第 45 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 6 月
Vol. 45 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.007

具有平行 Simon 3-形式的局部强凸相对球①

李 明， 龚妍廿

重庆理工大学 数学科学研究中心，重庆 400054

摘要：仿射微分几何中的一类重要问题是分类具有平行 3-形式的超曲面. 超曲面的 Simon 3-形式是独立于仿射法化的几何量，是 3-形式的无迹部分. 运用相对微分几何的基本方程，选取局部强凸仿射超曲面的特殊幺正标架，研究了具有平行 Simon 3-形式的局部强凸相对球的 3-形式沿最大值方向的特征值分布以及相应的特征空间分解. 证明了：具有平行 Simon 3-形式的局部强凸相对球要么为二次超曲面，要么具有平行的 3-形式. 该结果推广了中心仿射法化情形下的相关工作.

关 键 词：强凸相对球；3-形式；Simon 3-形式；Techebychev 向量场

中图分类号：O186.1 **文献标志码：A** **文章编号：**1000-5471(2020)06-0033-06

相对微分几何是关于仿射空间中超曲面的一种理论，包含等积几何和中心仿射几何为其特例. 设 $x: M \longrightarrow A$ 是从 n 维连通定向流形 M 到 $n+1$ 维仿射空间 A 的局部强凸浸入. 设 $\{Y, y\}$ 是 $x(M)$ 的相对法化. 3-形式 C 是最重要的几何不变量之一. Simon 3-形式 $\widetilde{C}$ 定义为 3-形式 C 的无迹部分：

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{V})\boldsymbol{V} = C(\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{V} - \frac{n}{n+2}[h(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})\boldsymbol{T} + h(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{T})\boldsymbol{V} + h(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{T})\boldsymbol{U}]$$

其中 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ 是 M 上的向量场，h 是由相对法化诱导的黎曼度量，$\boldsymbol{T}$ 是 Tchebychev 向量场.

Simon 3-形式 $\widetilde{C}$ 与相对法化的选择无关. M 的 Simon 3-形式为 0 当且仅当 M 为二次曲面. 关于 3-形式和 Simon 3-形式的基本性质及仿射微分几何的基本内容，可参考文献[1-3].

许多作者对具有平行 3-形式(即满足 $\nabla^h C = 0$)的等积仿射超曲面进行了深入研究[4-6]. 本文所指的平行均指对于 h 的 Levi-Civita 联络 ∇^h 平行. 对应于诱导联络等其它联络的平行性，可参考文献[7-9].

最近，文献[10-11]分类了具有平行 3-形式的局部强凸中心仿射超曲面. 文献[12]给出了具有平行 Simon 3-形式的二维非退化中心仿射曲面的分类. 文献[13]给出了具有平行 Simon 3-形式局部强凸中心仿射超曲面的分类. 本文对于相对球，得到以下定理：

定理 1 设 M 是关于给定相对法化的局部强凸相对球，即仿射形状算子 $S = c\mathrm{id}$，其中 c 为常数. 设 ∇^h 是诱导黎曼度量 h 的 Levi-Civita 联络. 如果 M 的 Simon 3-形式是平行的 $\nabla^h \widetilde{C} = 0$，那么 M 具有平行的 3-形式 $\nabla^h C = 0$，或者 M 为二次曲面.

在中心仿射法化的情形下，任何超曲面都是相对球，因此定理 1 是文献[13]部分结果的推广. 本文所使用的方法实际上源于文献[14].

本文约定以下指标的范围：

$$1 \leqslant i,j,k \leqslant n \qquad 2 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant n \qquad 2 \leqslant a,b,c \leqslant r+1 \qquad r+2 \leqslant A,B \leqslant n$$

设 h 是一个黎曼度量，∇ 和 ∇^* 是无挠仿射联络. 如果三元组 $\{\nabla, h, \nabla^*\}$ 满足

① 收稿日期：2019-12-29
基金项目：国家自然科学基金项目(11871126).
作者简介：李 明(1981-)，男，副教授，主要从事微分几何学的研究.

$$\mathrm{d}h(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = h(\nabla \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + h(\boldsymbol{v}_1, \nabla^* \boldsymbol{v}_2) \tag{1}$$

那么$\{\nabla, h, \nabla^*\}$称作共轭联络. 对于共轭联络$\{\nabla, h, \nabla^*\}$，可以定义

$$C = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^*) \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(TM))$$

由(1)式可知，(0, 3)-型$\hat{C} = h \circ C$是完全对称的，称作$\{\nabla, h, \nabla^*\}$的3-形式. 利用黎曼度量h可将同态C与3-形式$\hat{C}$等同.

以下关于3-形式的引理多次出现在子流形几何中[4, 14]，因为其具有一般性，所以我们将其总结成共轭联络的一个性质：

引理1[4,14] 给定共轭联络$\{\nabla, h, \nabla^*\}$及其诱导的3-形式$\hat{C}$. 对于任意$p \in M$，S_pM表示T_pM上关于度量h的单位球. 定义函数f：$S_pM \longrightarrow \mathbb{R}$为

$$f(\boldsymbol{v}) = \hat{C}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = h(C(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in S_pM$$

那么存在T_pM的幺正标架场$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$，使得：

(i) $\boldsymbol{e}_1 \in S_pM$是$f$在$S_pM$上达到最大值的点；

(ii) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是算子$C(\boldsymbol{e}_1)$的特征向量，即$C(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$，其中$\lambda_1 = f(\boldsymbol{e}_1) = \max\limits_{\boldsymbol{v} \in S_pM} f(\boldsymbol{v})$，如果记$C(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_i = C_{1i}^j \boldsymbol{e}_j$，则

$$C_{ij}^1 = C_{j1}^i = C_{1i}^j = \lambda_i \delta_{ij} \tag{2}$$

(iii) $\lambda_1 \geqslant 2\lambda_\alpha$，对于任意的$\alpha \in \{2, 3, \cdots, n\}$，如果$\lambda_1 = 2\lambda_\alpha$，那么$f(\boldsymbol{e}_\alpha) = 0$.

对于给定的局部强凸仿射超曲面M，通过逐点利用引理1，可以定义局部幺正标架场$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$. 本文将使用这种特殊选择的标架场.

引理2 设$x(M)$是具有给定相对法化的局部强凸相对球. 如果$x(M)$的Simon 3-形式$\widetilde{C}$是平行的$\nabla^h \widetilde{C} = 0$，那么

$$C_{ij,l}^k = \mu(\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ki}) \tag{3}$$

其中

$$C_{ij}^k = h(C(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) \qquad C_{ij,l}^k = h((\nabla_{\boldsymbol{e}_l}^h C)(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$$

$$\mu = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{T}_{,i}^i \qquad \boldsymbol{T}^i = h(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{e}_i) \qquad \boldsymbol{T}_{,j}^i = h(\nabla_{\boldsymbol{e}_j}^h \boldsymbol{T}, \boldsymbol{e}_i)$$

因此3-形式C在满足$\mu = 0$的M的子集上是平行的. 进一步，对于$\alpha, \beta \in \{2, \cdots, n\}$和$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，有

$$\boldsymbol{e}_\alpha(\mu) = 0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{e}_1(\mu) = (2\lambda_\alpha - \lambda_1)(\lambda_\alpha^2 - \lambda_1\lambda_\alpha + c) \tag{5}$$

且

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(2\lambda_k - \lambda_1)C_{\alpha\beta}^k = 0 \tag{6}$$

证 如果M是具有平行Simon 3-形式$\nabla^h \widetilde{C} = 0$的相对球，那么根据文献[15]的性质2.3，可知$\nabla^h T = \lambda \mathrm{id}$. 因此

$$C_{ij,l}^k = \frac{n}{n+2}(T_{,l}^k \delta_{ij} + T_{,l}^i \delta_{jk} + T_{,l}^j \delta_{ki}) = \frac{n\lambda}{n+2}(\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ki})$$

由μ的定义，很显然(3)式成立.

取(3)式的协变导数，可得

$$C_{ij,lp}^k = \boldsymbol{e}_p(\mu)(\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ki}) \tag{7}$$

在(7)式中交换l和p，并作差，得到

$$C_{ij,lp}^k - C_{ij,pl}^k = \boldsymbol{e}_p(\mu)(\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ki}) - \boldsymbol{e}_l(\mu)(\delta_{kp}\delta_{ij} + \delta_{ip}\delta_{jk} + \delta_{jp}\delta_{ki}) \tag{8}$$

但是Ricci恒等式蕴含着

$$C^k_{ij,lp}-C^k_{ij,pl}=C^k_{tj}R^t_{ilp}+C^k_{it}R^t_{jlp}-C^t_{ij}R^k_{tlp}\tag{9}$$

其中 R^j_{ikl} 是仿射度量 h 的曲率张量 $\boldsymbol{R}^h$ 在适当标架场下的系数，即 $\boldsymbol{R}^h(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l)\boldsymbol{e}_i=R^j_{ikl}\boldsymbol{e}_j$. 那么从(8)和(9)式，我们有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_p(\mu)(\delta_{kl}\delta_{ij}+\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{jl}\delta_{ki})-\boldsymbol{e}_l(\mu)(\delta_{kp}\delta_{ij}+\delta_{ip}\delta_{jk}+\delta_{jp}\delta_{ki})=\\&C^k_{tj}R^t_{ilp}+C^k_{it}R^t_{jlp}-C^t_{ij}R^k_{tlp}\end{aligned}\tag{10}$$

$x(M)$ 具有可积性条件，见文献[15] 中的(1.46) 式，该等式在适当标架场下可表示为

$$R^j_{ikl}=-c(\delta_{ki}\delta_{jl}-\delta_{li}\delta_{jk})+(C^t_{ki}C^j_{tl}-C^t_{li}C^j_{tk})\tag{11}$$

将(11) 式代入(10) 式，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_p(\mu)(\delta_{kl}\delta_{ij}+\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{jl}\delta_{ki})-\boldsymbol{e}_l(\mu)(\delta_{kp}\delta_{ij}+\delta_{ip}\delta_{jk}+\delta_{jp}\delta_{ki})=\\&-c(C^k_{pj}\delta_{li}-C^k_{lj}\delta_{pi}+C^k_{ip}\delta_{lj}-C^k_{il}\delta_{pj}-C^l_{ij}\delta_{kp}+C^p_{ij}\delta_{kl})+\\&C^k_{tj}(C^s_{li}C^t_{sp}-C^s_{pi}C^t_{sl})+C^k_{it}(C^s_{lj}C^t_{sp}-C^s_{pj}C^t_{sl})-C^t_{ij}(C^s_{lt}C^k_{sp}-C^s_{pt}C^k_{sl})\end{aligned}\tag{12}$$

在(12) 式中选择 $i=j=p=1$，$l=\alpha\geqslant 2$，且运用(2) 式，有

$$\boldsymbol{e}_1(\mu)\delta_{k\alpha}-3\boldsymbol{e}_\alpha(\mu)\delta_{k1}=c(2\lambda_\alpha-\lambda_1)\delta_{k\alpha}+(2\lambda^3_\alpha-3\lambda_1\lambda^2_\alpha+\lambda^2_1\lambda_\alpha)\delta_{k\alpha}\tag{13}$$

在(13) 式中令 $k=1$，得到(4) 式. 在(13) 式中令 $k=l=\alpha\geqslant 2$，可得(5) 式. 最后，在(12) 式中令 $i=j=1$，$l=\alpha\geqslant 2$，$p=\beta\geqslant 2$，$\alpha\neq\beta$，根据(4) 式，可知(6) 式成立.

引理 3　在引理 2 的假设下，有下面的结论：

(i) 对于任意 $\alpha\in\{2,\cdots,n\}$，如果 $\lambda^2_\alpha-\lambda_1\lambda_\alpha+c\neq 0$，则

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})=0\qquad\forall\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha)\tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha)$ 是 $C(e_1)$ 关于特征值 λ_α 的特征空间；

(ii) 对于任意 $\alpha,\beta\in\{2,\cdots,n\}$，如果 $\lambda_\alpha\neq\lambda_\beta$ 且 $\lambda_1-2\lambda_\alpha\neq 0$，则

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})=0\qquad\forall\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha),\ \forall\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\beta)\tag{15}$$

(iii) 如果 μ 不是常数，则

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})=0\qquad\forall\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in(\boldsymbol{V}(\lambda_1))^\perp\tag{16}$$

证　(i) 在(12) 式中选择 $p=k=1$，$i=j=l=\alpha\in\{2,\cdots,n\}$，可得

$$C^\alpha_{\alpha\alpha}(\lambda^2_\alpha-\lambda_1\lambda_\alpha+c)=0$$

对于某个 $\alpha\in\{2,\cdots,n\}$，如果 $\lambda^2_\alpha-\lambda_1\lambda_\alpha+c\neq 0$，则

$$f(\boldsymbol{e}_\alpha)=h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\alpha)=C^\alpha_{\alpha\alpha}=0$$

由此可知

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})=0\qquad\forall\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha)\tag{17}$$

对 $\forall\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha)$，易知

$$\begin{aligned}&h(C(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}),\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})=\\&h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})+3h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})+3h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})+h(C(\boldsymbol{V})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})\end{aligned}\tag{18}$$

由(17) 和(18) 式，可得

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})+h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})=0\tag{19}$$

在(19) 式中将 $\boldsymbol{V}$ 变成 $-\boldsymbol{V}$，可知

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V})+h(C(\boldsymbol{U})(-\boldsymbol{V}),-\boldsymbol{V})=-h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})+h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})=0\tag{20}$$

将(19) 和(20) 式作和，得到

$$h(C(\boldsymbol{U})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})=0\qquad\forall\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha)\tag{21}$$

利用(17),(21) 式，且考虑 $h(C(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}),\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})$ 的展开式，其中 $\forall\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{V}(\lambda_\alpha)$，我们最终可得(14) 式.

(ii) 对于任意 $\alpha,\beta\in\{2,\cdots,n\}$，如果 $\lambda_1-2\lambda_\alpha\neq 0$ 且 $\lambda_\alpha\neq\lambda_\beta$，那么(6) 式蕴含(17) 式.

(iii) 如果 μ 不是常数，根据(5) 式有

$$(\lambda_1-2\lambda_\alpha)(\lambda^2_\alpha-\lambda_1\lambda_\alpha+c)\neq 0\qquad\alpha\in\{2,\cdots,n\}$$

那么(6)式蕴含

$$h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\beta,\ \boldsymbol{e}_\gamma) = C_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \tag{22}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma \in \{2,\cdots,n\}$，且 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$. 结合(14),(15)以及(22)式，得知(16)式成立.

定理1的证明 在(3)式中选择合适的指标，我们有

$$\begin{aligned} C_{11,k}^1 = C_{11,1}^k = 3\mu\delta_{1k} \qquad C_{11,\alpha}^k = C_{11,k}^\alpha = \mu\delta_{\alpha k} \\ C_{\alpha\alpha,k}^1 = C_{\alpha\alpha,1}^k = \mu\delta_{1k} \qquad C_{\alpha\alpha,k}^\alpha = C_{\alpha\alpha,\alpha}^k = 3\mu\delta_{\alpha k} \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\alpha \in \{2,\cdots,n\}$，且 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$. 根据(23)式和引理1，可得

$$\begin{aligned} 3\mu\delta_{1k} = C_{11,k}^1 = h(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}^h(C(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1),\ \boldsymbol{e}_1) - 2h(C(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1,\nabla_{\boldsymbol{e}_k}^h\boldsymbol{e}_1) = \\ h(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}^h(\lambda_1\boldsymbol{e}_1),\ \boldsymbol{e}_1) - 2h(\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\nabla_{\boldsymbol{e}_k}^h\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_k(\lambda_1) \end{aligned} \tag{24}$$

类似地计算可得

$$\mu\delta_{k\alpha} = C_{11,k}^\alpha = (\lambda_1 - 2\lambda_\alpha)h(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}^h\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_\alpha) \tag{25}$$

$$\mu\delta_{1k} = C_{\alpha\alpha,k}^1 = \boldsymbol{e}_k(\lambda_\alpha) - \sum_{\beta=2}^n C_{\alpha\alpha}^\beta h(\boldsymbol{e}_\beta,\nabla_{\boldsymbol{e}_k}^h\boldsymbol{e}_1) \tag{26}$$

$$3\mu\delta_{\alpha k} = C_{\alpha\alpha,\alpha}^k = \boldsymbol{e}_\alpha h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha,\ \boldsymbol{e}_k) - h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha,\nabla_{\boldsymbol{e}_\alpha}^h\boldsymbol{e}_k) - 2h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_k,\nabla_{\boldsymbol{e}_\alpha}^h\boldsymbol{e}_\alpha) \tag{27}$$

情形1 μ 为常数.

如果 μ 为常数，那么由(5)式知，λ_α 是下列关于 y 的方程的解：

$$(2y - \lambda_1)(y^2 - \lambda_1 y + c) = 0 \tag{28}$$

方程(28)至多有3个实数解，且

$$y_1 = \frac{\lambda_1}{2} \qquad y_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - 4c})$$

但引理1说明 $\lambda_1 \geqslant 2\lambda_\alpha$，$\alpha \in \{2,\cdots,n\}$，从而

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_{r+1} = \frac{\lambda_1}{2} \qquad \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4c}) \tag{29}$$

已经假设 $\dim \mathbf{V}(\lambda_2) = r$，则引理3表明

$$C_{aa}^b = h(C(\boldsymbol{e}_a)\boldsymbol{e}_a,\ \boldsymbol{e}_b) = 0 \qquad a,b \in \{2,\cdots,r+1\} \tag{30}$$

对 $A \in \{r+2,\cdots,n\}$，$a \in \{2,\cdots,r+1\}$，从(6)式可知

$$0 = (\lambda_a - \lambda_A)(2\lambda_A - \lambda_1)C_{aA}^A \tag{31}$$

由于 $(\lambda_a - \lambda_A)(2\lambda_A - \lambda_1) \neq 0$，可得

$$C_{AA}^a = C_{aA}^A = 0 \tag{32}$$

对于 $A \in \{r+2,\cdots,n\}$，因为 $2\lambda_A - \lambda_1 \neq 0$，从而在(25)式中选择 $k = 1$，得到

$$h(\boldsymbol{e}_A,\nabla_{\boldsymbol{e}_1}^h\boldsymbol{e}_1) = 0 \tag{33}$$

由(30),(32)和(33)式，我们得到

$$\sum_{\beta=2}^n C_{\alpha\alpha}^\beta h(\boldsymbol{e}_\beta,\nabla_{\boldsymbol{e}_1}^h\boldsymbol{e}_1) = 0 \qquad \alpha \in \{2,\cdots,n\} \tag{34}$$

因此，在 μ 为常数的情形下，由(24),(26)和(34)式得到

$$\boldsymbol{e}_1(\lambda_1) = 3\mu \qquad \boldsymbol{e}_1(\lambda_\alpha) = \mu \qquad \alpha \in \{2,\cdots,n\} \tag{35}$$

如果 $\lambda_1 = 2\lambda_2$，那么(35)式表明

$$3\mu = \boldsymbol{e}_1(\lambda_1) = 2\boldsymbol{e}_1(\lambda_2) = 2\mu$$

且 $\mu = 0$.

如果 $0 = \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n + c$，那么(35)式表明

$$0 = 2\lambda_n\boldsymbol{e}_1(\lambda_n) - \boldsymbol{e}_1(\lambda_1)\lambda_n - \lambda_1\boldsymbol{e}_1(\lambda_n) = -\mu(\lambda_1 + \lambda_n) \tag{36}$$

再次利用(35)式，取(36)式沿 $\boldsymbol{e}_1$ 的导数，得到

$$0 = -4\mu^2$$

从而 $\mu=0$. 在这种情形下，由(3) 式可知 $\nabla^h C=0$.

情形 2　μ 不是常数且没有零点.

在此情形下，(5) 式表明

$$(\lambda_\alpha-2\lambda_\alpha)(\lambda_\alpha^2-\lambda_1\lambda_\alpha+c)\neq 0\qquad \alpha\in\{2,\cdots,n\}\tag{37}$$

作为(37) 和(25) 式的推论，我们有

$$h(\nabla^h_{e_k}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_\alpha)=\frac{\mu}{\lambda_1-2\lambda_\alpha}\delta_{k\alpha}\qquad k\in\{1,\cdots,n\},\ \alpha\in\{2,\cdots,n\}$$

因此

$$\nabla^h_{e_1}\boldsymbol{e}_1=0\qquad \nabla^h_{e_\alpha}\boldsymbol{e}_1=\frac{\mu}{\lambda_1-2\lambda_\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha\qquad \alpha\in\{2,\cdots,n\}\tag{38}$$

由引理 3，有

$$C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha=\lambda_\alpha\boldsymbol{e}_1\qquad \alpha\in\{2,\cdots,n\}\tag{39}$$

在(27) 式中选择 $k=\alpha\in\{2,\cdots,n\}$，利用(38) 和(39) 式，可得

$$3\mu=\boldsymbol{e}_\alpha h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\alpha)-3h(C(\boldsymbol{e}_\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha,\nabla^h_{e_\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha)=3\lambda_\alpha\frac{\mu}{\lambda_1-2\lambda_\alpha}\tag{40}$$

则在点 $\mu\neq 0$ 处，有

$$\lambda_1=3\lambda_\alpha\qquad \alpha\in\{2,\cdots,n\}\tag{41}$$

由引理 1、引理 3 以及(41) 式，得

$$T^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_{ii}{}^k=\frac{n+2}{3n}\lambda_1\delta_{1k}\qquad k\in\{1,\cdots,n\}\tag{42}$$

且

$$h(C(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=\frac{1}{3}\lambda_1(\delta_{1k}\delta_{ij}+\delta_{1i}\delta_{jk}+\delta_{1j}\delta_{ki})\qquad i,j,k\in\{1,\cdots,n\}\tag{43}$$

由(42) 和(43) 式，我们有

$$h(C(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)=\frac{n}{n+2}(T^k\delta_{ij}+T^i\delta_{jk}+T^j\delta_{ki})\qquad i,j,k\in\{1,\cdots,n\}$$

这等价于 $\widetilde{C}=0$.

参考文献：

[1] LI A M, SIMON U, ZHAO G S, et al. Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2015.

[2] NOMIZU K, SASAKI T. Affine Differential Geometry [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[3] SIMON U, SCHWENK-SCHELLSCHMIDT A, VIESEL H. Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces [M]. Tokyo: Science University Tokyo, 1991.

[4] DILLEN F, VRANCKEN L, YAPRAK S. Affine Hypersurfaces with Parallel Cubic Form [J]. Nagoya Math J, 1994, 135: 153-164.

[5] HU Z J, LI H Z, SIMON U, et al. On Locally Strongly Convex Affine Hypersurfaces with Parallel Cubic Form, I [J]. Differential Geom Appl, 2009, 27(2): 188-205.

[6] 李兴校. 对称等仿射球和极小对称 Lagrange 子流形的对应 [J]. 中国科学(数学), 2014, 44(1): 13-36.

[7] BOKAN N D, NOMIZU K, SIMON U. Affine Hypersurfaces with Parallel Cubic Forms [J]. Tôhoku Math J, 1990, 42(1): 101-108.

[8] DILLEN F, VRANCKEN L. Hypersurfaces with Parallel Difference Tensor [J]. Japan J Math, 1998, 24(1): 43-60.

[9] LI C C. Affine Hypersurfaces with Parallel Difference Tensor Relative to Affine α-Connection [J]. Journal of Geometry and Physics, 2014, 86: 81-93.

[10] HILDEBRAND R. Centro-Affine Hypersurface Immersions with Parallel Cubic Form [J]. Beiträge zur Algebra und Geometrie, 2015, 56(2): 593-640.

[11] CHENG X X, HU Z J, MORUZ M. Classification of the Locally Strongly Convex Centroaffine Hypersurfaces with Parallel Cubic Form [J]. Results Math, 2017, 72(1-2): 419-469.

[12] LIU H L, WANG C P. Centroaffine Surfaces with Parallel Traceless Cubic Form [J]. Bull Belg Math Soc, 1997, 4(4): 493-499.

[13] CHENG X X, HU Z J. An Optimal Inequality on Locally Strongly Convex Centroaffine Hypersurfaces [J]. J Geom Anal, 2018, 28(1): 643-655.

[14] LI H Z, VRANCKEN L. A Basic Inequality and New Characterization of Whitney Spheres in a Complex Space Form [J]. Israel Journal of Math, 2005, 146(1): 223-242.

[15] LI A, LIU H, SCHWENK-SHELLSCHMIDT A, et al. Cubic Form Methods and Relative Tchebychev Hypersurfaces [J]. Geometriae Dedicata, 1997, 66(2): 203-221.

Locally Strongly Convex Relative Spheres with Parallel Cubic Simon Forms

LI Ming, GONG Yan-nian

Mathematical sciences research center, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China

Abstract: An important problem in affine differential geometry is to classify the hypersur-faces with parallel cubic forms. The cubic Simon form is a geometric invarance of a hyper-surface which is the traceless part of the cubic form and independent to the choice of the relative normalizations. Using the fundamental equations in relative geometry and choosing special orthonormal moving frames, the eigenvalues and engenspaces are investigated along the maximum direction of the cubic form of a locally strongly convex relative sphere with parallel cubic Siom form. Finaly the locally strongly convex relative spheres with parallel cubic Siom form have parallel cubic form or are quadric. It generalizes a previous result in centroaffine geometry.

Key words: strongly convex relative sphere; cubic form; cubic Simon form; Techebychev vector field

责任编辑 廖 坤