DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.06.008

Stokes 型积分微分方程的稳定化有限元方法分析①

许　超，　童新安

洛阳理工学院 数学与物理教学部，河南 洛阳 471023

摘要：利用同阶低阶协调有限元对，针对二维 Stokes 型积分微分方程构造了一类基于局部压力投影稳定的半离散有限元格式，并给出了关于速度和压力逼近的最优误差估计．该方法的优势在于其稳定项是定义在单元上的，并且不需要引入稳定化参数，便于编程实现．最后通过数值实验进一步验证了所述算法的有效性及理论分析的正确性．

关 键 词：Stokes 型积分微分方程；稳定化方法；最优误差估计

中图分类号：O242.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2020)06－0039－06

本文考虑如下一类 Stokes 型积分微分方程：

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u - \int_0^t \Delta u(x,\tau)\mathrm{d}\tau + \nabla p = f(X,t) & (X,t)\in\Omega\times(0,T] \\ \nabla\cdot u = 0 & (X,t)\in\Omega\times(0,T] \\ u(X,t) = 0 & (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T] \\ u(X,0) = u_0(X) & X\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界凸区域，$X=(x,y)$，$u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$u=(u_1,u_2)$ 表示流体速度，p 是压力，$f=(f_1,f_2)$ 是体积力密度．

Stokes问题是一类非常重要的流体力学问题，其有限元解法已有大量研究成果，详见文献[1-3]及其参考文献．而对于Stokes型积分微分方程，由于其含有积分项，所以处理起来难度增大．到目前为止，关于该问题的研究成果相对较少[4-9]．其中，文献[4]利用 Ritz-Volterra 投影研究了一类协调混合元的求解方法，并得到了关于速度和压力逼近的 L^2 模的最优误差估计；文献[5-7]分别研究了 Crouzeix-Raviart(CR)型三角形非协调元在正则网格和各向异性网格剖分下的应用，并给出了相应的最优误差估计；文献[8-9]进一步利用高精度技巧得到了一系列关于 Bernadi-Raugel 元的超收敛估计结果．

不同于上述混合元方法，本文将研究同阶的有限元对(协调的线性 P_1 元对或双线性 Q_1 元对)关于方程(1)的求解问题．众所周知，虽然同阶 P_1^2-P_1 和 Q_1^2-Q_1 元对具有节点自由度少、结构简单等优点，但是由于不满足离散的 Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi(LBB)条件，计算时会出现压力伪震荡现象，所以不能直接用来求解这类问题．为了克服这一难题，需要引入相应的稳定项．本文将使用文献[10-12]中所述的稳定化方法来求解方程(1)，该方法的优点是稳定项定义在局部单元上，且不需要引入额外的稳定化参数，易于编程实现．关于该方法的应用研究还可以参见文献[13-17]．随后，本文进行了误差理论分析，并得到了相应的最优误差估计结果．最后本文通过一个算例进行了数值模拟，并且将本文方法和其它常用低阶混合元方法

① 收稿日期：2019－03－14
基金项目：国家自然科学基金项目(11671369)．
作者简介：许 超(1975－)，男，副教授，主要从事有限元方法理论及其应用的研究．

的计算效果进行对比，不仅展示本文所述求解格式的有效性，还弥补了前期研究中算例缺失的不足.

1 变分问题及其稳定化有限元逼近格式

令

$$V=(H_0^1(\Omega))^2 \qquad M=L_0^2(\Omega)=\left\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\,\mathrm{d}x=0\right\}$$

则方程(1)的变分形式为：求$(u,\ p)\in(V,\ M)$，满足

$$\begin{cases}(u_t,\ v)+a(u,\ v)-b(v,\ p)+\int_0^t a(u,\ v)\mathrm{d}\tau=(f,\ v) & \forall v\in V\\ b(u,\ q)=0 & \forall q\in M\\ u(x,\ 0)=u_0(x)\end{cases}\tag{2}$$

其中$a(u,\ v)=\int_\Omega \nabla u\,\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$b(v,\ p)=\int_\Omega p\,\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$(f,\ v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由文献[1]知空间$(V,\ M)$满足LBB条件，方程(2)的解存在且唯一.

为简单起见，设J_h是区域Ω中单元最大直径为h的三角形(或四边形)正则剖分簇，即$\overline{\Omega}=\bigcup_{K\in J_h}K$. 定义有限元空间

$$V_h=\{v_h\in(C^0(\Omega))^2\cap V:v_h|_K=(R_1(K))^2,\ \forall K\in J_h\}$$
$$M_h=\{q_h\in C^0(\Omega)\cap M:q_h|_K=R_1(K),\ \forall K\in J_h\}$$

其中$R_1(K)$表示定义在单元K上的P_1元或Q_1元. 由于空间对$(V_h,\ M_h)$不满足离散的LBB条件，所以我们利用文献[10-11]中的方法，引入相应的稳定项来构造如下稳定化求解格式：

求$(u_h,\ p_h)\in(V_h,\ M_h)$，满足

$$\begin{cases}(u_{ht},\ v_h)+\widetilde{B}((u_h,\ p_h);(v_h,\ q_h))+\int_0^t a(u_h,\ v_h)\mathrm{d}\tau=(f,\ v_h)\\ u(0)=R_hu_0 \qquad \forall(v_h,\ q_h)\in(X_h,\ M_h)\end{cases}\tag{3}$$

其中R_hu_0是初值$u_0(x)$的投影，将在下文(6)式中定义.

$$G(p_h,\ q_h)=\int_\Omega(p_h-\Pi p_h)(q_h-\Pi q_h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{4}$$

$$\widetilde{B}((u_h,\ p_h);(v_h,\ q_h))=a(u_h,\ v_h)-b(v_h,\ p_h)+b(u_h,\ q_h)+G(p_h,\ q_h)\tag{5}$$

其中$\Pi:L^2(\Omega)\longrightarrow R_0$是标准的$L^2$投影算子，满足性质

$$(p,\ q_h)=(\Pi p,\ q_h) \qquad \forall p\in H^1(\Omega)\cap M \qquad q_h\in R_0$$
$$\|p-\Pi p\|_0\leqslant Ch\|p\|_1 \qquad \|\Pi p\|_0\leqslant\|p\|_0$$

其中R_0表示单元K上的分片常数. 这里及下文中的C均为与h无关的正常数，且取值可以不同.

2 误差分析

为了得到有限元解$(u_h,\ p_h)$的最优误差估计结果，引入如下投影算子：

$(R_h,\ Q_h):(V,\ M)\longrightarrow(V_h,\ M_h)$

$$\widetilde{B}((R_h(u,\ p),Q_h(u,\ p));(v_h,\ q_h))=B((u,\ p);(v_h,\ q_h)) \quad \forall(u,\ p)\in(V,M),(v_h,\ p_h)\in(V_h,M_h)\tag{6}$$

其中

$$B((u,\ p);(v,\ q))=a(u,\ v)-b(v,\ p)+b(u,\ q)$$

投影算子$(R_h,\ Q_h)$是适定的.

下面我们将对稳定化格式(3)进行误差分析，并得到如下结论：

定理1 设$(u,\ p)$和$(u_h,\ p_h)$分别为方程(2)和(3)的解，$(u,\ p)\in((H^2(\Omega))^2\cap V,\ H^1(\Omega)\cap M)$，则有误差估计

$$\| u-u_h \|_0 \leqslant Ch\left[\| u \|_2^2+\| p \|_1^2+\int_0^t(| u_t |_1^2+| u |_2^2)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$\| u_t-u_{ht} \|_0+| u-u_h |_1 \leqslant Ch\sigma(t)\left[| u_t |_1+\| u \|_2+\| p \|_1+\int_0^t(| u_{tt} |_1^2+| u |_2^2)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

其中 $\sigma(t)=\max\{1, t^{-\frac{1}{2}}\}$.

证　令

$$\xi=u-R_h(u, p) \qquad \theta=u_h-R_h(u, p)$$
$$\zeta=p-Q_h(u, p) \qquad \varphi=p_h-Q_h(u, p)$$

在方程(2)中取$(v, q)=(v_h, q_h)$，并与(3)式相减，得

$$(u_t-u_{ht}, v_h)+\widetilde{B}((u-u_h, p-p_h); (v_h, q_h))+\int_0^t a(u-u_h, v_h)\mathrm{d}\tau=G(p, q_h) \tag{9}$$

利用投影定义(6)式可得

$$(\theta_t, v_h)+\widetilde{B}((\theta, \varphi); (v_h, q_h))=(\xi_t, v_h)+\int_0^t a(\xi-\theta, v_h)\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

在(10)式中取$(v_h, q_h)=(\theta, \varphi)$，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \theta \|_0^2+| \theta |_1^2+G(\varphi, \varphi) \leqslant C\left[\| \xi_t \|_0 \| \theta \|_0+\int_0^t(| \xi(\tau) |_1+| \theta(\tau) |_1)| \theta(t) |_1\mathrm{d}\tau\right]$$

进而有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \theta \|_0^2+\frac{1}{2}| \theta |_1^2 \leqslant Ch^2\left(| u_t |_1^2+\int_0^t | u |_2^2\mathrm{d}\tau\right)+\| \theta \|_0^2+\int_0^t | \theta(\tau) |_1^2\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

对(11)式两端从 0 到 t 进行积分，注意到 $\theta(0)=0$，可得

$$\| \theta \|_0^2+\int_0^t | \theta |_1^2\mathrm{d}\tau \leqslant Ch^2\int_0^t(| u_t |_1^2+| u |_2^2)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\left(\| \theta \|_0^2+\int_0^\tau | \theta(s) |_1^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$$

再利用 Gronwall 不等式得

$$\| \theta \|_0^2+\int_0^t | \theta |_1^2\mathrm{d}\tau \leqslant Ch^2\int_0^t(| u_t |_1^2+| u |_2^2)\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

最后结合三角不等式以及文献[11]中引理 4.1 的结论可得(7)式.

(10)式两边同时对 t 求导，得

$$(\theta_{tt}, v_h)+\widetilde{B}((\theta_t, \varphi_t); (v_h, q_h))+a(\theta, v_h)=(\xi_{tt}, v_h)+a(\xi, v_h) \tag{13}$$

在(13)式中取$(v_h, q_h)=(\theta_t, \varphi_t)$，并利用 Young 不等式，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \theta_t \|_0^2+\frac{1}{2}| \theta_t |_1^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}| \theta |_1^2+G(\varphi_t, \varphi_t) \leqslant C(\| \xi_{tt} \|_0^2+\| \xi \|_1^2)+\| \theta_t \|_0^2 \tag{14}$$

将(14)式的两端乘以 t，再同时从 0 到 t 进行积分，得

$$\| \theta_t \|_0^2+| \theta |_1^2 \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t(\| \theta_t \|_0^2+| \theta |_1^2)\mathrm{d}\tau+Ch^2\int_0^t(| u_{tt} |_1^2+| u |_2^2)\mathrm{d}\tau \tag{15}$$

进一步利用 Gronwall 不等式，可得

$$\| \theta_t \|_0^2+| \theta |_1^2 \leqslant Ch^2t^{-1}\int_0^t(| u_{tt} |_1^2+| u |_2^2)\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

由三角不等式和文献[11]中的引理 4.1 可以推出(8)式.

下面对压力 p 的误差进行分析，得出如下结论：

定理 2　在定理 1 的条件下，有

$$| u-u_h |_1+\| p-p_h \|_0 \leqslant$$
$$Ch\sigma(t)\left[\| u \|_2+\| p \|_1+| u_t |_1+\int_0^t(\| u \|_2^2+\| p \|_1^2+| u_{tt} |_1^2+| u_t |_1)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

证　由文献[12]中的定理 3.1，可得

$$\beta(\|\theta\|_1+\|\varphi\|_0)\leqslant\sup_{(v_h,q_h)\in(X_h,M_h)}\frac{\widetilde{B}((\theta,\varphi);(v_h,q_h))}{\|v_h\|_1+\|q_h\|_0}\leqslant$$

$$\sup_{(v_h,q_h)\in(X_h,M_h)}\left\{\frac{\widetilde{B}((u_h-u,p_h-p);(v_h,q_h))}{\|v_h\|_1+\|q_h\|_0}+\frac{\widetilde{B}((u-R_hu,p-Q_hp);(v_h,q_h))}{\|v_h\|_1+\|q_h\|_0}\right\}\leqslant$$

$$C\left(\|u_t-u_{ht}\|_0+\int_0^t|u-u_h|_1\mathrm{d}t+\|p-\Pi p\|_0+\|u-R_h(u,p)\|_1+\|p-Q_h(u,p)p\|_0\right)$$

再利用三角不等式、定理1和文献[11]中引理4.1的结论可以推出(17)式.

3 数值实验

为了验证理论分析的正确性，我们给出下列数值实验. 数值实验1对本文使用的局部压力投影稳定化方法进行了数值验证，测试收敛阶是否符合理论分析结果；数值实验2给出了几种满足离散的LBB条件的常用低阶混合有限元方法的计算结果，以便于进行对比分析.

在方程(1)中取区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，其精确解为

$$u_1=10\mathrm{e}^t(x^4-2x^3+x^2)(2y^3-3y^2+y)$$

$$u_2=-10\mathrm{e}^t(y^4-2y^3+y^2)(2x^3-3x^2+x)$$

$$p=10\mathrm{e}^t(2x-1)(2y-1)$$

右端项可以通过计算得到. 为比较方便，我们统一使用向后欧拉格式进行计算，计算中采用直角三角形或正方形网格剖分.

数值实验1 基于本文稳定化方法，分别利用同阶 P_1^2-P_1 元和 Q_1^2-Q_1 元进行数值求解. 在 $t=1$ 时的计算结果见表1、表2.

表1 时间 $t=1$ 时 P_1^2-P_1 元数值计算结果

单元数目	8×8	16×16	32×32	64×64	收敛阶
$\lvert u-u_h\rvert_1$	0.716 291 530	0.289 895 213	0.117 552 557	0.050 914 053	1.27
$\|u-u_h\|_0$	0.075 947 364	0.023 152 014	0.006 289 063	0.001 646 497	1.84
$\|p-p_h\|_0$	3.570 012 777	1.670 341 666	0.804 989 022	0.394 955 440	1.06

表2 时间 $t=1$ 时 Q_1^2-Q_1 元数值计算结果

单元数目	8×8	16×16	32×32	64×64	收敛阶
$\lvert u-u_h\rvert_1$	0.507 036 461	0.189 460 811	0.072 976 295	0.030 829 143	1.35
$\|u-u_h\|_0$	0.035 239 002	0.010 516 561	0.002 963 599	0.000 860 767	1.79
$\|p-p_h\|_0$	1.680 990 741	0.549 765 652	0.168 256 690	0.050 146 936	1.69

由表1、表2可以看到速度的 H^1 模和压力的 L^2 模的误差收敛阶均超过1阶，这也进一步验证了理论分析的正确性.

数值实验2 为了便于和本文方法对比，我们同时也给出了几个常用的满足离散的LBB条件的低阶混合元方法求解方程(1)的结果. 其中，表3给出的是协调双线性 Q_1 元配常数 Q_0 元对 Q_1^2-Q_0 的计算结果，表4是非协调旋转 Q_1 元[18] 配常数 Q_0 元对 Q_1^{rot}-Q_1^{rot}-Q_0 的计算结果，表5是文献[5-6]中使用的CR型非协调三角形元配常数 P_0 元对 P_1^{nc}-P_1^{nc}-P_0 的计算结果，表6是文献[7]中使用的CR型非协调矩形元配常数 Q_0 元对 MQ_1^{rot}-Q_0 的计算结果.

表3 时间 $t=1$ 时 Q_1^2-Q_0 元数值计算结果

单元数目	8×8	16×16	32×32	64×64	收敛阶
$\lvert u-u_h\rvert_1$	0.329 552 668	0.125 256 236	0.055 424 912	0.026 699 121	1.20
$\|u-u_h\|_0$	0.021 732 675	0.006 262 013	0.001 829 577	0.000 581 533	1.74
$\|p-p_h\|_0$	1.848 184 336	0.837 552 077	0.405 218 195	0.200 823 272	1.06

表 4　时间 $t=1$ 时 Q_1^{rot}-Q_1^{rot}-Q_0 元数值计算结果

单元数目	8×8	16×16	32×32	64×64	收敛阶
$\Vert u-u_h\Vert_h$	0.672 760 843	0.340 578 056	0.170 087 146	0.084 879 269	1.00
$\Vert u-u_h\Vert_0$	0.048 436 062	0.013 891 601	0.003 651 664	0.000 969 782	1.88
$\Vert p-p_h\Vert_0$	2.084 921 093	0.908 301 145	0.418 696 682	0.202 953 163	1.12

表 5　时间 $t=1$ 时 P_1^{nc}-P_1^{nc}-P_0 元数值计算结果

单元数目	8×8	16×16	32×32	64×64	收敛阶
$\Vert u-u_h\Vert_h$	0.659 366 200	0.309 636 933	0.128 229 940	0.057 155 038	1.18
$\Vert u-u_h\Vert_0$	0.086 255 329	0.034 545 800	0.010 340 291	0.002 730 414	1.66
$\Vert p-p_h\Vert_0$	2.158 936 398	0.974 644 331	0.354 012 290	0.133 727 893	1.34

表 6　时间 $t=1$ 时 MQ_1^{rot}-Q_0 元数值计算结果

单元数目	8×8	16×16	32×32	64×64	收敛阶
$\Vert u-u_h\Vert_h$	0. 164 692 824	0. 084 773 832	0. 042 702 587	0. 021 391 140	0. 98
$\Vert u-u_h\Vert_0$	0. 004 532 217	0. 001 180 237	0. 000 298 110	0. 000 074 719	1. 97
$\Vert p-p_h\Vert_0$	2. 717 950 213	1. 329 809 405	0. 659 873 573	0. 329 237 576	1. 02

通过对结果进行分析，我们发现上述方法关于速度 u 的能量模的收敛阶都能达到最优．相对而言，利用同阶 Q_1^2-Q_1 元对计算压力 p 时，会有高半阶的超收敛结果．关于数值实验 2 中所列的单元在求解流体问题时各自所具有的优势可查阅相关文献，本文不再详述．

参考文献：

[1] GIRAULT V，RAVIART P A. Finite Element Method for Navier-Stokes Equations，Theory and Algorithms [M]. Berlin and Herdelberg：Springer-Verlag，1986.

[2] REZZI F，FORTIN M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods [M]. Berlin and Herdelberg：Springer-Verlag，1991.

[3] JOHN V. Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems [M]. New York：Springer International Publishing，2016.

[4] 张　铁．Stokes 型积分—微分方程的 Galerkin 近似 [J]．高等学校计算数学学报，1997，19(3)：280-285.

[5] 石东洋，王培珍．Stokes 型积分-微分方程的 Crouzeix-Raviart 型非协调三角形各向异性有限元方法 [J]．高校应用数学学报(A 辑)，2009，24(4)：435-442.

[6] 石东洋，王慧敏．Stokes 型积分微分方程的质量集中各向异性非协调有限元分析 [J]．应用数学，2009，22(1)：33-41.

[7] 王秋亮．Stokes 型积分微分方程的非协调元逼近 [J]．安徽大学学报(自然科学版)，2013，37(1)：28-32.

[8] 石东洋，王培珍．各向异性网格下 Stokes 型积分-微分方程 Beradi-Raugel 混合元近似的超收敛分析 [J]．高等学校计算数学学报，2010，32(4)：321-332.

[9] 牛裕琪，石东洋．Stokes 型积分-微分方程 Bernadi-Raugel 混合元的超收敛分析 [J]．河南师范大学学报(自然科学版)，2011，39(4)：6-9.

[10] BOCHEV P B，DOHRMANN C R，GUNZBURGER M D. Stabilization of Low-Order Mixed Finite Elements for the Stokes Equations [J]. SIAM J Numer Anal，2006，44(1)：82-101.

[11] LI J，HE Y N，CHEN Z X. A New Stabilized Finite Element Method for the Transient Navier-Stokes Equations [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg，2007，197(1-4)：22-35.

[12] LI J，HE Y N. A Stabilized Finite Element Method Based on Two Local Gauss Integrations for the Stokes Equations [J]. J Comput Appl Math，2008，214(1)：58-65.

[13] LI R，LI J，CHEN Z X，et al. A Stabilized Finite Element Method Based on Two Local Gauss Integrations for a Coupled Stokes-Darcy Problem [J]. J Comput Appl Math，2016，292：92-104.

[14] QIU H L，AN R，MEI L Q，et al. Two-Step Algorithms for the Stationary Incompressible Navier-Stokes Equations with

Friction Boundary Conditions [J]. Appl Numer Math, 2017, 120: 97-114.

[15] 薛菊峰, 尚月强. 非定常不可压 Navier-Stokes 方程基于欧拉格式的两水平变分多尺度方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(9): 84-90.

[16] SHANG Y Q. A Three-Step Oseen Correction Method for the Steady Navier-Stokes Equations [J]. J Eng Math, 2018, 111(1): 145-163.

[17] QIU H, SIMOS T. Two-Grid Stabilized Methods for the Stationary Incompressible Navier-Stokes Equations with Nonlinear Slip Boundary Conditions [J]. Appl Math Comput, 2018, 332(C): 172-188.

[18] RANNACHER R, TUREK S. Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element [J]. Numer Methods PDEs, 1992, 8(2): 97-111.

A Stabilized Finite Element Method for the Integro-Differential Equations of Stokes Type

XU Chao, TONG Xin-an

Faculty of Mathematics and Physics Education, Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang Henan 471023, China

Abstract: A stabilized finite element semi-discrete scheme based on the local pressure projection has been introduced for the integro-differential equations of Stokes type by the lowest equal-order conforming finite element pairs. Optimal error estimates of the velocity and pressure approximation have been derived. The new scheme has been stabilized on local elements, parameter free, and implemented easily. Finally, a numerical experiment has been carried out to show the effectiveness of the algorithm and the correctness of theoretical analysis.

Key words: integro-differential equations of Stokes type; stabilized finite element method; optimal error estimate

责任编辑 廖 坤