第 45 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 6 月
Vol. 45 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.004

环同态下的与半对偶模相关的 Gorenstein 平坦模的传递性[①]

蔡晓东, 曹 苗, 狄振兴

西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070

摘要: 设 C 是交换凝聚环 R 上的半对偶 R-模. 证明了: 如果 S 是使得 $C\otimes_R S$-Gorenstein 平坦 S-模类关于扩张封闭的满忠实平坦交换 R-代数, 那么 R-模 M 是 C-Gorenstein 平坦的当且仅当 S-模 $S\otimes_R M$ 是 $C\otimes_R S$-Gorenstein 平坦的.

关 键 词: 半对偶模; C-Gorenstein 平坦; 满忠实平坦 R-代数

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)06-0016-05

文献[1-3]在交换 Noetherian 环上分别以不同的称谓独立地引入了半对偶模的概念. 交换 Noetherian 环上的半对偶模是对偶模和秩为 1 的自由模的共同推广. 与对偶模不同的是, 半对偶模在一般环上是大量存在的. 近些年来, 半对偶模及其相关模类受到了许多学者的广泛关注(参见文献[4-15]).

设 C 是交换 Noetherian 环 R 上的半对偶模, 文献[12]在交换 Noetherian 环上引入了 C-Gorenstein 投射、C-Gorenstein 内射和 C-Gorenstein 平坦模类的概念, 并定义了模类的 3 种新的相对同调维数: C-Gorenstein 投射维数、C-Gorenstein 内射维数及 C-Gorenstein 平坦维数, 建立了这 3 种新的同调维数与环 R 关于 C 的平凡扩张上的 Gorenstein 同调维数的关系, 并对 C-Gorenstein 投射维数与 R 关于 C 的平凡扩张上的 G-维数进行了对比. 文献[13]又将 C-Gorenstein 投射模及 C-Gorenstein 投射维数的概念推广到了非交换 Noetherian 环的情形.

文献[5]讨论了环同态下 C-Gorenstein 同调模类的传递性质, 特别地, 在交换环 S 是平坦维数有限的 R-代数的条件下证明了: 如果 A 是 C-Gorenstein 平坦 R-模, $\widetilde{F}$ 是平坦 S-模, 那么 $A\otimes_R\widetilde{F}$ 是 $C\otimes_R S$-Gorenstein 平坦 S-模. 文献[14]证明了: 如果 R 是凝聚环, S 是使得 Gorenstein 平坦 S-模关于扩张封闭的满忠实平坦 R-代数, 那么 R-模 M 是 Gorenstein 平坦的当且仅当 S-模 $S\otimes_R M$ 是 Gorenstein 平坦的.

受文献[14]的启发, 本文将证明下述结果, 它给出了文献[5]中定理的一个充分必要性结论:

定理 1 设 R 是交换的凝聚环, S 是使得 $C\otimes_R S$-Gorenstein 平坦 S-模关于扩张封闭的满忠实平坦交换 R-代数, 则 R-模 M 是 C-Gorenstein 平坦的当且仅当 S-模 $S\otimes_R M$ 是 $C\otimes_R S$-Gorenstein 平坦的.

本文中, 都假定 R 是交换环. 根据文献[5], 我们有:

引理 1 设 S 是交换环, φ: $R\longrightarrow S$ 是 $\mathrm{fd}_R S<\infty$ 的环同态. 则 $C\otimes_R S$ 是半对偶 S-模.

引理 2 以下条件等价:

---

① 收稿日期: 2019-04-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11601433).

作者简介: 蔡晓东(1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事同调代数的研究.

通信作者: 狄振兴, 副教授.

(i) X 是 C -平坦 R -模；

(ii) 对任意的内射 R -模 E，$\mathrm{Hom}_R(X, E)$ 是 C -内射 R -模；

(iii) 对任意的内射余生成子 E，$\mathrm{Hom}_R(X, E)$ 是 C -内射 R -模.

证　(i)⇒(ii) 和(ii)⇒(iii) 是显然的.

(iii)⇒(i) 要证 X 是 C -平坦的，根据文献[8]的引理 5.2，只需说明 $X \in \mathscr{B}_C$ 且 $\mathrm{Hom}_R(C, X)$ 是平坦 R -模. 因为 $\mathrm{Hom}_R(X, E)$ 是 C -内射 R -模，所以 $\mathrm{Hom}_R(X, E) \in \mathscr{A}_C$. 由文献[8] 的命题 7.2 可知 $X \in \mathscr{B}_C$. 要证 $\mathrm{Hom}_R(C, X)$ 是平坦的，根据文献[15]的定理 3.2.9，只需说明 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是内射的即可. 而

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong C \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

并且根据 (iii) 可知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是 C -内射的，所以 $C \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ 是内射的，从而 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是内射的.

引理 3　对 R -模 M，以下条件等价：

(i) M 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦 R -模.

(ii) M 满足两条成立：

(a) $\mathscr{I}_C \top M$；

(b) 如果存在 R -模的正合序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow C \otimes_R F^0 \longrightarrow C \otimes_R F^1 \longrightarrow \cdots$，使得对所有的 $i \in \mathbb{N}$，F^i 是平坦的，并且对所有的内射 R -模 I，$\mathrm{Hom}_R(C, I) \otimes_R -$ 是正合的.

(iii) 存在 R -模的短正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow G \otimes_R F \longrightarrow G \longrightarrow 0$，其中 F 是平坦的，G 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的.

引理 4　设 $0 \longrightarrow C \otimes_R F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ 是 R -模的短正合列. 如果 F 是平坦的(即 $C \otimes_R F$ 是 C -平坦的)，G 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是 $\mathscr{G}_C$ -内射的，那么 H 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的.

证　因为 G 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的，所以存在短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow G \otimes_R F_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0$，其中 F_1 是平坦的，G_1 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C \otimes_R F \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \otimes_R F \arrow[r] & C \otimes_R F_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $0 \longrightarrow H \longrightarrow X \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0$ 正合，所以 $0 \longrightarrow {G_1}^+ \longrightarrow X^+ \longrightarrow H^+ \longrightarrow 0$ 正合. 而 G_1 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的，故 G_1^+ 是 $\mathscr{G}_C$ -内射的. 又因 H^+ 是 $\mathscr{G}_C$ -内射的，从而 X^+ 是 $\mathscr{G}_C$ -内射的.

由 $0 \longrightarrow C \otimes_R F \longrightarrow C \otimes_R F_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ 的正合性可知，$0 \longrightarrow X^+ \longrightarrow (C \otimes_R F_1)^+ \longrightarrow (C \otimes_R F)^+ \longrightarrow 0$ 是正合的. 由于 $(C \otimes_R F_1)^+$ 与 $(C \otimes_R F)^+$ 都是 C -内射的，故 X^+ 的 C -内射维数不大于 1，从而 X^+ 是 C -内射的. 根据引理 2 可知，X 是 C -平坦的.

最后，考虑正合列 $0 \longrightarrow H \longrightarrow X \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0$. 因为 X 是 C -平坦的，G_1^+ 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的，所以由文献[4] 的引理 2.11 可知，H 是 $\mathscr{G}_C$ -平坦的. 证毕.

设 R 与 S 是交换环，C 是半对偶 R -模. 为了区别 R -模与 S -模，我们在记 S -模时加 $\sim$，如 $\widetilde{N}$ 表示一个 S -模. 由引理 1 可知，当 S 是满忠实 R -代数时，$C \otimes_S S$ 是半对偶 S -模. 在本文的剩余部分，记 $C \otimes_S S$ 为 $\widetilde{C}$.

设 S 是满忠实平坦 R -代数. 则有纯正合列

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow S/R \longrightarrow 0 \tag{1}$$

且 S/R 是平坦 R-模. 用函子 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_R(C, I))$ 作用正合列(1),因为 $S/R \in \mathscr{A}_C$,由文献[6]的引理2.3可知,$\mathscr{A}_C \perp \mathscr{I}_C$,所以有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S/R, \mathrm{Hom}_R(C, I)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_R(C, I)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, I) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

注意到:

(a) $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_R(C, I))$ 是 $\widetilde{C}$-内射 S-模;

(b) 短正合列(2)可裂.

对(a),由文献[5]的命题3.3可得. 对(b),根据文献[5]的命题3.1,$\mathrm{Hom}_R(S/R, \mathrm{Hom}_R(C, I))$ 是 C-内射 R-模,再由于 $\mathrm{Hom}_R(C, I) \in \mathscr{A}_C$ 且 $\mathscr{A}_C \perp \mathscr{I}_C$,故 $\mathrm{Hom}_R(C, I) \perp \mathrm{Hom}_R(S/R, \mathrm{Hom}_R(C, I))$. 从而正合列(2)可裂. 这意味着,任何一个 C-内射 R-模都是某个 $\widetilde{C}$-内射 S-模的直和项.

引理5 设 S 是满忠实平坦 R-代数. 对任意的 R-模 M,以下结论等价:

(i) 对所有的 $i > 0$ 与每个内射 R-模 I,$\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), M) = 0$;

(ii) 对所有的 $i > 0$ 与每个内射 S-模 J,$\mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, J), S \otimes_R M) = 0$.

证 注意到,对所有的 $i > 0$ 与每个 S-模 $\widetilde{X}$,都有 $\mathrm{Tor}_i^S(\widetilde{X}, S \otimes_R M) \cong \mathrm{Tor}_i^R(\widetilde{X}, M)$.

(i)⇒(ii) 对任意的内射 S-模 $\widetilde{J}$,有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, \widetilde{J}), S \otimes_R M) \cong \\
&\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, \widetilde{J}), M) \cong \\
&\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_R(C, \mathrm{Hom}_S(S, \widetilde{J})), M) \cong \\
&\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_R(C, \widetilde{J}), M)
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_R(C, \widetilde{J}), M) = 0$,故 $\mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, \widetilde{J}), S \otimes_R M) = 0$.

(ii)⇒(i) 因为每个 C-内射 R-模 $\mathrm{Hom}_R(C, I)$ 都是每个 $\widetilde{C}$-内射 S-模的直和项,所以要证 $\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), M) = 0$,只需证 $\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, J), M) = 0$ 即可. 而

$$\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, J), M) \cong \mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, J), S \otimes_R M)$$

由于 $\mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, J), S \otimes_R M) = 0$,故 $\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_S(C \otimes_R S, J), M) = 0$,从而 $\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), M) = 0$.

定理1的证明 *必要性* 根据文献[5]的命题4.12即得.

充分性 假设 $S \otimes_R M$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$-平坦 S-模. 则对任意的内射 S-模 $\widetilde{J}$,有

$$\mathrm{Tor}_{>0}^S(\mathrm{Hom}_S(\widetilde{C}, \widetilde{J}), S \otimes_R M) = 0$$

故由引理5可知,对任意的内射 R-模 I,有

$$\mathrm{Tor}_{>0}^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), M) = 0$$

根据文献[2]的引理2.11,我们还需要证明:存在正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \otimes_R F^0 \longrightarrow C \otimes_R F^1 \longrightarrow \cdots$$

使得每个 F^i 是平坦的,并且对任意的内射 R-模 I,仍 $\mathrm{Hom}_R(C, I) \otimes_R$ -正合.

因为 R 是凝聚环,所以 $\mathscr{F}_C$ 是预包络类. 故存在态射 φ: $M \longrightarrow C \otimes_R F^0$,其中 F^0 是平坦的. 又因为 $S \otimes_R M$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$-平坦的,所以 $S \otimes_R M$ 可嵌入到一个 $\widetilde{C}$-平坦模中. 而

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow S/R \longrightarrow 0$$

是纯正合的,故

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow S \otimes_R M \longrightarrow S/R \otimes_R M \longrightarrow 0$$

是正合的,从而 M 又可以嵌入到 $S \otimes_R M$ 中,因此 M 可以嵌入到 $\widetilde{C} \otimes_S \widetilde{F}$ 中. 由于

$$\widetilde{C} \otimes_S \widetilde{F} = C \otimes_R S \otimes_S \widetilde{F} = C \otimes_R \widetilde{F}$$

每个平坦 S-模是平坦 R-模,故 $C \otimes_R \widetilde{F}$ 是 C-平坦 R-模,从而 M 可以嵌入到 C-平坦 R-模中,这就证明了 φ 是单射,因此存在短正合列

$$\eta: 0 \longrightarrow M \longrightarrow C \otimes_R F^0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

首先要证明对任意的内射 R-模 I,$\mathrm{Hom}_R(C, I) \otimes \eta$ 是正合的,只需证 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, I) \otimes \eta, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 正

合. 易得

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, I)\otimes\eta, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}_R(\eta, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, I), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

因为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, I), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是 C -平坦 R -模，φ 是 C -平坦预包络，所以 $\mathrm{Hom}_R(\eta, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, I), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ 是正合的. 这就说明了 η 是 $\mathrm{Hom}_R(C, I)\otimes$ -正合的. 我们要说明 K 和 M 有同样的性质，即 $S\otimes_R K$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦 S -模. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & S\otimes_R M \arrow[r]\arrow[d] & S\otimes_R C\otimes_R F^0 \arrow[r]\arrow[d] & S\otimes_R K \arrow[r]\arrow[d, equal] & 0\\
0 \arrow[r] & \widetilde{C}\otimes_S\widetilde{F^0} \arrow[r]\arrow[d] & X \arrow[r]\arrow[d] & S\otimes_R K \arrow[r] & 0\\
& G \arrow[r, equal]\arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 S 是平坦 R -模，所以非零第一行正合. 因为 $S\otimes_R M$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦 S -模，所以非零第一列正合. 使得 $\widetilde{F}_0$ 是平坦 S -模，G 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦模. 同时注意到

$$C\otimes_R S\otimes_R F^0\cong C\otimes_R S\otimes_S S\otimes_R F^0\cong\widetilde{C}\otimes_S(S\otimes_R F^0)$$

$\widetilde{F}_0$ 根据文献[5]的命题 3.1，$S\otimes_R F^0$ 是平坦 S -模，故 $C\otimes_R S\otimes_R F^0$ 是 $\widetilde{C}$ -平坦 S -模.

考虑短正合列 $0\longrightarrow\widetilde{C}\otimes_S\widetilde{F}_0\longrightarrow X\longrightarrow S\otimes_R K\longrightarrow 0$，由引理 4 可知，要证明 $S\otimes_R K$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦的，需说明：

(i) X 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦的；

(ii) $(S\otimes_R K)^+$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -内射的.

对(i)，因为 S 是关于 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦 S -模扩张封闭的环，所以 X 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦的. 下证(ii)，将函子 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作用于上图非零第二行，有

$$0\longrightarrow(S\otimes_R K)^+\longrightarrow X^+\longrightarrow(\widetilde{C}\otimes_S\widetilde{F}_0)^+\longrightarrow 0$$

这里 X^+ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -内射 S -模，$(\widetilde{C}\otimes_S\widetilde{F}_0)^+$ 是 $\widetilde{C}$ -内射 S -模，故 $(\widetilde{C}\otimes_S\widetilde{F}_0)^+$ 也是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -内射 S -模，于是 $(S\otimes_R K)^+$ 的 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -内射维数有限. 从而要说明 $(S\otimes_R K)^+$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -内射 S -模，根据文献[13]的命题 2.12 的对偶版只需说明对任意的 $\widetilde{C}$ -内射 S -模 $\mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, \widetilde{J})$，有

$$\mathrm{Ext}_S^{\geqslant 0}(\mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, \widetilde{J}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S\otimes_R K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))=0$$

即可. 而

$$\mathrm{Ext}_S^{\geqslant 0}(\mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, \widetilde{J}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S\otimes_R K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_S^{\geqslant 0}(\mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, \widetilde{J}), S\otimes_R K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

故只需

$$\mathrm{Tor}_{>0}^S(\mathrm{Hom}_S(\widetilde{C}, \widetilde{J}), S\otimes_R K)=0$$

根据引理 5，只需

$$\mathrm{Tor}_{>0}^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), K)=0$$

用 $\mathrm{Hom}_R(C, I)\otimes$ -作用正合列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow C\otimes F^0\longrightarrow K\longrightarrow 0$$

因为 $\mathrm{Tor}_{>0}^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), M)=0$，并根据文献[6]的引理 2.3，有 $C\otimes F^0\top\mathrm{Hom}_R(C, I)$，所以

$$\mathrm{Tor}_{>0}^R(\mathrm{Hom}_R(C, I), K)=0$$

从而 $(S\otimes_R K)^+$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -内射的，则 $S\otimes_R K$ 是 $\mathscr{G}_{\widetilde{C}}$ -平坦 S -模，这就说明了 K 和 M 有同样的性质.

参考文献：

[1] FOXBY H B. Gorenstein Modules and Related Module [J]. Math Scand, 1972, 31: 267-284.
[2] GOLOD E S. *G*-Dimension and Generalized Perfect Ideal [J]. Trudy Mat Inst Steklow, 1984, 165: 62-66.
[3] VASCONCELOS W V. Divisor Theory in Module Categories [M]. Amsterdam: American Elsevier Publishing.
[4] DI Z X, LIU Z K, CHEN J L. Stability of Gorenstein Flat Categories with Respect to a Semidualizing Modules [J]. Rocky Mountain J Math, 2015, 45(6): 1839-1859.
[5] DI Z X, YANG X Y. Transfer Properties of Gorenstein Homological Dimension with Respect to a Semidualizing Module [J]. J Korean Math Sor, 2012, 49(6): 1197-1214.
[6] DI Z X, ZHANG X X, LIU Z K, et al. Relative and Tate Homology with Respect to Semidualizing Modules [J]. J Algebra Appl, 2014, 13(8): 1450058.
[7] ENOCHS E E, YASSEMI S. Foxby Equivalence and Cotorsion Theories Relative to Semidualizing Modules [J]. Math Scand, 2004, 95(1): 33-43.
[8] HOLM H, WHITE D. Foxby Equivalence Over Associative Rings [J]. J Math Kyoto Univ, 2006, 47(4): 781-808.
[9] 申婧雯，杨晓燕. 余纯 *FPn*-平坦模 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(6)：69-72.
[10] 毛海玲，杨晓燕. 左分次 *GF*-封闭环上的 Gorenstein 分次平坦模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(8)：18-22.
[11] 李倩倩，杨晓燕. *n*-强 Gorenstein AC 投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：36-40.
[12] HOLM H, JRGENSEN P. Semi-dualizing Modules and Related Gorenstein Homological Dimensions [J]. J Pure Appl Algebra, 2006, 205(2): 423-445.
[13] WHITE D. Gorenstein Projective Dimension with Respect to a Semidualizing Module [J]. J Commut Algebra, 2010, 2(1): 111-137.
[14] CHRISTENSEN L W, KÖKSAL F, LIANG L. Gorenstein Dimensions of Unbounded Complexes and Change of Base (with an Appendix by Driss Bennis) [J]. Sci China Math, 2017, 60(3): 401-420.
[15] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin, New York: De Gruyter, 2000.

Transfer Properties of Gorenstein Flat Modules with Respect to a Semidualizing Module Along Ring Homomorphisms

CAI Xiao-dong, CAO Miao, DI Zhen-xing

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let C be a semidualizing R-module over a commutative coherent ring R. In this artical, we show that if S is a faithfully flat commutative R-algebra such that the class of $C\otimes_R S$-Gorenstein flat S-modules is closed under extensions, then an R-module M is C-Gorenstein flat if and only if the S-module $S\otimes_R M$ is $C\otimes_R S$-Gorenstein flat.

Key words: semidualizing module; C-Gorenstein flat; faithfully flat R-algebra

责任编辑 廖 坤