第 45 卷 第 8 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 8 月
Vol. 45 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.08.002

严格对角占优 *M*-矩阵的逆矩阵的无穷大范数的新上界①

赵仁庆

楚雄师范学院 数学与统计学院,云南 楚雄 675000

摘要: 严格对角占优 M-矩阵作为一类特殊的 H-矩阵在数值代数中有着重要作用,尤其是 M-矩阵的逆矩阵的无穷大范数的上界估计,近年来得到广泛的关注和研究.引入了一组新的记号,给出了严格对角占优 M-矩阵及其逆矩阵元素关系的不等式,通过给出的新不等式得到了逆矩阵的无穷大范数的新上界.新估计式改进了某些现有文献的结果,同时数值算例说明了新估计式更精确.

关 键 词: 严格对角占优矩阵;M-矩阵;无穷大范数;上界

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)08-0006-06

H-矩阵和 M-矩阵是计算数学中的重要矩阵类,有着广泛的应用背景.对于这些特殊矩阵的性质、谱半径、逆矩阵的无穷大范数、最小特征值的界等方面,已得到许多研究[1-12],在这些研究中,严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的无穷大范数 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计是研究热点之一.本文继续这些问题的研究,给出了 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界的新估计式,这些估计式改进了相关结果.

1 预备知识

为叙述方便,先给出本文需要用到的一些记号.

用 $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵的集合,记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,$m\leqslant i,j,k\leqslant n$.

设:

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}\qquad a_{ii}\neq 0\qquad d_i=\frac{\sum\limits_{j\in N,\ j\neq i}|a_{ij}|}{a_{ii}}$$

$$J(\boldsymbol{A})=\left\{i\in N:|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\right\}\qquad u_i=\frac{\sum\limits_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|}{a_{ii}}$$

$$l_m=\max_{m\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{\sum\limits_{m\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right\}\qquad l_n=u_n=0$$

---

① 收稿日期:2019-08-23

基金项目:云南省科技计划青年项目(2017FD149).

作者简介:赵仁庆(1985-),女,讲师,主要从事矩阵理论及其应用的研究.

$$r_{ji}^{(1)}=\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}^{n}|a_{jk}|}\qquad j\neq i\qquad r_{ji}=r_{ji}^{(1)}$$

$$r_{ji}^{(m)}=\frac{|a_{ji}|}{(|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}^{n}|a_{jk}|)r_i^{(1)}r_i^{(2)}\cdots r_i^{(m-1)}}\qquad m=2,3,\cdots;\ i\neq j$$

$$r_i^{(m)}=\max_{j\neq i}\{r_{ji}^{(m)}\}\qquad m=1,2,\cdots$$

$$d_{ki}^{(m)}(\varepsilon)=\frac{|a_{ki}|+\sum\limits_{j\neq k,i}|a_{kj}|r_i^{(1)}(\varepsilon)r_i^{(2)}(\varepsilon)\cdots r_i^{(m)}(\varepsilon)}{|a_{kk}|r_i^{(1)}(\varepsilon)r_i^{(2)}(\varepsilon)\cdots r_i^{(m)}(\varepsilon)}\qquad k\neq i;\ m=1,2,\cdots$$

$$d_{ki}^{(m)}=\frac{|a_{ki}|+\sum\limits_{j\neq k,i}|a_{kj}|r_i^{(1)}r_i^{(2)}\cdots r_i^{(m)}}{|a_{kk}|r_i^{(1)}r_i^{(2)}\cdots r_i^{(m)}}\qquad k\neq i;\ m=1,2,\cdots$$

$$q_{ji}^{(m)}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i^{(1)}r_i^{(2)}\cdots r_i^{(m)}d_{ki}^{(m)}}{|a_{jj}|}$$

$$q_i^{(m)}=\max_{j\neq i}\{q_{ji}^{(m)}\}\qquad q^{(m)}=\max_{m\leqslant i\leqslant n}\{q_i^{(m)}\}\qquad m=1,2,\cdots$$

定义 1[1-2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果对任意的 $i,j\in N$，$i\neq j$，都有 $a_{ij}\leqslant 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Z- 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in Z_n$. 设 $\boldsymbol{A}\in Z_n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$. 当 $s\geqslant\rho(\boldsymbol{B})$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 M- 矩阵；当 $s>\rho(\boldsymbol{B})$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M- 矩阵.

定义 2[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果满足下面条件：

(a) $|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$i\in N$；

(b) $J(A)\neq\varnothing$；

(c) 对于任意 $i\in N$，$i\notin J(\boldsymbol{A})$，存在 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使得 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k}\neq 0$，$i_k\in J(\boldsymbol{A})$.

则称 $\boldsymbol{A}$ 为弱链对角占优矩阵.

定义 3[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若 $J(\boldsymbol{A})=N$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为行严格对角占优矩阵.

引理 1[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M- 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{(k,n)}$ $(k=1,\cdots,n-1)$ 也是弱链对角占优的 M- 矩阵. 这里 $\boldsymbol{A}^{(n_1,n_2)}$ 表示由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 的 n_1 至 n_2 行和 n_1 至 n_2 列的元素组成的子矩阵.

引理 2[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M- 矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{(2,n)}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})_{i,j=2}^{n}$，则对任意的 $i,j\in N$ 有

$$\alpha_{11}=\frac{1}{\Delta}\qquad \alpha_{i1}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1})\qquad \alpha_{1j}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{kj}(-a_{1k})\qquad \alpha_{ij}=\beta_{ij}+\alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1})$$

其中 $\Delta=a_{11}-\sum\limits_{k=2}^{n}a_{1k}\left[\sum\limits_{i=2}^{n}\beta_{ki}a_{i1}\right]$.

引理 3[4-5]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$ 满足

$$|\alpha_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i\tag{1}$$

2　$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的无穷大范数的上界估计

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$ 满足

$$|\alpha_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}|r_i^{(1)}d_{ki}^{(1)}}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i\tag{2}$$

证 设 $r_i^{(1)}(\varepsilon)=\max\left\{\dfrac{|a_{ji}|+\varepsilon}{|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}^{n}|a_{jk}|}\right\}$, $i\in N$. 由于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优矩阵，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $0<r_i^{(1)}(\varepsilon)<1$，设

$$R_i^{(1)}(\varepsilon)=\operatorname{diag}(r_i^{(1)}(\varepsilon),\cdots,r_i^{(1)}(\varepsilon),1,r_i^{(1)}(\varepsilon),\cdots,r_i^{(1)}(\varepsilon))$$

对于任意给定的 $i\in N$，下面证明 $\boldsymbol{A}R_i^{(1)}(\varepsilon)$ 是行严格对角占优 M- 矩阵. 事实上：

当 $j\neq i$ 时，有 $r_i^{(1)}(\varepsilon)>\dfrac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}^{n}|a_{jk}|}$，即 $|a_{jj}|r_i^{(1)}(\varepsilon)>|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}^{n}|a_{jk}|r_i^{(1)}(\varepsilon)$；

当 $j=i$ 时，有 $\sum\limits_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|r_i^{(1)}(\varepsilon)<\sum\limits_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|<|a_{ii}|$.

故 $\boldsymbol{A}R_i^{(1)}(\varepsilon)$ 是行严格对角占优 M- 矩阵.

因为 $\boldsymbol{A}R_i^{(1)}(\varepsilon)$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，设 $\boldsymbol{A}R_i^{(1)}(\varepsilon)=(a_{ij}^{(1)})$，$[\boldsymbol{A}R_i^{(1)}(\varepsilon)]^{-1}=\alpha_{ij}^{(1)}$. 则：$\alpha_{jk}^{(1)}=\dfrac{\alpha_{jk}}{r_i^{(1)}(\varepsilon)}$，$j\neq i$；$\alpha_{ik}^{(1)}=\alpha_{ik}$；$a_{ji}^{(1)}=a_{ji}$，$j\neq i$；$a_{jk}^{(1)}=a_{jk}r_i^{(1)}(\varepsilon)$，$k\neq i$. 由引理 3 得

$$|\alpha_{ji}^{(1)}|\leqslant\frac{|a_{ji}^{(1)}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}^{(1)}|d_{ki}^{(1)}(\varepsilon)}{|a_{jj}^{(1)}|}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i$$

即

$$\frac{|\alpha_{ji}|}{r_i^{(1)}(\varepsilon)}\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}|r_i^{(1)}(\varepsilon)d_{ki}^{(1)}(\varepsilon)}{|a_{jj}|r_i^{(1)}(\varepsilon)}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i$$

则

$$|\alpha_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}|r_i^{(1)}(\varepsilon)d_{ki}^{(1)}(\varepsilon)}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$|\alpha_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}|r_i^{(1)}d_{ki}^{(1)}}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i$$

类似定理 1 的证明，对 $r_i^{(m)}$ 关于 m 用数学归纳法可得到如下定理：

定理 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$ 满足

$$\begin{aligned}|\alpha_{ji}|\leqslant&\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq i,j}|a_{jk}|r_i^{(1)}r_i^{(2)}\cdots r_i^{(m)}d_{ki}^{(m)}}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}|=\\&q_{ji}^{(m)}|\alpha_{ii}|\leqslant q_i^{(m)}|\alpha_{ii}|\leqslant q^{(m)}|\alpha_{ii}|\qquad j\neq i\end{aligned}\tag{3}$$

特别地，当 $i=1$ 时，有

$$|\alpha_{j1}|\leqslant\frac{|a_{j1}|+\sum\limits_{k\neq j,1}|a_{jk}|r_1^{(1)}r_1^{(2)}\cdots r_1^{(m)}d_{ki}^{(m)}}{|a_{jj}|}|\alpha_{11}|=q_{j1}^{(1)}|\alpha_{11}|\leqslant q^{(1)}|\alpha_{11}|\leqslant|\alpha_{11}|\qquad j\neq 1\tag{4}$$

由文献[6]中引理 5 的证明方法可得：

定理 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$ 满足

$$\alpha_{ii}\leqslant\frac{1}{a_{ii}-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|q_{ji}^{(m)}}=\frac{1}{a_{ii}(1-d_iq_{ji}^{(m)})}\leqslant\frac{1}{a_{ii}(1-d_iq^{(m)})}\tag{5}$$

定理 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{(2,n)}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$ 且 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\beta_{ij})$，则

$$\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_{\infty} \leqslant \frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} q_{j1}^{(1)} |} + \frac{1}{(1 - d_1 q^{(1)})} \| \boldsymbol{B}^{-1} \|_{\infty} \tag{6}$$

证　设 $r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$，$M_{\boldsymbol{A}} = \| \boldsymbol{A}^{-1} \|_{\infty}$，$M_{\boldsymbol{B}} = \| \boldsymbol{B}^{-1} \|_{\infty}$. 则 $M_{\boldsymbol{A}} = \max_{i \in N} \{ r_i \}$，$M_{\boldsymbol{B}} = \max_{2 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=2}^{n} \beta_{ij} \right\}$. 由引理 2 及(5) 式可得

$$r_1 = \alpha_{11} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} = \alpha_{11} + \frac{1}{\Delta} \sum_{k=2}^{n} (-a_{1k}) \sum_{j=2}^{n} \beta_{kj} \leqslant \alpha_{11} + \alpha_{11} \sum_{k=2}^{n} (-a_{1k}) M_{\boldsymbol{B}} = \alpha_{11} + \alpha_{11} a_{11} d_1 M_{\boldsymbol{B}} \leqslant$$

$$\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{a_{11} d_1}{a_{11} (1 - d_1 q^{(1)})} M_{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{1 - d_1 q^{(1)}} M_{\boldsymbol{B}}$$

当 $2 \leqslant i \leqslant n$ 时，由引理 2 和(4) 式得

$$\sum_{k=2}^{n} \beta_{ik} (-a_{k1}) = \Delta \alpha_{i1} \leqslant \Delta q^{(1)} \alpha_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}} q^{(1)} \alpha_{11} = q^{(1)} < 1 \tag{7}$$

故对 $2 \leqslant i \leqslant n$，由引理 2 和(7) 式知

$$r_i = \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} = \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^{n} \left(\beta_{ij} + \alpha_{1j} \sum_{k=2}^{n} \beta_{ik} (-a_{k1}) \right) \leqslant q^{(1)} \alpha_{11} + \sum_{j=2}^{n} (\beta_{ij} + \alpha_{1j} q^{(1)}) =$$

$$r_1 q^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_{ij} \leqslant r_1 q^{(1)} + M_{\boldsymbol{B}}$$

若 $r_1 \leqslant q^{(1)} r_1 + M_{\boldsymbol{B}}$，则

$$M_{\boldsymbol{A}} = \max_{2 \leqslant i \leqslant n} | r_i | \leqslant q^{(1)} r_1 + M_{\boldsymbol{B}} \leqslant q^{(1)} \left(\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1 M_{\boldsymbol{B}}}{1 - d_1 q^{(1)}} \right) + M_{\boldsymbol{B}} =$$

$$\frac{q^{(1)}}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{1}{1 - d_1 q^{(1)}} M_{\boldsymbol{B}}$$

若 $r_1 > q^{(1)} r_1 + M_{\boldsymbol{B}}$，则

$$M_{\boldsymbol{A}} = r_1 \leqslant \frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{1 - d_1 q^{(1)}} M_{\boldsymbol{B}}$$

综上所述，有

$$\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_{\infty} \leqslant \max \{ r_1, r_i : 2 \leqslant i \leqslant n \} \leqslant$$

$$\max \left\{ \frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{(1 - d_1 q^{(1)})} \| \boldsymbol{B}^{-1} \|_{\infty}, \frac{q^{(1)}}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \frac{\| \boldsymbol{B}^{-1} \|_{\infty}}{(1 - d_1 q^{(1)})} \right\}$$

对定理 4 利用迭代法可得如下结论：

定理 5　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，则

$$\| \boldsymbol{A}^{-1} \|_{\infty} \leqslant \max \left\{ \frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{1}{a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{n} | a_{ij} | q_{ji}^{(i)}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{u_j}{(1 - u_j q^{(j)})} \right], \right.$$

$$\left. \frac{q^{(1)}}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} | a_{1j} | q_{j1}^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{q^{(i)}}{a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{n} | a_{ij} | q_{ji}^{(i)}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(1 - u_j q^{(j)})} \right] \right\} \tag{8}$$

定理 6　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，则

$$\max\left\{\frac{1}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|q_{j1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|q_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{(1-u_jq^{(j)})}\right],\right.$$

$$\left.\frac{q^{(1)}}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|q_{j1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q^{(i)}}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|q_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{(1-u_jq^{(j)})}\right]\right\}\leqslant$$

$$\frac{1}{a_{11}(1-u_1l_1)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}(1-u_il_i)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jl_j}\right]$$

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵，显然有 $q_{ji}^{(m)}\leqslant q^{(m)}\leqslant l_m<1$，$u_i<1$，故

$$\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|q_{ji}^{(i)}}=\frac{1}{a_{ii}-a_{ii}u_iq_{ji}^{(i)}}=\frac{1}{a_{ii}(1-u_iq_{ji}^{(i)})}\leqslant\frac{1}{a_{ii}(1-u_il_i)}$$

且

$$\frac{u_j}{1-u_iq^{(j)}}<\frac{1}{1-u_iq^{(j)}}\leqslant\frac{1}{1-u_il_i}$$

故定理 6 成立.

故定理 5 改进了文献[7] 中的定理 3.2，优于文献[8] 中的定理 3.4 和文献[2] 中的定理 3.3.

3 数值算例

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -0.6 & -0.1\\ -0.5 & 1 & -0.3\\ -0.2 & -0.3 & 1\end{bmatrix}$，显然 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵，应用文献[2] 中的定理 3.3、文献[7] 中的定理 3.2 及文献[8] 中的定理 3.4，分别计算得 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant 12.857\,1$，$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant 7.267\,7$，$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant 8.564\,9$. 应用本文定理 5 得 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty=3.700\,6$，事实上，$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty=3.506\,5$. 数值例子进一步验证了本文的结果比参考文献[2,7-8] 中的结果更为精确.

参考文献：

[1] 陈公宁. 矩阵理论与应用 [M]. 北京：科学出版社，2007：299.

[2] 黄廷祝，杨传胜. 特殊矩阵分析及应用 [M]. 北京：科学出版社，2007：33.

[3] SHIVAKUMAR P N，WILLIAMS J J，YE Q，et al. On Two-Sided Bounds Related to Weakly Diagonally Dominant M-Matrces with Application to Digital Circuit Dynamics [J]. Matrix Anal Appl，1996，17(2)：298-312.

[4] LI H B，HUANG T Z，SHEN S Q，et al. Lower Bounds for the Minimum Eigenvalue of the Hadamard Product of an M-Matrix and Its Inverse [J]. Linear Algebra Appl，2007，420：235-247.

[5] LI Y T，LIU X，YANG X Y，et al. Some New Lower Bounds for the Minimum Eigenvalue of the Hadamard Product of an M-Matrix and Its Inverse [J]. Electronic Journal of Linear Algebra，2011，22：630-643.

[6] 赵仁庆. 严格对角占优 M-的逆矩阵的无穷大范数的上界估计 [J]. 四川理工学院学报(自然科学版)，2016，29(2)：75-79.

[7] WANG P. An Upper Bound for $\|A^{-1}\|_\infty$ of Strictly Diagonally Dominant M-Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2009，431：667-673.

[8] CHENG G H，HUANG T Z. An Upper Bound for $\|A^{-1}\|_\infty$ of Strictly Diagonally Dominant M-Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2007，426：667-673.

[9] 王 永. 严格对角占优矩阵的逆矩阵的无穷大范数上界的新估计 [J]. 工程数学学报，2015，32(5)：719-725.

[10] 李艳艳，蒋建新，李耀堂. 严格对角占优 M-矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$上界估计式的改进 [J]. 云南大学学报(自然科学版)，

2015，37(1)：5-8.

[11] 赵建兴，桑彩丽. 严格 α_2-对角占优矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界序列 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：1-6.

[12] 钟　琴，王　妍，周　鑫，等. 非负矩阵 Hadamard 积谱半径上界的不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：77-81.

A New Upper Bound of Infinity Norms of Inverses for Strictly Diagonally Dominant *M*-Matrices

ZHAO Ren-qing

School of Mathematics and Statistics，Chuxiong Normal University，Chuxiong Yunnan 675000，China

Abstract：As a special class of H-matrices，the strictly diagonally dominant M-matrix plays an important role in the numerical algebra，especially estimation for upper bounds of the infinity norms for matrix inverse of M-matrices has been extensively concerned and researched in recent years. Some new notations have been introduced in this paper，and some inequalities of element relation on strictly diagonally dominant M-matrix and its inverse matrix been given. The new upper bound of the infinite norm of the inverse matrix has been obtained by the new inequalities. It is proved theoretically that the new upper bounds improve some existing results，and numerical examples show that the new estimation is more accurate.

Key words：strictly diagonal dominance matrix；M-matrix；infinity norms；upper bound.

责任编辑　廖　坤