

非线性色散 KdV 方程的精确解^①

刘冬兵, 林宗兵, 谭千蓉

攀枝花学院 数学与计算机学院, 四川 攀枝花 617000

摘要: 利用行波变换, 对非线性色散 KdV 方程进行了研究, 获得了该方程的各类精确解, 并讨论了这些解的动力学性质. 通过图像模拟, 直观地展示了部分精确解的动力学行为和动力学现象.

关键词: 行波变换; 非线性色散 KdV 方程; 精确解

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)06-0021-08

自 1834 年苏格兰工程师 Russell 发现一种称之为孤立波的非线性波以来, 人们对于非线性波的研究就进入了一个新的时代. 随着科学技术的发展和研究的深入, 科研人员发现波形在传播中是陡峭还是光滑与所研究的问题中是否存在色散现象和非线性现象有着直接的联系. 例如: 在著名的 Korteweg-de Vries(KdV) 方程

$$u_t + 6uu_x - u_{xxx} = 0$$

中, 对流项 uu_x (非线性项) 和线性色散项 u_{xxx} 就决定了孤立波的形状及其陡峭和光滑程度. 显然, 这两项的相互作用产生了完全光滑的孤波解^[1].

为了研究非线性色散在液滴图案形成中的作用, 文献[2]研究了 $K(2, 2)$ 方程

$$u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0$$

中的非线性色散与非线性对流的相互作用. 研究表明: 非线性色散与非线性对流的相互作用可以使孤波紧化, 也就是说具有紧化的孤立波没有无限翼, 这类非线性波称之为紧波(compacton wave). 类似地, 文献[3-4] 在最近的报告中采用动力系统面分支法研究了广义的 $K(2, 2)$ 方程

$$u_t + a(u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0 \quad (1)$$

的各种行波解, 其中负色散项表示收缩色散, 获得了方程(1) 更多类型的行波解, 这些解的形状有孤立尖波峰波、周期尖峰波和平滑波等. 这些解被看作非线性收缩色散与非线性对流之间相互作用而产生的结果. 关于 Camassa-Holm 方程其它方向的研究可以参看文献[5-7], 而关于 $K(2, 2)$ 方程的更多研究见文献[8-10] 及其引用文献.

值得一提的是著名的 Camassa-Holm(CH) 方程^[11]

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

① 收稿日期: 2019-01-14

基金项目: 四川省科技厅应用基础研究项目(2019YJ0683); 攀枝花市市级项目(2019ZD-R-1); 攀枝花学院科研项目(2016ZD010).

作者简介: 刘冬兵(1972—), 男, 副教授, 主要从事微分方程数值解的研究.

通信作者: 林宗兵, 副教授.

与我们要研究的 $K(2, 2)$ 方程有类似的结构, 且 CH 方程与方程(1) 均含有相同的非线性项, 但区别还是比较大. 许多研究者利用不同的方法给出了 CH 方程的各种行波解^[12-15], 却发现它们大多不是光滑解, 为了解释这些奇怪的现象, 文献[16] 作了深入研究, 获得了许多新成果, 为非线性波的研究做出了较大的贡献. 文献[16] 还给出了弱解的定义, 最终获得了 CH 方程极为丰富的行波解, 包括峰波解、孤立尖波解和紧波解等. 然而, 对一些有趣的解, 如环状形式的解、扭结形式的解和其它形式的解及其动力学现象并没有相关研究. 此外, 对解的极限行为也没有进一步研究.

为此, 本文针对以上问题, 结合上述研究方法中的一些优点, 在改进方法的基础上, 进一步研究方程(1) 在各参数条件下的行波解及其动力学现象.

1 相应于方程(1) 的二维平面动力系统及其首次积分方程

通过使用行波变换, 可将偏微分方程(1) 化简为一个可积 ODE, 并通过二维平面导出其积分方程. 作一个行波变换

$$u(x, t) = \varphi(\xi) \quad \xi = x - ct \quad (2)$$

将(2) 式代入方程(1) 得到

$$-c\varphi_{\xi} + a(\varphi^2)_{\xi} + (\varphi^2)_{\xi\xi} = 0 \quad (3)$$

其中 c 是沿 x 轴方向运动的波速. 对(3) 式积分, 可以得到

$$-c\varphi + a\varphi^2 + 2(\varphi_{\xi})^2 + 2\varphi\varphi_{\xi\xi} = g \quad (4)$$

其中 g 是积分常数. 令 $\varphi_{\xi} = \frac{d\varphi}{d\xi} = y$, 当 $\varphi \neq 0$ 时, (4) 式能被简化为一个二维系统

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = y \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{g + c\varphi - a\varphi^2 - 2y^2}{2\varphi} \quad (5)$$

但是当 $\varphi = 0$ 时, 系统(5) 并不等于(4) 式. 为了得到一个完全等价的系统, 不管(4) 式函数 φ 如何变化, 作变量替换

$$d\xi = 2\varphi d\tau \quad (6)$$

此处 τ 是参数. 在变换(6) 下, 系统(5) 化为常规系统

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 2\varphi y \quad \frac{dy}{d\tau} = g + c\varphi - a\varphi^2 - 2y^2 \quad (7)$$

显然, 系统(5) 和系统(7) 具有相同的首次积分

$$y^2 = -\frac{a}{4}\varphi^2 + \frac{1}{3}c\varphi + \frac{g}{2} + \frac{h}{\varphi^2} \quad (8)$$

其中 h 是另一个积分常数. (8) 式能被写成

$$H(\varphi, y) = \varphi^2 y^2 + \frac{a}{4}\varphi^4 - \frac{c}{3}\varphi^3 - \frac{1}{2}g\varphi^2 = h \quad (9)$$

从(7) 式和(9) 式, 我们很容易验证 $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq -\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{dy}{d\tau} \neq \frac{\partial H}{\partial \varphi}$. 因此, 系统(7) 不是哈密顿系统. 在 $H(\varphi, y) = h$ (h 为常数) 的条件下, 虽然全局能源是受能源保护的, 但是系统的动能和势能并不守恒, 这意味着方程(1) 包含许多行波解.

2 方程(1) 不同类型的精确行波解及其动力学性质

下面将研究积分常数 h, g 在 $h = g = 0, h = 0; g \neq 0, h \neq 0; g = 0, h \neq 0; g \neq 0$ 这 4 种情形下方程(1) 的精确行波解, 并讨论其动态特性.

2.1 $h = g = 0$ 时方程(1) 的精确解

此时, (8) 式可以被化简为

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a}{4}\varphi^2 + \frac{c\varphi}{3}} \tag{10}$$

当 $a > 0$ 时, 将(10) 式代入系统(5) 的第一个方程, 有

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{-\frac{a}{4}\varphi^2 + \frac{c\varphi}{3}}} = \pm d\xi \tag{11}$$

对(11) 式积分, 得到

$$\varphi = \frac{2c}{3a} \cdot \left(1 + \sin \frac{\sqrt{a}(\xi + c_1)}{2}\right) \tag{12}$$

其中 c 是常数. 因此, 将(12) 式代入 $u(x, t) = \varphi(\xi)$, 得到关于方程(1) 的一个精确行波解

$$u = \frac{2c}{3a} \cdot \left(1 + \sin \frac{\sqrt{a}(x - ct + c_1)}{2}\right) \tag{13}$$

在(13) 式中, 取 $a = 1, c = 1, c_1 = 1$, 得 $u(x, t)$ 的图形如图 1 所示.

当 $a < 0$ 时, 将(10) 式代入系统(5) 的第一个方程并进行积分, 可以得到

$$\frac{-a}{2}\varphi + \frac{c}{3} + \sqrt{-a} \cdot \sqrt{\frac{-a \cdot \varphi^2}{4} + \frac{c\varphi}{3}} = e^{\frac{\sqrt{-a}(\xi + c_1)}{2}} \tag{14}$$

其中 c_1 是常数. 于是, 将(14) 式代入 $u(x, t) = \varphi(\xi)$, 便获得方程(1) 的精确行波解

$$\frac{-a}{2}u + \frac{c}{3} + \sqrt{-a} \cdot \sqrt{\frac{-a \cdot u^2}{4} + \frac{cu}{3}} = e^{\frac{\sqrt{-a}(x - ct + c_1)}{2}} \tag{15}$$

在(15) 式中, 取 $a = -1, c = 1, c_1 = 1$, 此时 $u(x, t)$ 的图形如图 2 所示.

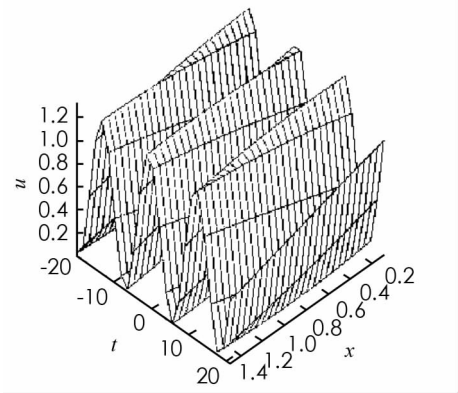


图 1 $a = 1, c = 1, c_1 = 1$ 时 $u(x, t)$ 的图形

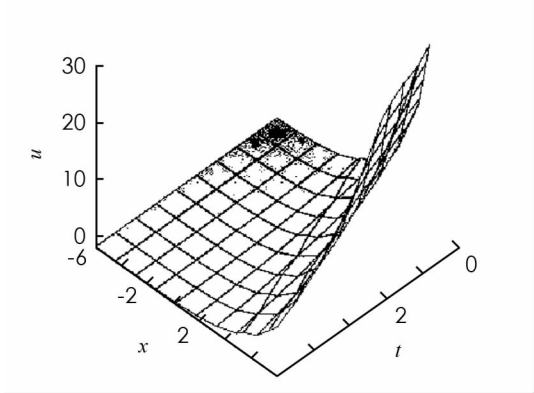


图 2 $a = -1, c = 1, c_1 = 1$ 时 $u(x, t)$ 的图形

特别地, 当 $c_1 = -\frac{c}{3}$ 时, (12) 式能被化简为

$$\varphi = -\frac{c}{3} \frac{(1 - e^{\frac{\sqrt{a}}{2}\xi})^2}{e^{\frac{\sqrt{a}}{2}\xi}} \tag{16}$$

因此, 将(16) 式代入 $u(x, t) = \varphi(\xi)$, 可以获得方程(1) 的精确行波解

$$u = -\frac{c}{3} \frac{(1 - e^{\frac{\sqrt{a}}{2}\xi})^2}{e^{\frac{\sqrt{a}}{2}\xi}} \tag{17}$$

2.2 $h = 0, g \neq 0$ 时方程(1) 的精确解

此时, (8) 式可以简化为

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a\varphi^2}{4} + \frac{c\varphi}{3} + \frac{g}{2}} \quad (18)$$

将(18)式代入系统(5)的第一个方程,可以得到

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{-\frac{a\varphi^2}{4} + \frac{c\varphi}{3} + \frac{g}{2}}} = \pm d\xi \quad (19)$$

当 $a > 0$ 时,对(19)式积分,可以得到

$$\frac{2}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{3a\varphi - 2c}{\sqrt{4c^2 + 18ag}} + c_1 = \xi \quad (20)$$

因此,将(20)式积分,代入 $u(x, t) = \varphi(\xi)$,可以获得方程(1)的精确行波解

$$u = \frac{2c}{3a} + \frac{\sqrt{4c^2 + 18ag}}{3a} \cdot \sin \frac{\sqrt{a}(x - ct - c_1)}{2} \quad (21)$$

在(15)式中,取 $a = 1, c = 2, c_1 = 1, g = 3$,此时 $u(x, t)$ 的图形如图 3 所示.

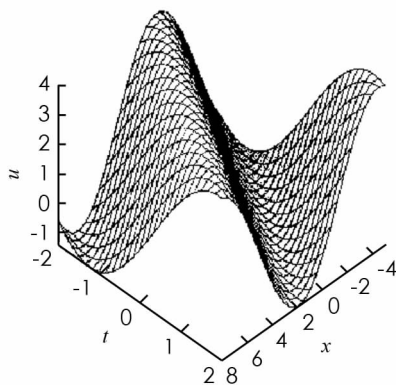


图 3 $a = 1, c = 2, c_1 = 1, g = 3$ 时 $u(x, t)$ 的图形

2.3 $h \neq 0, g = 0$ 时方程(1)的精确解

此时,(8)式可以简化为

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a\varphi^2}{4} + \frac{c\varphi}{3} + \frac{h}{\varphi^2}} \quad (22)$$

将(22)式代入系统(5)的第一个方程,可以得到

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{-\frac{a\varphi^2}{4} + \frac{c\varphi}{3} + \frac{h}{\varphi^2}}} = \pm d\xi \quad (23)$$

也就是

$$\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{-9a\varphi^4 + 12c\varphi^3 + 36h}} = \pm \frac{1}{6} d\xi \quad (24)$$

当 $a < 0$ 时,令 $\varphi = \psi + \frac{c}{3a}, h = -\frac{c^4}{108a^3}$,于是,(24)式可化简为

$$\frac{\left(\psi + \frac{c}{3a}\right) d\psi}{\sqrt{\psi(\psi^3 + p\psi + q)}} = \pm \frac{1}{2} d\xi \quad (25)$$

其中 $p = -\frac{2c^2}{3a^2}, \varphi = \psi + \frac{c}{3a}, q = -\left(\frac{2c}{3a}\right)^3$.

记 $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$,易知 $\Delta = \frac{8c^6}{729a^6} > 0$,且方程 $\psi^3 + p\psi + q = 0$ 有 3 个不同的根,分别是:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{3} \left[(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right] \frac{c}{a} \\ \psi_2 &= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} (4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \left[(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right] \right] \frac{c}{a} \\ \psi_3 &= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} (4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \left[(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right] \right] \frac{c}{a}\end{aligned}$$

于是, (25) 式可以重新写为

$$\frac{\left(\psi + \frac{c}{3a}\right)d\psi}{\sqrt{(\psi-0)(\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2)(\psi-\psi_3)}} = \pm \frac{1}{2} d\xi \quad (26)$$

对(26) 式积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{c}{3a} g_1 cn^{-1}(\cos \omega, k) + \frac{c}{3a} \frac{\sqrt{\frac{7}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}}} \left[(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right]}{\sqrt{\frac{19}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{13}{9} + \frac{19}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} + \sqrt{\frac{7}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}}}} \\ \left[cn^{-1}(\cos \omega, k) g_1 - \frac{1}{1+\alpha} \left(\Pi\left(\omega, \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}, k\right) - \alpha f_1 \right) \right] = \pm \frac{1}{2} \xi + c_1\end{aligned} \quad (27)$$

其中 c_1 是任意常数, 并且

$$\begin{aligned}g_1 &= \frac{a(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}}{c} \cdot \frac{1}{\left[(7(4+2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}} + 4((4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + 28)((4+2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}} + 28(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + 4)) \right]^{\frac{1}{4}}} \\ \alpha &= \frac{\sqrt{\frac{7}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{19}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{19}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} + \frac{13}{9}}}{\sqrt{\frac{7}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{19}{36} (4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + \frac{19}{9(4+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} + \frac{13}{9}}} \\ f_1 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2-1}{k^2+(1-k^2)\alpha^2}} \ln \frac{\sqrt{k^2+(1-k^2)\alpha^2} \operatorname{dn}(u, k) + \sqrt{\alpha^2-1} \operatorname{sn}(u, k)}{\sqrt{k^2+(1-k^2)\alpha^2} \operatorname{dn}(u, k) - \sqrt{\alpha^2-1} \operatorname{sn}(u, k)} & \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} > k^2 \\ \operatorname{sd}(u, k) & \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} = k^2 \\ \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{k^2+(1-k^2)\alpha^2}} \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{k^2+(1-k^2)\alpha^2}{1-\alpha^2}} \operatorname{sd}(u, k) \right) & \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} < k^2 \end{cases} \\ \omega &= \arccos \left[\frac{(A-B)\psi + mB - nA}{(A+B)\psi - mB - nA} \right] \quad m = \psi_1 n = 0 \\ A &= \frac{c}{6a} \sqrt{36 \left[\frac{c}{6a} \left((4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right) + \frac{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2}{3(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right]^2 + \frac{3c^2}{a^2} \left[(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right]^2} \\ B &= \frac{c}{6a} \sqrt{36 \left[\frac{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2}{3(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right]^2 + \frac{3c^2}{a^2} \left[(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{(4+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} \right]^2}\end{aligned}$$

2.4 $h \neq 0, g \neq 0$ 时方程(1) 的精确解

此时, (8) 式可以简化为

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a}{4}\varphi^2 + \frac{1}{3}c\varphi + \frac{g}{2} + \frac{h}{\varphi^2}} \quad (28)$$

将(28)式代入系统(5)的第一个方程,可以得到

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{-\frac{a}{4}\varphi^2 + \frac{1}{3}c\varphi + \frac{g}{2} + \frac{h}{\varphi^2}}} = \pm d\xi \quad (29)$$

即

$$\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{-\frac{a}{4}\varphi^4 + \frac{c}{3}\varphi^3 + \frac{g}{2}\varphi^2 + h}} = \pm d\xi \quad (30)$$

令 $\varphi = \psi + \frac{c}{3a}$, 于是(30)式被化简为

$$\frac{\left(\psi + \frac{c}{3a}\right)d\psi}{3a^2 \sqrt{-3(\psi^4 + p\psi^2 + q\psi + r)}} = \pm d\xi \quad (31)$$

其中 $p = -\frac{2c^2 + 6ag}{3a^2}$, $q = -\frac{8ac^3 + 36gca^2}{27a^4}$, $r = -\frac{c^4 + 6gac^2 + 108ha^3}{27a^4}$. 当 $q = 0$, 即 $g = -\frac{2c^2}{9a}$ 时, 有 $p = -\frac{2c^2}{9a^2}$, $r = \frac{c^4 - 324ha^3}{81a^4}$, 因此(31)式变为

$$\frac{\left(\psi + \frac{c}{3a}\right)d\psi}{\frac{1}{3} \sqrt{-243a^4\psi^4 + 54a^2c^2\psi^2 - 3c^4 + 972ha^3}} = \pm d\xi \quad (32)$$

即

$$\frac{\left(\psi + \frac{c}{3a}\right)d\psi}{\sqrt{(\psi_1 - \psi)(\psi - \psi_2)(\psi - \psi_3)(\psi - \psi_4)}} = \pm d\xi \quad (33)$$

由(33)式可以获得

$$\frac{g(\psi_1 B + \psi_2 A)}{A - B} \left[\alpha_2 \cdot cn^{-1}(\cos \varphi, k) + \frac{\alpha - \alpha_2}{1 - \alpha^2} \Pi\left(\varphi, \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}, k - \alpha f_1\right) \right] + \frac{c}{3a} \cdot g \cdot cn^{-1}(\cos \varphi, k) = \pm \xi + c_1 \quad (34)$$

其中 c_1 是任意常数, 并且

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\sqrt{c^2 + \sqrt{c^4 - c^2 + 324ha^3}}}{3a} & \psi_2 &= -\frac{\sqrt{c^2 + \sqrt{c^4 - c^2 + 324ha^3}}}{3a} \\ \psi_3 &= \frac{\sqrt{c^2 - \sqrt{c^4 - c^2 + 324ha^3}}}{3a} & \psi_4 &= -\frac{\sqrt{c^2 - \sqrt{c^4 - c^2 + 324ha^3}}}{3a} \\ A^2 &= \left(\psi_1 - \frac{\psi_3 + \psi_4}{2}\right)^2 - \frac{(\psi_3 - \psi_4)^2}{4} & B^2 &= \left(\psi_2 - \frac{\psi_3 - \psi_4}{2}\right)^2 - \frac{(\psi_3 - \psi_4)^2}{4} \\ \alpha &= \frac{A - B}{A + B} & \alpha_2 &= \frac{\psi_2 A - \psi_1 B}{\psi_2 A + \psi_1 B} & k^2 &= \frac{(\psi_1 - \psi_2)^2 - (A - B)^2}{4AB} & g &= \frac{1}{AB} \end{aligned}$$

$$\varphi = \arccos \frac{[\psi_1 - cn^{-1}(\cos \varphi, k)]B - [cn^{-1}(\cos \varphi, k) - \psi_2]A}{[\psi_1 - cn^{-1}(\cos \varphi, k)]B + [cn^{-1}(\cos \varphi, k) - \psi_2]A}$$

当 $q \neq 0$ 时, (31)式被化简为

$$\frac{\left(\psi + \frac{c}{3}\right)d\psi}{\sqrt{(\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2)(\psi - \psi_3)(\psi - \psi_4)}} = \pm \frac{1}{2} d\xi \quad (35)$$

其中 $\psi_1 > \psi_2 > \psi_3 > \psi_4$, 且满足

$$\begin{cases} l + m - k^2 = p \\ k(m - l) = q \\ lm = r \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} \psi^2 + k_0 \psi + l_0 = 0 \\ \psi^2 - k_0 \psi + m_0 = 0 \end{cases} \quad (37)$$

其中 k_0 是 (36) 式的任一根. 解 (35) 式, 可得

$$\frac{\psi_1 g_1}{\alpha^2} \cdot [(\alpha^2 - \alpha_1^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k) + \alpha_1^2 \mu] + \frac{c}{3} g_1 \cdot sn^{-1}(\sin \varphi, k) = \pm \frac{\xi}{2} + c_1 \quad (38)$$

其中 c_1 是任意常数, 并且

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\psi_1 - \psi_4}{\psi_2 - \psi_4} & \alpha_1^2 &= \frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4)}{\psi_1(\psi_2 - \psi_4)} & \varphi &= \arcsin \sqrt{\frac{(\psi_2 - \psi_4)(\psi - \psi_1)}{(\psi_1 - \psi_4)(\psi - \psi_2)}} \\ g_1 &= \frac{2}{\sqrt{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}} & k^2 &= \frac{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)}{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)} & \mu &= \sqrt{\frac{(\psi_2 - \psi_4)(\psi - \psi_1)}{(\psi_1 - \psi_4)(\psi - \psi_2)}} \end{aligned}$$

3 结 论

本文首先利用行波变换进行约简, 将方程 (1) 转化为可积 ODE, 并通过二维平面动力学推导出其第一个积分方程系统, 然后采用积分法研究了不同类型的精确行波解, 最后讨论了它们的动力学性质.

参考文献:

- [1] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [2] ROSENAU P, HYMAN M. Compactons: Solitons with Finite Wavelength [J]. Physical Review Letters, 1993, 70(5): 564-567.
- [3] XU C H, TIAN L X. The Bifurcation and Peakon for $K(2, 2)$ Equation with Osmosis Dispersion [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 40(2): 893-901.
- [4] ZHOU J B, TIAN L X. A Type of Bounded Traveling Wave Solutions for the Fornberg-Whitham Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 346: 255-261.
- [5] 常 红, 丁丹平. Camassa-Holm 方程的 Crank-Nicolson 守恒差分格式 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2019, 37(5): 85-90.
- [6] 华晓玲, 李扬荣. 随机耗散 Camassa-Holm 方程随机吸引子的上半连续性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(2): 51-57.
- [7] 郭战伟, 丁丹平. 弱耗散的广义 Camassa-Holm 方程整体吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(1): 62-65.
- [8] TRIKI H, WAZWAZ A M. Dark Solitons for a Combined Potential KdV and Schwarzian KdV Equations with T-Dependent Coefficients and Forcing Term [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(21): 8846-8851.
- [9] TRIKI H, WAZWAZ A M. Sub-ODE Method and Soliton Solutions for the Variable-Coefficient MKdV Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 214(2): 370-373.
- [10] BISWAS A. 1-Soliton Solution of (1+2)-Dimensional Nonlinear Schrödinger's Equation in Dual-Power Law Media [J]. Physics Letters A, 2008, 372: 5941-5943.
- [11] CAMASSA R, HOLM D D. An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons [J]. Physical Review Letters,

1993, 71(11): 1661-1664.

[12] LIU Z R, QIAN T F. Peakons of the Camassa-Holm Equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2002, 26(3): 473-480.

[13] LIU Z R, WANG R Q, JING Z J. Peaked Wave Solutions of Camassa-Holm Equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(1): 77-92.

[14] PARKES E J, VAKHNENKO V O. Explicit Solutions of the Camassa-Holm Equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26(5): 1309-1316.

[15] PARKER A. Cusped Solitons of the Camassa-Holm Equation. I. Cuspon Solitary Wave and Antipeakon Limit [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 34(3): 730-739.

[16] LENELLS J. Traveling Wave Solutions of the Camassa-Holm Equation [J]. Journal of Differential Equations, 2005, 217(2): 393-430.

On Exact Solution to Nonlinear Dispersion KdV Equation

LIU Dong-bing, LIN Zong-bing, TAN Qian-rong

Department of Mathematics and Computer, Panzhihua University, Panzhihua Sichuan 617000, China

Abstract: In this paper, the nonlinear dispersion KdV equation has been studied by using the traveling wave transformation. We obtained some kinds of solutions to this equation and discussed the dynamic properties of these solutions. Through the image simulating, the dynamic behaviors and dynamic phenomena of some exact solutions are shown visually.

Key words: travelling-wave transform; nonlinear dispersion KdV equation; exact solution

责任编辑 廖 坤