

M -矩阵 Fan 积的新不等式^①

陈付彬

昆明理工大学津桥学院 理工学院, 昆明 650106

摘要: 非奇异 M -矩阵特征值的估计是矩阵理论研究的重要问题. 利用 Brauer 定理和 Gerschgorin 定理给出了非奇异 M -矩阵 A 和 B 的 Fan 积的最小特征值下界的新不等式. 新结果只与矩阵的元素有关, 易于计算. 数值算例表明新估计式在一定条件下改进了已有的结果.

关键词: M -矩阵; Fan 积; 最小特征值; 下界

中图分类号: O151.21

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)08-0001-04

M -矩阵是一类在诸多领域有着较为重要实用价值的矩阵类. 矩阵的 Fan 积是特殊的矩阵运算^[1]. M -矩阵特征值的估计是研究的重点^[2-3], 尤其关于非奇异 M -矩阵 Fan 积的最小特征值下界的问题更是引人关注, 现如今得到了一些相关的结果^[4-12]. 下面将对相关问题继续探讨, 给出两个只与矩阵元素有关且比现有结果优越的新估计式.

1 预备知识

令 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 复(实)矩阵集记为 $C^{n \times n} (R^{n \times n})$.

若矩阵 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 满足 $a_{ij} \geq 0 (a_{ij} > 0)$, $i, j \in N$, 称 A 是非负(正)矩阵, 记为 $A \geq 0 (A > 0)$.

设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, 若 $a_{ij} \leq 0$, $i, j \in N$, $i \neq j$, 称 A 是 Z -矩阵, 记为 Z_n . 若 $A \in Z_n$ 表示为 $A = \alpha I - P$, $P \geq 0$, 当 $\alpha > \rho(P)$ 时, A 是非奇异 M -矩阵, 其构成的矩阵集记为 M_n ; 当 $\alpha = \rho(P)$ 时, A 是奇异的.

令 $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, λ_i 为矩阵 A 的特征值. $|\lambda_i|$ 的最大值称为 A 的谱半径, 记为 $\rho(A)$. 用 $\tau(A) = \min\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ 表示 A 的最小特征值, 由文献[4]可知 $\tau(A) \in \sigma(A)$.

设矩阵 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, $B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$, A 与 B 的 Fan 积为

$$c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}b_{ij} & i \neq j \\ a_{ij}b_{ij} & i = j \end{cases}$$

若 $A, B \in M_n$, 则 $A \star B \in M_n$.

如果有置换矩阵 P , 使 A 满足

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

称 A 是可约矩阵, 否则不可约^[1].

① 收稿日期: 2019-10-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501141); 云南省教育厅科学研究基金项目(2018JS747, 2020J1233).

作者简介: 陈付彬(1979—), 男, 教授, 主要从事矩阵理论及其应用的研究.

设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, $i, j, k \in N$, $j \neq i$,

$$\begin{aligned} r_{ji} &= \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}| - \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}|} & r_i &= \max_{j \neq i} \{r_{ji}\} & \sigma_{ji} &= \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| r_i}{|a_{jj}|} \\ h_i &= \max_{j \neq i} \left\{ \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}| \sigma_{ji} - \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| \sigma_{ki}} \right\} & w_{ji} &= \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| \sigma_{ki} h_i}{|a_{jj}|} \\ t_i &= \max_{j \neq i} \left\{ \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}| w_{ji} - \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| w_{ki}} \right\} & n_{ji} &= \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| w_{ki} t_i}{|a_{jj}|} \\ n_i &= \max_{j \neq i} \{n_{ji}\} & u_j &= \begin{cases} 1 & n_j = 0 \\ n_j & n_j \neq 0 \end{cases} & z_{ji} &= |a_{ji}| u_j & z_i &= \max_{j \neq i} \{z_{ji}\} \end{aligned}$$

2 主要结果

引理 1^[13] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 则 A 的特征值包含于 $\bigcup_{i \neq j}^n \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ki}|\}$.

引理 2^[13] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 则 A 的特征值包含于 $\bigcup_{i, j=1}^n \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| |z - a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ki}| \cdot \sum_{l \neq j} |a_{lj}|\}$.

定理 1 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n$, 则

$$\tau(A \star B) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii} b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right\}$$

证 显然 $n = 1$ 成立, 下面分两种情况讨论 $n \geq 2$.

情况 1 若 $A \star B$ 不可约, 易见 A, B 都不可约. 由引理 1, 存在 $i \in N$, 使得

$$\begin{aligned} |\tau(A \star B) - a_{ii} b_{ii}| &\leq \sum_{k \neq i} |a_{ki} b_{ki}| = \sum_{k \neq i} \frac{z_{ki}}{z_{ki}} |a_{ki} b_{ki}| \leq z_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{z_{ki}} |a_{ki} b_{ki}| = \\ &= z_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{|a_{ki}| u_k} |a_{ki} b_{ki}| = z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \end{aligned}$$

所以

$$\tau(A \star B) \geq a_{ii} b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k}$$

即

$$\tau(A \star B) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii} b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right\}$$

情况 2 若 $A \star B$ 可约. 由文献[14]知, 只有主子式皆为正时 Z_n 中的矩阵为 M -矩阵. 存在满足除 $p_{12} = p_{23} = \cdots = p_{n-1, n} = p_{n, 1} = 1$ 外其他元素都是 0 的置换阵 $P = (p_{ij})$, 当 $\epsilon > 0$ 足够小时 $A - \epsilon P$, $B - \epsilon P$ 的主子式都是正的, 则 $A - \epsilon P$, $B - \epsilon P$ 是不可约的 M -矩阵. 此时将 A, B 分别代换成 $A - \epsilon P$, $B - \epsilon P$, 当 ϵ 趋向于 0 时, 结果依然成立.

定理 2 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n$, 则

$$\tau(A \star B) \geq \min_{i \neq j} \frac{1}{2} \left\{ a_{ii} b_{ii} + a_{jj} b_{jj} - \left[(a_{ii} b_{ii} - a_{jj} b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

证 显然 $n = 1$ 成立, 下面分两种情况讨论 $n \geq 2$.

情况 1 若 $\mathbf{A} \star \mathbf{B}$ 不可约, 易见 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都不可约. 设 $\tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) = \lambda$, 由引理 2 知, 存在 $(i, j) \in N, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, 使得

$$\begin{aligned} & |\lambda - a_{ii}b_{ii}| \leq |\lambda - a_{jj}b_{jj}| \\ & \left(\sum_{k \neq i} |a_{ki}b_{ki}| \right) \left(\sum_{l \neq j} |a_{lj}b_{lj}| \right) = \left(\sum_{k \neq i} \frac{z_{ki}}{z_{ki}} |a_{ki}b_{ki}| \right) \left(\sum_{l \neq j} \frac{z_{lj}}{z_{lj}} |a_{lj}b_{lj}| \right) \leq \\ & \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{z_{ki}} |a_{ki}b_{ki}| \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{1}{z_{lj}} |a_{lj}b_{lj}| \right) = \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{|a_{ki}|u_k} |a_{ki}b_{ki}| \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{1}{|a_{lj}|u_l} |a_{lj}b_{lj}| \right) = \\ & \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \end{aligned}$$

所以

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

即

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) & \geq \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \geq \\ & \min_{i \neq j} \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

情况 2 若 $\mathbf{A} \star \mathbf{B}$ 可约. 由文献[14]知, 只有主子式皆为正时 Z_n 中的矩阵为 M -矩阵. 存在满足除 $p_{12} = p_{23} = \cdots = p_{n-1,n} = p_{n,1} = 1$ 外其他元素都是 0 的置换阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})$, 当 $\epsilon > 0$ 足够小时 $\mathbf{A} - \epsilon \mathbf{P}, \mathbf{B} - \epsilon \mathbf{P}$ 的主子式都是正的, 则 $\mathbf{A} - \epsilon \mathbf{P}, \mathbf{B} - \epsilon \mathbf{P}$ 是不可约的 M -矩阵. 此时将 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分别代换成 $\mathbf{A} - \epsilon \mathbf{P}, \mathbf{B} - \epsilon \mathbf{P}$, 当 ϵ 趋向于 0 时, 结果依然成立.

下面比较定理 1 和定理 2 的优越性. 对 $i \neq j$, 设

$$a_{ii}b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \leq a_{jj}b_{jj} - z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l}$$

即

$$z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \leq a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii} + z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k}$$

因为

$$\begin{aligned} & (a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \leq \\ & (a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii} + z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) = \\ & (a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) (a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii}) + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right)^2 = \\ & \left(a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii} + 2z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right)^2 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \geq \\ & \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[\left(a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii} + 2z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ & \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - a_{jj}b_{jj} + a_{ii}b_{ii} - 2z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right\} = a_{ii}b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \end{aligned}$$

即

$$\tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) \geq \min_{i \neq j} \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii}b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right\}$$

定理 2 的结果比定理 1 的结果好.

3 数值算例

令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

易见 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$, 根据文献[7]中的定理 3.1、文献[8]中的定理 7、文献[9]中的定理 2、文献[12]中的定理 3.1, 分别得到如下结果:

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) &\geq 2.433 \ 3 & \tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) &\geq 1.573 \ 0 \\ \tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) &\geq 1.523 \ 8 & \tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) &\geq 2.833 \ 3 \end{aligned}$$

由本文定理 1 得

$$\tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii}b_{ii} - z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right\} = 2.833 \ 6$$

由本文定理 2 得

$$\tau(\mathbf{A} \star \mathbf{B}) \geq \min_{i \neq j} \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4 \left(z_i \sum_{k \neq i} \frac{|b_{ki}|}{u_k} \right) \left(z_j \sum_{l \neq j} \frac{|b_{lj}|}{u_l} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = 2.921 \ 2$$

从数值算例可见, 所给估计式优于其他文献中的结果.

参考文献:

- [1] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 129, 448.
- [2] 钟 琴, 周 鑫. 非负不可约矩阵 Perron 根的上界 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 75-78.
- [3] 杨晓英, 韩惠丽, 刘 新. M -矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积最小特征值下界的估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(6): 50-53.
- [4] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991: 359.
- [5] FANG M Z. Bounds on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2007, 425(1): 7-15.
- [6] HUANG R. Some Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428(7): 1551-1559.
- [7] LI Y T, LI Y Y, WANG R W, et al. Some New Bounds on Eigenvalue of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(2-3): 536-545.
- [8] LIU Q B, CHEN G L. On Two Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431(5-7): 974-984.
- [9] LIU Q B, CHEN G L, ZHAO L L. Some New Bounds on the Spectral Radius of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(4): 936-948.
- [10] 孙德淑. 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和 M -矩阵 Fan 积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报(自

然科学版), 2016, 41(2): 7-11.

[11] 钟 琴, 牟谷芳. 关于 M -矩阵 Fan 积最小特征值的不等式 [J]. 中北大学学报(自然科学版), 2018, 39(6): 637-641.

[12] GUO Q P, LI H B, SONG M Y. New Inequalities on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. J Inequal Appl, 2013, 2013: 1-11.

[13] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 344, 380.

[14] BERMAN A, PLEEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences [M]. New York: Academic Press, 1979: 135.

New Inequalities for Fan Product of M -Matrices

CHEN Fu-bin

Science Department, Kunming University of Science and Technology Oxbridge College, Kunming 650106, China

Abstract: Estimation for the eigenvalue of nonsingular M -matrix is important in the theory of matrices. New inequalities of lower bounds on the minimum eigenvalue for the Fan product of nonsingular M -matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ have been given by means of Gerschgorin theorem and Brauer theorem. The new results are easier to calculate since they are depend on the entries of matrices. Numerical example shows that the new estimating formulas improve the results in the other literatures.

Key words: M -matrix; fan product; minimum eigenvalue; lower bound

责任编辑 廖 坤