第 45 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 6 月
Vol. 45　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.006

Lax-Milgram 定理的一个推广及其应用①

张馨予[1]，　吕　颖[2]

1. 四川大学 数学学院，成都 610064；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：把经典的 Lax-Milgram 定理中的双线性条件推广到仅对某一个变量线性，在适当的弱下半连续强制条件下，证明了变分泛函 $l(x)=\dfrac{1}{p}a(x,x)-b(x)$ 存在唯一解，并将其应用于研究 p-Laplace 算子边值问题解的存在唯一性.

关　键　词：Fréchet-Riesz 表现定理；Lax-Milgram 定理；弱下半连续；强制性；p-Laplace 算子

中图分类号：O177.1　　　**文献标志码：A**　　　**文章编号：**1000-5471(2020)06-0029-04

1907 年，法国数学家 Fréchet 证明了：对于定义在平方可积函数空间 L^2 上的每一个连续(有界)线性泛函 $U(f)$，存在 L^2 中唯一的 $u(x)$，使得对 L^2 中的每一个 f 都成立

$$U(f)=\int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x$$

1909 年，匈牙利数学家 F. Riesz 把上述结果推广到 L^p 空间($p\geqslant 1$). 1927 年，匈牙利数学家 von Neumann 引进了抽象的 Hilbert 公理化定义，自然地，就有相应的一般 Hilbert 空间上连续线性泛函的表示定理[1-3]. 文献[4]推广了 Fréchet-Riesz 表示定理. 文献[5]推广了 Lax-Milgram 定理，证明了变分不等式中的基本定理. 文献[6-7]各自独立地推广了 Lax-Milgram 定理，实际上，他们给出的两种不同形式的条件是等价的. 关于 Lax-Milgram 定理的最新应用可见文献[8-12]. 特别地，文献[8]试图给出经典 Lax-Milgram 定理和 Stampacchia 定理的非线性观点，但是假设了一些很难验证的条件，即使退化到双线性的情况，也得不到最小值点的唯一性，因为证明过程中没有充分利用双线性性质和强制性.

以上几个关于 Fréchet-Riesz 表示定理的推广都涉及双线性连续泛函，一个自然的问题是：当定义在 Hilbert 空间或者更一般的 Banach 空间的乘积空间上的二元泛函若仅对某一变量线性，而不是双线性时，能得到什么结果？我们研究 p-Laplace 算子相应的 Dirichlet 零边值问题

$$\begin{cases}-\Delta_p\mu(x)=f(x) & x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n\\ \mu|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

其中 $\Delta_p:\mu(x)\longrightarrow\Delta_p\mu=\mathrm{div}(|\nabla\mu|^{p-2}\nabla\mu)$，自然地会出现

$$a(\mu,\nu)=\int_\Omega(-\Delta_p\mu)\cdot\nu\mathrm{d}x\qquad\forall\,\mu,\nu\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

我们观察到：当 $p>1$ 但 $p\neq 2$ 时，a 对 μ 不是线性的，但对 ν 是线性的.

本文先证明一个抽象的定理，然后应用于上述具体的问题.

---

① 收稿日期：2020-02-11
基金项目：国家自然科学基金项目(11601438).
作者简介：张馨予(1998－)，女，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：吕　颖，教授.

定理 1 设 X 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的自反 Banach 空间，考虑二元映射 $a(x,y)$：$X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$. 假设 b：$X\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续线性泛函；a 对第二个变量 y 是线性的，$a(x,x)$ 在 X 上是弱下半连续的，即：

(i) $\forall x\in X$，若 $\{x_n\}\subset X$，$x_n\xrightarrow{w}x$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}a(x_n,x_n)\geqslant a(x,x)$$

(ii) 存在 $c,d>0$，使得 $\forall x\in X$，有

$$c\|x\|^p\leqslant a(x,x)\leqslant d\|x\|^p$$

则定义在 X 上的泛函

$$I(x)=\frac{1}{p}a(x,x)-b(x)$$

在 X 上达到下确界，即存在 $\tilde{x}\in X$，使得 $I(\tilde{x})=\inf\limits_{x\in X}\{I(x)\}=e$，且 $\tilde{x}$ 满足方程

$$\frac{1}{p}\langle a_x(\tilde{x},\tilde{x}),\omega\rangle+\frac{1}{p}a(\tilde{x},\omega)-b(\omega)=0\qquad\forall\omega\in X$$

进一步，如果 $a(x,x)$ 是严格凸泛函，则最小值点 $\tilde{x}$ 是唯一的.

证 步骤 1 证明 $I(x)$ 在 X 上弱下半连续. 由于 $b(x)$ 是 X 上的连续线性泛函，故 $b\in X^*$. 又由弱收敛的定义知，若 $x_n\xrightarrow{w}x$，则 $\forall f\in X^*$，有 $f(x_n)\to f(x)$. 自然地有 $b(x_n)\to b(x)$，故 b 是弱连续的. 因此 b 既弱下半连续又弱上半连续，因此 $(-b)$ 弱下半连续. 又已知 $a(x,x)$ 在 X 上弱下半连续，故 $I(x)=\frac{1}{p}a(x,x)-b(x)$ 在 X 上是弱下半连续的.

步骤 2 证明 $I(x)$ 在 X 上是强制的. 事实上，由(ii)知

$$I(x)=\frac{1}{p}a(x,x)-b(x)\geqslant\frac{1}{p}c\|x\|^p-\|b\|\|x\|\to+\infty\qquad\|x\|\to+\infty$$

步骤 3 证明 $-\infty<e=\inf\{I(x):x\in X\}<+\infty$. 事实上，由步骤 2 中已证明的 $I(x)$ 的强制性知，存在常数 $M>0$，使当 $\|x\|\geqslant M$ 时，有 $I(x)\geqslant 1$. 又因当 $\|x\|\leqslant M$ 时成立

$$I(x)\geqslant\frac{1}{p}c\|x\|^p-\|b\|\|x\|\geqslant-\|b\|\cdot M$$

故 $e\geqslant-\|b\|\cdot M>-\infty$. 又由已知假设 $a(x,x)\leqslant d\|x\|^p$ 知

$$I(x)\leqslant\frac{1}{p}d\|x\|^p+\|b\|\|x\|\qquad\forall x\in X$$

故 $I(x)\not\equiv+\infty$，$e<+\infty$.

步骤 4 由 Tonelli 定理[3] 知，$I(x)$ 在 X 上存在最小值点，记为 $\tilde{x}$. 令 $\varphi(\varepsilon)=I(\tilde{x}+\varepsilon\omega)$，$\varepsilon>0$，$\omega\in X$. 因为 $\tilde{x}$ 最小化 $I(x)$，故 $\forall\varepsilon>0$，有 $\varphi(\varepsilon)\geqslant\varphi(0)$，故有一阶必要条件 $\varphi'(0)=0$. 下面具体计算 $\varphi'(0)$. 注意到

$$\varphi(\varepsilon)=I(\tilde{x}+\varepsilon\omega)=\frac{1}{p}a(\tilde{x}+\varepsilon\omega,\tilde{x}+\varepsilon\omega)-b(\tilde{x}+\varepsilon\omega)=$$

$$\frac{1}{p}a(\tilde{x}+\varepsilon\omega,\tilde{x})+\frac{\varepsilon}{p}a(\tilde{x}+\varepsilon\omega,\omega)-b(\tilde{x})-\varepsilon b(\omega)$$

对 $\varphi(\varepsilon)$ 关于 ε 求导，有

$$\varphi'(\varepsilon)=\frac{1}{p}\langle a_x(\tilde{x}+\varepsilon\omega,\tilde{x}),\omega\rangle+\frac{1}{p}a(\tilde{x}+\varepsilon\omega,\omega)+\frac{\varepsilon}{p}\langle a_x(\tilde{x}+\varepsilon\omega,\omega),\omega\rangle-b(\omega)$$

由此即得 $\tilde{x}$ 满足的方程.

步骤 5 若 $a(x,x)$ 在 X 上是严格凸的，下面进一步证明最小值点是唯一的. 设 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ 是最小值点，由 $a(x,x)$ 严格凸，$b(x)$ 线性，故 b 也是凸的，$I(x)$ 在 X 上是严格凸的，则

$$e \leqslant I\left(\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} I(\tilde{x}_1)+\frac{1}{2} I(\tilde{x}_2)=e$$

故 $I\left(\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}\right)=e$，$\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}$ 也是最小值点．进一步由 I 的表示式有

$$a\left(\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}, \frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}\right)=\frac{1}{2} a(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1)+\frac{1}{2} a(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2) \tag{1}$$

由于 a 是严格凸的，(1) 式成立当且仅当 $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2$．

定理 1 的应用

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集，$x=(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$，$1<p<+\infty$，考虑 p-Laplace 算子

$$\Delta_p: \mu(x) \longrightarrow \Delta_p \mu=\operatorname{div}(|\nabla \mu|^{p-2} \nabla \mu)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla \mu|^{p-2} \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)$$

给定 $f \in L^q(\Omega)$，其中 q 是 p 的共轭指数，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．考虑以下的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{cases}-\Delta_p \mu(x)=f(x) & x \in \Omega \\ \mu|_{\partial \Omega}=0\end{cases} \tag{2}$$

我们在上述假设下利用定理 1 来证明问题(2) 有唯一解．

定义 Sobolev 空间

$$W_0^{1, p}(\Omega)=\{\mu \in L^p(\Omega): D\mu \in L^p(\Omega), \mu|_{\partial \Omega}=0\}$$

作为 $W^{1, p}(\Omega)$ 的子空间，$W_0^{1, p}(\Omega)$ 的标准范数是 $\|\mu\|_{W_0^{1, p}(\Omega)}=\|\mu\|_{L^{p}}+\|D\mu\|_{L^p}$．由 Poincaré-Friedrics 不等式[3] 可知，$\|D\mu\|_{L^p}$ 是 $\|\mu\|_{W_0^{1, p}(\Omega)}$ 的等价范数．设 $X=W_0^{1, p}(\Omega)$，则由 $1<p<+\infty$，故 $W_0^{1, p}(\Omega)$ 是自反的 Banach 空间．$\forall\, \mu, \nu \in W_0^{1, p}(\Omega)$，定义

$$a(\mu, \nu)=\int_{\Omega}(-\Delta_p \mu) \cdot \nu \mathrm{d} x \qquad b(\mu)=\int_{\Omega} f(x) \mu(x) \mathrm{d} x$$

下面用散度定理(或分部积分公式) 可得

$$a(\mu, \nu)=\int_{\Omega}(|\nabla \mu|^{p-2} \nabla \mu) \cdot \nabla \nu \mathrm{d} x$$

因为 $p>1$，且 $a(\mu, \mu)=\int_{\Omega}|\nabla \mu|^p \mathrm{d} x=\|\mu\|_{W_0^{1, p}(\Omega)}^p$ 是弱下半连续严格凸泛函，而 $b(\mu)$ 是线性连续泛函，由定理 1 知，对定义在 $W_0^{1, p}(\Omega)$ 上的泛函 $I(\mu)=\frac{1}{p} a(\mu, \mu)-b(\mu)$，存在唯一的 $\tilde{\mu} \in W_0^{1, p}(\Omega)$，使得 $I(\tilde{\mu})=\inf\{I(\mu): \mu \in W_0^{1, p}(\Omega)\}$，且 $\tilde{\mu}$ 满足

$$\frac{1}{p}\langle a_\mu(\tilde{\mu}, \tilde{\mu}), \nu\rangle+\frac{1}{p} a(\tilde{\mu}, \nu)-b(\nu)=0 \qquad \forall\, \nu \in W_0^{1, p}(\Omega)$$

注意到 $\langle a_\mu(\tilde{\mu}, \tilde{\mu}), \nu\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \varepsilon} a(\tilde{\mu}+\varepsilon \nu, \tilde{\mu})|_{\varepsilon=0}$，令 $g(\varepsilon)=a(\tilde{\mu}+\varepsilon \nu, \tilde{\mu})$，则有

$$g'(\varepsilon)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \varepsilon} \int_{\Omega}(|\nabla(\tilde{\mu}+\varepsilon \nu)|^{p-2} \cdot \nabla(\tilde{\mu}+\varepsilon \nu)) \nabla \tilde{\mu} \,\mathrm{d} x=$$

$$(p-2) \int_{\Omega}|\nabla(\tilde{\mu}+\varepsilon \nu)|^{p-2} \nabla \nu \cdot \nabla \tilde{\mu} \mathrm{d} x+\int_{\Omega}|\nabla(\tilde{\mu}+\varepsilon \nu)|^{p-2} \nabla \nu \cdot \nabla \tilde{\mu} \,\mathrm{d} x$$

则 $g'(0)=(p-1) \int_{\Omega}|\nabla \tilde{\mu}|^{p-2} \nabla \tilde{\mu} \cdot \nabla \nu \mathrm{d} x$．又因 $a(\tilde{\mu}, \nu)=\int_{\Omega}|\nabla \tilde{\mu}|^{p-2} \nabla \tilde{\mu} \cdot \nabla \nu \mathrm{d} x$，故 $\frac{1}{p}\langle a_\mu(\tilde{\mu}, \tilde{\mu}), \nu\rangle+\frac{1}{p} a(\tilde{\mu}, \nu)-b(\nu)=0$，即

$$\int_{\Omega}|\nabla \tilde{\mu}|^{p-2} \nabla \tilde{\mu} \cdot \nabla \nu \mathrm{d} x-\int_{\Omega} f(x) \cdot \nu \,\mathrm{d} x=0$$

由散度定理可得

$$\int_{\Omega}[-\operatorname{div}(|\nabla\tilde{\mu}|^{p-2}\nabla\tilde{\mu})-f(x)]\cdot\nu\,\mathrm{d}x=0$$

由 Reymond 变分基本引理[3] 有

$$-\operatorname{div}(|\nabla\tilde{\mu}|^{p-2}\nabla\tilde{\mu})-f(x)=0$$

参考文献:

[1] 莫里斯·克莱因,著. 古今数学思想一第四册 [M]. 邓东皋,张恭庆,译. 上海:上海科学技术出版社,2002:160-183.

[2] 江泽坚,孙善利. 泛函分析 [M]. 北京:高等教育出版社,2005:58-70.

[3] 张世清. 泛函分析及其应用 [M]. 北京:科学出版社,2018:21-25.

[4] LAX P D, MILGRAM A N. Parabolic Equations [M]//Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. (AM-33). Princeton University Press, 1954: 167-190.

[5] STAMPACCHIA G. Formes Bilinéaires Coercitives Sur Les Ensembles Convexes [J]. C R Acad Sci Paris, 1964, 258: 4413-4416.

[6] BABUŠKA I. Error-Bounds for Finite Element Method [J]. Numer Math, 1971, 16(4): 322-333.

[7] BREZZI F. On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers [J]. Revue Francaise Automatique, Informatiqe, Recherche Operationnelle Anal Numer, 1974, 8(R2): 129-151.

[8] DUC D M, LOC N H, PHI L L. Nonlinear Versions of Stampacchia and Lax-Milgram Theorems and Applications to p-Laplace Equations [J]. Nonlinear Anal, 2008, 68(4): 925-931.

[9] DHARA R N. Existence and Uniqueness of the Solution of Linear Degenerate PDEs in Weighted Sobolev Space with Nonhomogeneous Boundary Condition [J]. Math Methods Appl Sci, 2008, 41(2): 544-558.

[10] DANIEL R, SIMEON R. Fixed Points of Polarity Type Operators [J]. J Math Anal Appl, 2018, 467(2): 1208-1232.

[11] CARUSO F, CEPARANO M C, MORGAN J. Uniqueness of Nash Equilibrium in Continuous Two-Player Weighted Potential Games [J]. J Math Anal Appl, 2018, 459(2): 1208-1221.

[12] COURTADE T, FATHI M, PANANJADY A. Existence of Stein Kernels Under a Spectral Gap, and Discrepancy Bounds [J]. Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat, 2019, 55(2): 777-790.

A Generalization and Application of Lax-Milgram Theorem

ZHANG Xin-yu[1], LYU Ying[2]

1. *School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;*
2. *School of Mathematics and statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

Abstract: In this paper, the bilinear functional condition required in the classical Lax-Milgram theorem has been generalized to be linear with only one argument. Under the appropriate weak lower semi-continuous constraint, we prove that the variational functional $l(x)=\frac{1}{p}a(x, x)-b(x)$ has a unique solution and apply it to the existence and uniqueness of the solutions of the p-Laplace boundary value problem.

Key words: Fréchet-Riesz representation theorem; Lax-Milgram theorem; weakly lower semicontinuous; coerciveness; p-Laplace operator

责任编辑 廖 坤