x\beta^{-1}\cap I_k\neq\varnothing$，即 $x\in\tilde{\varphi}_\beta(k)$. 由 x 的任意性有$\tilde{\varphi}_\alpha(k)\subseteq\tilde{\varphi}_\beta(k)$. 同理可得$\tilde{\varphi}_\beta(k)\subseteq\tilde{\varphi}_\alpha(k)$. 因此$\tilde{\varphi}_\beta(k)=\tilde{\varphi}_\alpha(k)$.

注意到，由 $\varphi_\alpha(k)=\varphi_\beta(k)$ 及$\tilde{\varphi}_\beta(k)=\tilde{\varphi}_\alpha(k)$，有 $|\varphi_\alpha(k)|=|\varphi_\beta(k)|$ 及 $|\tilde{\varphi}_\beta(k)|=|\tilde{\varphi}_\alpha(k)|$.

反之，假设 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$ 且$\tilde{\varphi}_\alpha(k)=\tilde{\varphi}_\beta(k)$，

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_r\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_i & \cdots & B_j & \cdots & B_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

其中：$A_{pk}=A_p\cap I_k\neq\varnothing$，$B_{pk}=B_p\cap I_k\neq\varnothing(1\leqslant p\leqslant i)$，$A_q\cap I_k=\varnothing$，$B_q\cap I_k=\varnothing(i+1\leqslant q\leqslant r)$；$a_p\in I_k(1\leqslant p\leqslant j)$，$a_q\notin I_k(j+1\leqslant q\leqslant r)$，且$(a_1, a_2, \cdots, a_i)$ 是圈. 取定 $b_p\in A_{pk}$，$c_p\in B_{pk}(1\leqslant p\leqslant i)$，$b_q\in A_q$，$c_q\in B_q(i+1\leqslant q\leqslant r)$. 则$(b_1, b_2, \cdots, b_i)$ 和$(c_1, c_2, \cdots, c_i)$ 是圈. 构造

$$\delta=\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_j & \cdots & A_r\\ c_1 & \cdots & c_i & c_{i+1} & \cdots & c_j & \cdots & c_r\end{pmatrix}\qquad \gamma=\begin{pmatrix}B_1 & \cdots & B_i & B_{i+1} & \cdots & B_j & \cdots & B_r\\ b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_j & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

显然 $\delta,\gamma\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\alpha=\delta\beta$ 且 $\beta=\gamma\alpha$.

定理 2 设 $1\leqslant k\leqslant n$，且 $\alpha,\beta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，则$(\alpha, \beta)\in$ R 当且仅当 $\ker(\alpha)=\ker(\beta)$，$\phi_\alpha(k)=\phi_\beta(k)$

且 $\alpha\widetilde{k}\beta$.

证 设$(\alpha, \beta) \in R$，则存在 $\delta, \gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$，使得 $\alpha = \beta\delta$ 且 $\beta = \alpha\gamma$. 任意取$(x, y) \in \ker(\alpha)$，则 $x\alpha = y\alpha$. 从而 $x\beta = (x\alpha)\gamma = (y\alpha)\gamma = y\beta$，即$(x, y) \in \ker(\beta)$. 由$(x, y)$的任意性得 $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta)$. 同理可得 $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$. 因此 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$. 任意取 $x \in \phi_\alpha(k)$，则 $x\alpha \leqslant k$. 于是由 $\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$，有 $x\beta = (x\alpha)\gamma \leqslant k$. 从而 $x \in \phi_\beta(k)$，由 x 的任意性得$\phi_\alpha(k) \subseteq \phi_\beta(k)$. 同理可得 $\phi_\beta(k) \subseteq \phi_\alpha(k)$. 因此 $\phi_\beta(k) = \phi_\alpha(k)$. 由 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ 可得 $|\tilde{\varphi}_\beta(k)| = |\tilde{\varphi}_\alpha(k)|$. 注意到$\phi_\beta(k) = \phi_\alpha(k)$，我们断言 $|\varphi_\alpha(k)| = |\varphi_\beta(k)|$. 令

$$\phi_\alpha(k) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \qquad A_i \neq \varnothing,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$$

$$\phi_\beta(k) = \bigcup_{i=1}^{s} A_i \qquad A_i \neq \varnothing,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$$

假设 $m > s$，则 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s \cup A_{s+1} \cup \cdots \cup A_m = \phi_\alpha(k) = \phi_\beta(k) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s$，由$A_i \neq \varnothing$，$1 \leqslant i \leqslant m$，可知 $m > s$ 这种情况不存在. 同理不存在 $m < s$. 因此 $m = s$，即 $|\varphi_\alpha(k)| = |\varphi_\beta(k)|$. 不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_i & \cdots & b_j & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

其中：$A_p \cap I_k \neq \varnothing (1 \leqslant p \leqslant i)$，$A_q \cap I_k = \varnothing (i+1 \leqslant q \leqslant r)$；$a_p, b_p \in I_k (1 \leqslant p \leqslant j)$，$a_q, b_q \notin I_k (j+1 \leqslant q \leqslant r)$；$(b_1, b_2, \cdots, b_i)$是一个圈且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_i$. 设任意的 $a_s \in \varphi_\alpha(k) \setminus \tilde{\varphi}_\alpha(k) (i+1 \leqslant s \leqslant j)$ 且 $a_s \in (a_p, a_{p+1})_k (1 \leqslant p \leqslant i)$，有 $a_p < a_s < a_{p+1}$. 由 $\beta = \alpha\gamma$，有 $a_s\gamma = (A_s)\alpha\gamma = (A_s)\beta = b_s$. 同理有 $a_p\gamma = b_p$，$a_{p+1}\gamma = b_{p+1}$. 以下分两种情形证明 $b_s \in (b_p, b_{p+1})_k$：

情形 1 若 $b_p < b_{p+1}$，存在 $1 \leqslant q \leqslant i (q \neq p)$，使得 $b_q > b_{q+1}$. 由 $a_p < a_s < a_{p+1}$ 及 $\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$，有 $a_p\gamma < a_s\gamma < a_{p+1}\gamma$，即 $b_p < b_s < b_{p+1}$. 否则，设 $b_p > b_s$，$b_s < b_{p+1}$，或 $b_p < b_s$，$b_s > b_{p+1}$，则根据局部方向保序的性质知与 $\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$ 矛盾，故 $b_s \in (b_p, b_{p+1})_k$.

情形 2 若 $b_p > b_{p+1}$. 由 $a_p < a_s < a_{p+1}$ 及 $\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$，有 $a_p\gamma > a_s\gamma$，$a_s\gamma < a_{p+1}\gamma (b_s < b_{p+1})$，或 $a_p\gamma < a_s\gamma$，$a_s\gamma > a_{p+1}\gamma (b_s > b_p)$. 否则，设 $b_p > b_s > b_{p+1}$，则根据方向保序的性质知与$\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$矛盾，故 $b_s \in (b_p, b_{p+1})_k$.

综上所述，由 $a_s \in (a_p, a_{p+1})_k$ 可推出 $b_s \in (b_p, b_{p+1})_k$. 同理，由 $b_s \in (b_p, b_{p+1})_k$ 可推出 $a_s \in (a_p, a_{p+1})_k$，从而 $\alpha\widetilde{k}\beta$.

反之，设 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$，$\phi_\alpha(k) = \phi_\beta(k)$ 且 $\alpha\widetilde{k}\beta$，

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_j & A_{j+1} & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_j & A_{j+1} & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_p, b_p \in I_k (1 \leqslant p \leqslant j)$，$a_q, b_q \notin I_k (j+1 \leqslant q \leqslant r)$. $(a_1, a_2, \cdots, a_j)$ 和$(b_1, b_2, \cdots, b_j)$是圈. 令

$$a_r^* = [n] \setminus \{I_k \cup \{a_{j+1}\} \cup \{a_{j+2}\} \cup \cdots \cup \{a_{r-1}\}\}$$

$$b_r^* = [n] \setminus \{I_k \cup \{b_{j+1}\} \cup \{b_{j+2}\} \cup \cdots \cup \{b_{r-1}\}\}$$

构造

$$\delta = \begin{pmatrix} [a_1, a_2)_k & [a_2, a_3)_k & \cdots & [a_j, a_1)_k & \{a_{j+1}\} & \{a_{j+2}\} & \cdots & a_r^* \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_j & b_{j+1} & b_{j+2} & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} [b_1, b_2)_k & [b_2, b_3)_k & \cdots & [b_j, b_1)_k & \{b_{j+1}\} & \{b_{j+2}\} & \cdots & b_r^* \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & a_{j+1} & a_{j+2} & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

显然 $\delta, \gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\beta = \alpha\delta$ 且 $\alpha = \beta\gamma$.

定理 3 设 $1 \leqslant k \leqslant n$，且 $\alpha, \beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$，则$(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}$ 当且仅当 $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ 且 $\alpha \tilde{k} \beta$.

证 设$(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}$，则存在 $\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$，使得 $\alpha \mathrm{L} \gamma \mathrm{R} \beta$. 则 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\gamma)$，$\tilde{\varphi}_\alpha(k) = \tilde{\varphi}_\gamma(k)$，$\ker(\gamma) = \ker(\beta)$，$\phi_\gamma(k) = \phi_\beta(k)$ 且 $\gamma \tilde{k} \beta$. 从而 $|\varphi_\alpha(k)| = |\varphi_\gamma(k)| = |\varphi_\beta(k)|$，$|\tilde{\varphi}_\alpha(k)| = |\tilde{\varphi}_\gamma(k)| = |\tilde{\varphi}_\beta(k)|$. 任意的 $a_s \in \varphi_\alpha(k) \setminus \tilde{\varphi}_\alpha(k) = \varphi_\gamma(k) \setminus \tilde{\varphi}_\gamma(k) (i+1 \leqslant s \leqslant j)$ 且 $a_s \in (a_p, a_{p+1})_k (1 \leqslant p \leqslant i)$，由 $\gamma \tilde{k} \beta$，有$b_s \in (b_p, b_{p+1})_k$. 同理，可由 $b_s \in (b_p, b_{p+1})_k (1 \leqslant p \leqslant i)$ 推出 $a_s \in (a_p, a_{p+1})_k$. 故 $\alpha \tilde{k} \beta$.

反之，不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_j & A_{j+1} & A_{j+2} & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & a_{j+1} & a_{j+2} & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & B_{j+1} & B_{j+2} & \cdots & B_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_j & b_{j+1} & b_{j+2} & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_p, b_p \in I_k (1 \leqslant p \leqslant j)$，$a_q, b_q \notin I_k (j+1 \leqslant q \leqslant r)$. $(a_1, a_2, \cdots, a_j)$ 和$(b_1, b_2, \cdots, b_j)$ 是圈. 构造

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & B_{j+1} & B_{j+2} & \cdots & B_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & a_{j+1} & a_{j+2} & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

显然 $\gamma \in \mathrm{TOP}_n(k)$ 且 $\alpha \mathrm{L} \gamma \mathrm{R} \beta$，即$(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}$.

定理 4 设 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $\alpha \in \mathrm{TOP}_n(k)$，则 α 是正则元当且仅当 $\varphi_\alpha(k) = \tilde{\varphi}_\alpha(k)$.

证 注意$\tilde{\varphi}_\alpha(k) \subseteq \varphi_\alpha(k)$. 设 α 是正则元，则存在 $\beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$，使得 $\alpha = \alpha\beta\alpha$. 假设 $|\tilde{\varphi}_\alpha(k)| < |\varphi_\alpha(k)|$，则存在 $a_j \in \varphi_\alpha(k) \setminus \tilde{\varphi}_\alpha(k)$，从而 $a_j\alpha^{-1} \cap I_k = \varnothing$. 由 $\alpha = \alpha\beta\alpha$ 有 $a_j = (a_j\alpha^{-1})\alpha = (a_j\alpha^{-1})\alpha\beta\alpha = (a_j\beta)\alpha$，则 $a_j\beta \in a_j\alpha^{-1}$. 又由 $\beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$，有 $a_j\beta \in I_k$，从而 $a_j\alpha^{-1} \cap I_k \neq \varnothing$，矛盾. $|\varphi_\alpha(k)| = |\tilde{\varphi}_\alpha(k)|$，故$\varphi_\alpha(k) = \tilde{\varphi}_\alpha(k)$.

反之，不妨设

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

其中：$A_{pk} = A_p \cap I_k \neq \varnothing (1 \leqslant p \leqslant i)$，$A_q \cap I_k = \varnothing (i+1 \leqslant q \leqslant r)$；$a_p \in I_k (1 \leqslant p \leqslant i)$，$a_q \notin I_k (j+1 \leqslant q \leqslant r)$ 且$(a_1, a_2, \cdots, a_i)$ 是圈. 令 $a_r^{\#} = [n] \setminus \{I_k \cup \{a_{i+1}\} \cup \{a_{i+2}\} \cup \cdots \cup \{a_{r-1}\}\}$，$a_p^* \in A_{pk} (1 \leqslant p \leqslant i)$，$a_q^* \in A_q (i+1 \leqslant q \leqslant r)$. 构造

$$\beta = \begin{pmatrix} [a_1, a_2)_k & [a_2, a_3)_k & \cdots & [a_{i-1}, a_i)_k & [a_i, a_1)_k & \{a_{i+1}\} & \{a_{i+2}\} & \cdots & a_r^{\#} \\ a_1^* & a_2^* & \cdots & a_{i-1}^* & a_i^* & a_{i+1}^* & a_{i+2}^* & \cdots & a_r^* \end{pmatrix}$$

易见 $\beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$ 且 $\alpha = \alpha\beta\alpha$，故 α 是正则元.

推论 1 设 $1 \leqslant k \leqslant n$，$\alpha, \beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$，且 α, β 是正则元. 若 $|\varphi_\alpha(k)| = |\varphi_\beta(k)|$，则 $\alpha \tilde{k} \beta$.

推论 2 设 $1 \leqslant k \leqslant n$，$\alpha, \beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$，且 α, β 是正则元，则：

(i) $(\alpha, \beta) \in \mathrm{L}$ 当且仅当 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$；

(ii) $(\alpha, \beta) \in \mathrm{R}$ 当且仅当 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$；

(iii) $(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}$ 当且仅当 $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ 且 $|\varphi_\alpha(k)| = |\varphi_\beta(k)|$.

证 由定理 4 知 $\varphi_\alpha(k) = \tilde{\varphi}_\alpha(k)$，$\varphi_\beta(k) = \tilde{\varphi}_\beta(k)$. 设 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$，则 $\varphi_\alpha(k) = \varphi_\beta(k)$. 从而$\tilde{\varphi}_\alpha(k) = \varphi_\alpha(k) = \varphi_\beta(k) = \tilde{\varphi}_\beta(k)$. 故 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ 可推出$\tilde{\varphi}_\alpha(k) = \tilde{\varphi}_\beta(k)$. 设 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$，则 $|\tilde{\varphi}_\alpha(k)| = |\tilde{\varphi}_\beta(k)|$. 从而 $|\varphi_\alpha(k)| = |\tilde{\varphi}_\alpha(k)| = |\tilde{\varphi}_\beta(k)| = |\varphi_\beta(k)|$，且 $\phi_\alpha(k) = \phi_\beta(k)$. 再由推论 1 得到 $\alpha \tilde{k} \beta$，故 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ 可推出 $\phi_\alpha(k) = \phi_\beta(k)$ 及 $\alpha \tilde{k} \beta$. (iii) 由推论 1 和定理 3 易证得.

2 半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的格林星关系及富足性

定理 5 设 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $\alpha, \beta \in \mathrm{TOP}_n(k)$，则：

(i) $(\alpha,\beta)\in \mathrm{L}^*$ 当且仅当 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$；

(ii) $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^*$ 当且仅当 $\ker(\alpha)=\ker(\beta)$.

证　(i)　设 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{L}^*$，

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_j & A_{j+1} & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

其中 $a_i\in I_k(1\leqslant i\leqslant j)$，$a_i\notin I_k(j+1\leqslant i\leqslant r)$ 且 $a_1<a_2<\cdots<a_j$. 取 $\gamma=1$ 为 $[n]$ 上的恒等变换. 令 $a_r^{\#}=[n]\backslash\{I_k\cup\{a_{j+1}\}\cup\{a_{j+2}\}\cup\cdots\cup\{a_{r-1}\}\}$. 构造

$$\delta=\begin{pmatrix}[a_1,a_2)_k & [a_2,a_3)_k & \cdots & [a_j,a_1)_k & \{a_{j+1}\} & \{a_{j+2}\} & \cdots & a_r^{\#}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_j & a_{j+1} & a_{j+2} & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

显然 $\delta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\delta)$ 且 $\alpha 1=\alpha\delta$. 由文献[9]的引理1.1有 $\beta 1=\beta\delta$，从而 $\mathrm{im}(\beta)=\mathrm{im}(\beta\delta)\subseteq \mathrm{im}(\delta)=\mathrm{im}(\alpha)$. 同理有 $\mathrm{im}(\alpha)\subseteq \mathrm{im}(\beta)$. 因此 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$.

反之，设 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$，则 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{L}(T_n)$. 从而 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{L}^*$.

(ii)　设 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^*$，

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

其中：$A_{pk}=A_p\cap I_k\neq\varnothing(1\leqslant p\leqslant i)$，$A_q\cap I_k=\varnothing(i+1\leqslant q\leqslant r)$；$a_p\in I_k(1\leqslant p\leqslant j)$，$a_q\notin I_k(j+1\leqslant q\leqslant r)$ 且 $(a_1,a_2,\cdots,a_i)$ 是圈. 取 $\gamma=1$ 为 $[n]$ 上的恒等变换. 令 $a_p^*\in A_{pk}(1\leqslant p\leqslant i)$，$a_q^*\in A_q(i+1\leqslant q\leqslant r)$. 构造

$$\delta=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r\\ a_1^* & a_2^* & \cdots & a_i^* & \cdots & a_j^* & \cdots & a_r^*\end{pmatrix}$$

显然 $\delta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\ker(\alpha)=\ker(\delta)$ 且 $1\alpha=\delta\alpha$. 由文献[9]的引理1.1，类似地有 $1\beta=\delta\beta$. 设任意的 $x,y\in[n]$ 且 $x\alpha=y\alpha$，有 $x\delta=y\delta$. 从而 $x\beta=x\delta\beta=y\delta\beta=y\beta$，故 $\ker(\alpha)\subseteq\ker(\beta)$. 同理可得 $\ker(\beta)\subseteq\ker(\alpha)$. 因此 $\ker(\alpha)=\ker(\beta)$.

反之，设 $\ker(\alpha)=\ker(\beta)$，则 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}(T_n)$. 从而 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^*$.

定理 6　$\sim^*=\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*=\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*=\mathrm{D}^*$.

证　设 $\alpha,\beta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$(\alpha,\beta)\in\sim^*$ 且 $|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|=r$.

情形 1　$|\varphi_\alpha(k)|=|\varphi_\beta(k)|=s$. 不妨设

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_{s-1} & A_s & A_{s+1} & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{s-1} & a_s & a_{s+1} & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_{s-1} & B_s & B_{s+1} & \cdots & B_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s & b_{s+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

其中 $a_i,b_i\in I_k(i=1,2,\cdots,s)$，$a_i,b_i\notin I_k(i=s+1,s+2,\cdots,r)$. $(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_s)$ 是圈. 令 $a_r^*=[n]\backslash\{I_k\cup\{a_{s+1}\}\cup\{a_{s+2}\}\cup\cdots\cup\{a_{r-1}\}\}$，$c_i\in I_k(1\leqslant i\leqslant s)$，$c_i\in[n]\backslash I_k(s+1\leqslant i\leqslant r)$，且 $(c_1,c_2,\cdots,c_s)$ 是圈. 构造

$$\delta=\begin{pmatrix}[a_1,a_2)_k & [a_2,a_3)_k & \cdots & [a_s,a_1)_k & \{a_{s+1}\} & \cdots & a_r^*\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

$$\lambda=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_s & A_{s+1} & \cdots & A_r\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s & c_{s+1} & \cdots & c_r\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}[a_1,a_2)_k & [a_2,a_3)_k & \cdots & [a_s,a_1)_k & \{a_{s+1}\} & \cdots & a_r^*\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s & b_{s+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

$$\eta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_s & B_{s+1} & \cdots & B_r\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s & c_{s+1} & \cdots & c_r\end{pmatrix}$$

显然 $\delta,\gamma,\lambda,\eta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\alpha\mathrm{L}^*\delta\mathrm{R}^*\gamma\mathrm{L}^*\beta$ 且 $\alpha\mathrm{R}^*\lambda\mathrm{L}^*\eta\mathrm{R}^*\beta$. 因此 $\sim^*\subseteq\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ L^*$ 且 $\sim^*\subseteq\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$.

反之，设$(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$，则存在$\lambda,\eta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，使得$\alpha\mathrm{R}^*\lambda\mathrm{L}^*\eta\mathrm{R}^*\beta$. 从而$|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\lambda)|=|\mathrm{im}(\eta)|=|\mathrm{im}(\beta)|$. 则$(\alpha,\beta)\in\sim^*$，从而$\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\subseteq\sim^*$. 同理可得$\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\subseteq\sim^*$. 因此$\sim^*=\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*=\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*$.

情形 2　$s=|\varphi_\alpha(k)|\neq|\varphi_\beta(k)|=m$. 不妨设$s<m$，

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_s & \cdots & A_m & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s & \cdots & a_m & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_s & \cdots & B_m & \cdots & A_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s & \cdots & b_m & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

其中$a_i,b_j\in I_k(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant m)$，$a_i,b_j\notin I_k(s+1\leqslant i\leqslant r,m+1\leqslant j\leqslant r)$. $(a_1,a_2,\cdots,a_s)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_m)$是圈. 令$a_r^*=[n]\backslash\{I_k\cup\{a_{s+1}\}\cup\{a_{s+2}\}\cup\cdots\cup\{a_{r-1}\}\}$，$c_i\in I_k(1\leqslant i\leqslant m)$，$c_i\in[n]\backslash I_k(m+1\leqslant i\leqslant r)$且$(c_1,c_2,\cdots,c_m)$是圈. 构造

$$\delta=\begin{pmatrix}[a_1,a_2)_k & [a_2,a_3)_k & \cdots & [a_s,a_1)_k & \{a_{s+1}\} & \cdots & a_r^*\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} & \cdots & a_r\end{pmatrix}$$

$$\lambda=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_s & \cdots & A_m & \cdots\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s & \cdots & c_m & \cdots\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}[a_1,a_2)_k & [a_2,a_3)_k & \cdots & [a_s,a_1)_k & \{a_{s+1}\} & \cdots & a_r^*\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s & b_{s+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

$$\eta=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_s & \cdots & B_m & \cdots\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s & \cdots & c_m & \cdots\end{pmatrix}$$

显然$\delta,\gamma,\lambda,\eta\in \mathrm{TOP}_n(k)$，$\alpha\mathrm{L}^*\delta\mathrm{R}^*\gamma\mathrm{L}^*\beta$且$\alpha\mathrm{R}^*\lambda\mathrm{L}^*\eta\mathrm{R}^*\beta$. 因此$\sim^*\subseteq\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*$且$\sim^*\subseteq\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$.

反之，设$(\alpha,\beta)\in\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$，则存在$\lambda,\eta\in\mathrm{TOP}_n(k)$，使得$\alpha\mathrm{R}^*\lambda\mathrm{L}^*\eta\mathrm{R}^*\beta$. 从而$|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\lambda)|=|\mathrm{im}(\eta)|=|\mathrm{im}(\beta)|$，则$(\alpha,\beta)\in\sim^*$. 由任意性有$\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\subseteq\sim^*$. 同理可得$\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\subseteq\sim^*$. 因此$\sim^*=\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*=\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*$. 又由$\mathrm{D}^*\subseteq\sim^*$，有$\mathrm{D}^*\subseteq\sim^*=\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*=\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\subseteq\mathrm{D}^*$，因此$\sim^*=\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*=\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*=\mathrm{D}^*$.

推论 3　设$1\leqslant k\leqslant n$，$\alpha,\beta\in\mathrm{TOP}_n(k)$，则$(\alpha,\beta)\in\mathrm{D}^*$当且仅当$|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$.

注意，在$\mathrm{TOP}_n(k)$中$\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\neq\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$.

例 1　设$k=3$，$n=5$，$\alpha=\begin{pmatrix}12 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1 & 24 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\in\mathrm{TOP}_n(k)$，存在$\delta=\begin{pmatrix}12 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\in\mathrm{TOP}_n(k)$，使得$\alpha\mathrm{R}^*\delta\mathrm{L}^*\beta$. 则$(\alpha,\beta)\in\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*$. 若$(\alpha,\beta)\in\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$，则存在$\gamma\in\mathrm{TOP}_n(k)$，使得$\alpha\mathrm{L}^*\gamma\mathrm{R}^*\beta$. 则$\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\gamma)$，$\ker(\gamma)=\ker(\beta)$. 满足此条件的元素共有 256 个. 由于$|\tilde{\varphi}_\beta(k)|=3>|\varphi_\alpha(k)|=2$，则存在$x\in I_k$，使得$x\gamma>k$. 如$\gamma_1=\begin{pmatrix}1 & 24 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，$3\gamma_1=4>3$. 因此满足条件的所有元素都不属于半群$\mathrm{TOP}_n(k)$. 故$(\alpha,\beta)\notin\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$，从而$\mathrm{R}^*\circ\mathrm{L}^*\neq\mathrm{L}^*\circ\mathrm{R}^*$.

定理 7　设$1\leqslant k\leqslant n-1$，则半群$\mathrm{TOP}_n(k)$是非正则富足半群.

证　由定理 4 知半群$\mathrm{TOP}_n(k)$是非正则的，下证半群$\mathrm{TOP}_n(k)$的富足性. 设

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_r\end{pmatrix}\in\mathrm{TOP}_n(k)$$

其中：$A_{pk}=A_p\cap I_k\neq\varnothing(1\leqslant p\leqslant i)$，$A_q\cap I_k=\varnothing(i+1\leqslant q\leqslant r)$；$a_p\in I_k(1\leqslant p\leqslant j)$，$a_q\notin I_k(j+1\leqslant q\leqslant r)$且$(a_1,a_2,\cdots,a_i)$是圈. 令$b_1=\min\{\varphi_\alpha(k)\}$，$b_p=\min\{\varphi_\alpha(k)\backslash\{b_1,b_2,\cdots,b_{p-1}\}\}(2\leqslant p\leqslant j)$，$b_q=a_q(j+1\leqslant q\leqslant r)$，$b_r^\#=[n]\backslash\{I_k\cup\{b_{j+1}\}\cup\{b_{j+2}\}\cup\cdots\cup\{b_{r-1}\}\}$，$a_p^*\in A_{pk}(1\leqslant p\leqslant i)$，$a_q^*\in A_q(i+1\leqslant q\leqslant r)$. 构造

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}[b_1,b_2)_k & [b_2,b_3)_k & \cdots & [b_j,b_1)_k & \{b_{j+1}\} & \cdots & b_r^\#\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_j & \cdots \\ a_1^* & a_2^* & \cdots & a_i^* & \cdots & a_j^* & \cdots \end{pmatrix}$$

显然 $\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in E(\mathrm{TOP}_n(k))$，$\varepsilon_1 \in L_\alpha^*$ 且 $\varepsilon_2 \in R_\alpha^*$．综上所述，对任意的 $\alpha \in \mathrm{TOP}_n(k)$，$L_\alpha^*$ 和 R_α^* 都至少包含一个幂等元．因此半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 是非正则富足半群．

参考文献：

[1] GUO Y Q，GONG C M，REN X M．A Survey on the Origin and Developments of Green's Relations on Semigroups [J]．山东大学学报(理学版)，2010，45(8)：1-18．

[2] MENDES-GONCALVES S．Green's Relations，Regularity and Abundancy for Semigroups of Quasi-onto Transformations [J]．Semigroup Forum，2015，91(1)：39-52．

[3] DENG L Z，ZENG J W，YOU T J．Green's Relations and Regularity for Semigroups of Transformations That Preserve Order and a Double Direction Equivalence [J]．Semigroup Forum，2012，84(1)：59-68．

[4] 孙　垒．保持等价关系的变换半群的组合结果 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：82-88．

[5] 孔祥军，王　蓓．具有良恰当断面的富足半群的结构 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2019，41(10)：37-44．

[6] 罗永贵，瞿云云．半群 $PO(X，Y，\theta)$ 的格林关系及正则元 [J]．云南民族大学学报(自然科学版)，2014，23(6)：434-438．

[7] 李晓敏，罗永贵，赵　平．线性变换半群 $T_{(X\times X)}$ 的格林关系和正则元 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(2)：25-28．

[8] 吕　会，罗永贵，赵　平，等．半群 $\mathcal{OS}_n$ 的某些特殊性质 [J]．数学的实践与认识，2019，49(2)：252-258．

[9] FOUNTAIN J．Abundant Semigroups [J]．Proc London Math Soc，1982，44(1)：103-129．

[10] HOWIE J M．Fundamentals of Semigroup Theory [M]．Oxford：Oxford University Press，1995．

[11] CLIFFORD A，PRESTON G．The Algebraic Theory of Semigroups．Volume Ⅱ [M]．Providence，RI：American Mathematical Society，1967．

[12] GANYUSHKIN O，MAZORCHUK V．Classical Finite Transformation Semigroups [M]．London：Springer-Verlag，2009．

The (∗)-Green's Relations and Abundance of Semigroup $\mathrm{TOP}_n(k)$

ZHANG Qian-tao，　ZHAO　Ping，　LUO Yong-gui

School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：The generalized Green's relations provides an effective way to study irregular semigroups. Based on this method，the elements of semigroup $\mathrm{TOP}_n(k)$ and egg box graph have been studied，and the Green's relations and (∗)-Green's relations of semigroup $\mathrm{TOP}_n(k)$ been obtained. Furthermore，it is shown that when $1\leqslant k\leqslant n-1$，the semigroup $\mathrm{TOP}_n(k)$ is an irregular abundant semigroup.

Key words：local orientation-preserving transformation semigroup；Green's relations；(∗)-Green's relations；regular element；irregular abundant semigroup

责任编辑　廖　坤