第 45 卷 第 8 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 8 月
Vol. 45 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2020

DOI: 10. 13718/j. cnki. xsxb. 2020. 08. 003

Gorenstein FP_n-投射模[①]

张健芳， 高增辉

成都信息工程大学 应用数学学院，成都 610225

摘要：设 R 是一个环，且 $n\geqslant 1$ 是整数．作为 Gorenstein FP-投射模的推广，引入并研究了 Gorenstein FP_n-投射模，刻画了该模类的一些基本性质，并证明了 Gorenstein FP_n-投射模类是投射可解的，进而讨论了该模类的稳定性.

关 键 词：Gorenstein FP_n-投射模；投射可解类；稳定性

中图分类号：O154. 2 **文献标志码**：A **文章编号**：1000－5471(2020)08－0012－06

作为投射模的推广，文献[1]对双侧 Noether 环上的有限生成模定义了 G-维数为 0 的模．文献[2]在一般环上引入了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念．随后，Gorenstein 同调代数受到了代数学界的广泛关注，并且已成为现代代数学中的一个重要研究领域．文献[3]引入了投射可解类和内射可解类的概念，证明了 Gorenstein 投射模是投射可解类，Gorenstein 内射模是内射可解类．近年来，众多学者对这些 Gorenstein 同调模及其子类进行了细致的研究，例如，文献[4]研究了一类特殊的 Gorenstein 内射模，称之为 Gorenstein FP- 内射模，讨论了 Gorenstein FP- 内射模在右凝聚环上具有的良好性质．文献[5]研究了 Gorenstein 投射模的一个特殊子类——强 Gorenstein 平坦模．文献[6]分别把它们重新命名为 Ding 内射模和 Ding 投射模．文献[7]引入并研究了 Gorenstein FP- 投射模．此外，文献[8-9]对 n- 强 Gorenstein AC 投射模和 Gorenstein fp- 投射模进行了研究．文献[10]定义了模与环的 FP- 投射维数，并利用 FP- 投射模刻画了 Noether 环．文献[11]刻画了 Gorenstein 投射模范畴中的 FP- 投射模及维数．作为 FP- 投射模的推广，对任意整数 $n\geqslant 1$，定义了 FP_n- 投射模：若对任意 FP_n- 内射右 R- 模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$，则称右 R- 模 M 为 FP_n- 投射模．我们用 FP_n-proj 表示所有 FP_n- 投射右 R- 模组成的模类.

本文借助于 FP_n- 投射模类引入并研究了 Gorenstein FP_n- 投射模，阐明了该类模与其他模类之间的关系，并证明了 Gorenstein FP_n- 投射模类是投射可解的，进而讨论了该模类的稳定性．本文中所讨论的环均指有单位元的结合环，模指酉模，用 Mod-R 表示所有右 R- 模组成的范畴.

定义 1[12] (a) 设 P 为右 R- 模．若存在右 R- 模的正合列 $F_n\longrightarrow F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow P\longrightarrow 0$，其中每个 F_i 是有限生成的自由模(等价地，投射模)，则称右 R- 模 P 为 n- 表现模.

(b) 设 M 为右 R- 模．若对任意的 n- 表现右 R- 模 P，均有 $\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$，则称 M 为 FP_n- 内射模.

定义 2[7] 如果存在投射右 R- 模的正合列 $\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow P^0\longrightarrow P^1\longrightarrow\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\longrightarrow P^1)$，且对任意 FP- 投射右 R- 模 Q，该序列在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$ 作用下仍是正合的，则称右 R- 模 M 是 Gorenstein FP- 投射模.

定义 3[3] 设 $\mathscr{A}$ 是 R- 模类．若 $\mathscr{A}$ 包含所有的投射模，且对任意的短正合列 $0\longrightarrow X'\longrightarrow X\longrightarrow X''\longrightarrow 0$，其中 $X'\in\mathscr{A}$，有 $X\in\mathscr{A}$ 当且仅当 $X'\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 是投射可解的.

定义 4 令 M 为右 R- 模，若存在投射右 R- 模的正合列

① 收稿日期：2019－10－08

基金项目：国家自然科学基金项目(11971225).

作者简介：张健芳(1993－)，女，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

通信作者：高增辉，教授.

$$P = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \longrightarrow P^0)$，且对任意的 FP_n- 投射右 R- 模 Q，$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, Q)$ 是正合的．则称 M 为 Gorenstein FP_n- 投射模．

注 1　(a) 由定义 4 即知，每个投射模都是 Gorenstein FP_n- 投射模．由于 FP_n- 完全投射分解的直和仍为 FP_n- 完全投射分解，因此，Gorenstein FP_n- 投射模关于直和封闭．

(b) 对任意整数 $n \geqslant 1$，由 FP_n- 投射模的定义可知，FP_n- 投射模是介于投射模和 FP- 投射模之间的模类，从而有{Gorenstein FP- 投射模} $\subseteq$ {Gorenstein FP_n- 投射模} $\subseteq$ {Gorenstein 投射模}．

(c) 若 $P = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \cdots$ 是 FP_n- 完全投射分解，则由对称性可知，P 的所有像、核和余核都是 Gorenstein FP_n- 投射模．进而，对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q 和任意整数 i，有 $\mathrm{Ext}_R^1(L_i, Q) = 0$，其中 $L_i = \mathrm{Im}(P_i \longrightarrow P_{i-1})$．

引理 1　设 M 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模，则：

(i) 对所有 FP_n- 投射维数有限的右 R- 模 Q 及任何 $i \geqslant 1$，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, Q) = 0$；

(ii) M 为投射模，或者 M 的 FP_n- 投射维数无穷大．

证　(i)　设 M 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模，则存在一个在函子 $\mathrm{Hom}(-, FP_n\text{-proj})$ 作用下保持正合的右 R- 模正合列 $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射模．于是对任何 FP_n- 投射右 R- 模 F 及任何 $i \geqslant 1$，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, F) = 0$．再由维数转换易得，对任何的 FP_n- 投射维数有限的右 R- 模 Q 和任何 $i \geqslant 1$，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, Q) = 0$．

(ii)　不妨设 $FP_n\text{-pd}(M) \leqslant m$ 且 $1 \leqslant m < \infty$．则存在一个在函子 $\mathrm{Hom}(-, FP_n\text{-proj})$ 作用下仍保持正合的右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 $P_0, P_1, \cdots, P_{m-1}$ 是投射模，P_m 是 FP_n- 投射的．令 $K = \mathrm{Ker}(P_0 \longrightarrow M)$，则 $FP_n\text{-pd}(K) \leqslant m-1$．再由(i)即知 $\mathrm{Ext}_R^1(M, K) = 0$．故正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是分裂的，从而 M 是投射模．

推论 1　右 R- 模 M 是投射模当且仅当 M 是 FP_n- 投射模且又是 Gorenstein FP_n- 投射模．

引理 2　设 M 是右 R- 模，Q 是 FP_n- 投射右 R- 模．若对任意正整数 i 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, Q) = 0$，则对 M 的任意投射分解 $\mathscr{P}$，$\mathrm{Hom}_R(\mathscr{P}, Q)$ 是正合的．

证　不妨设 $\mathscr{P} = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 为 M 的投射分解．令 $K_i = \mathrm{Ker}(P_i \longrightarrow P_{i-1})(i \geqslant 0)$，其中 $M = P_{-1}$．则有下面的正合列

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0 \\
\vdots \\
0 \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \longrightarrow K_{i-1} \longrightarrow 0 \\
\vdots
\end{gathered}$$

对任意整数 $i \geqslant 0$，有同构 $\mathrm{Ext}_R^1(K_i, Q) \cong \mathrm{Ext}_R^2(K_{i-1}, Q) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(K_0, Q) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+2}(M, Q) = 0$．于是得上面短正合列在 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下仍保持正合．将这一系列短正合列接起来可得长正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1, Q) \longrightarrow \cdots$．因此，$\mathrm{Hom}_R(\mathscr{P}, Q)$ 是正合的．

命题 1　设 M 是右 R- 模．则 M 是 Gorenstein FP_n- 投射模当且仅当存在右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模，N 是 Gorenstein FP_n- 投射模．

证　*必要性*　由注 1(c) 可得．

充分性　设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 是右 R- 模的短正合列，其中 P 是投射模，N 是 Gorenstein FP_n- 投射模．于是又存在右 R- 模的正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q，正合列(1)在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下仍是正合的．用 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用于正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$，再由注 1(c) 可得正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, Q) \longrightarrow 0$，进而对任意 $i \geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M, Q) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(N, Q) = 0$．下面考虑模 M 的投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2}$$

令 $K_i = \mathrm{Im}(P_i \longrightarrow P_{i-1})(i \geqslant 1)$. 根据引理2的证明得，对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q 及任意整数 $i \geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(K_j, Q) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+j}(M, Q) = 0$. 于是正合列(2)在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下仍是正合的. 将正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 与序列(1),(2)粘合起来即得右 R- 模的正合列 $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$，其中 $M \cong \mathrm{Ker}(P \longrightarrow P^1)$，且对任意 FP_n- 投射右模 Q，该序列在 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下保持正合. 因此，M 是 Gorenstein FP_n- 投射的.

命题 2　若每个右 R- 模都是 Gorenstein FP_n- 投射的，则 R 是 QF- 环.

证　设 M 是内射右 R- 模. 则 M 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 由命题1知，存在右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模，N 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 由于 M 是内射模，故有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) = 0$，即该正合列可裂. 所以 M 是投射的，从而 R 是 QF- 环.

定理 1　Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模类是投射可解的.

证　显然，Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模类包含所有投射模. 现在设 $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ 是右 R- 模的短正合列，其中 M'' 是 Gorenstein FP_n- 投射的. 下面证明 M 是 Gorenstein FP_n- 投射模当且仅当 M' 是 Gorenstein FP_n- 投射模.

设 M' 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模. 则存在以下两个右 R- 模的正合列：

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P'_0 \longrightarrow P'_1 \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow P''_0 \longrightarrow P''_1 \longrightarrow \cdots$$

其中每个 P'_i, P''_i 是投射的，且对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q，上面两序列在 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下保持正合. 考虑下面的推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

其中 λ 是嵌入映射，π 是标准投影映射. 由注1(c)可得，$\mathrm{Ext}_R^1(M'', Q) = 0$. 注意到每个投射模都是 FP_n- 投射的，从而 $\mathrm{Hom}_R(M, P'_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', P'_0) \longrightarrow 0$ 是正合的. 故存在映射 σ: $M \longrightarrow P'_0$，使得 $\alpha = \sigma f$. 定义 γ: $M \longrightarrow P'_0 \oplus P''_0$，即对任意的 $x \in M$，$\gamma(x) = (\lambda\sigma(x), \beta g(x))$. 显然，$\gamma$ 是 R- 模同态且使得推出图为交换图. 重复上面的方法继续做下去，则得正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P'_0 \oplus P''_0 \longrightarrow P'_1 \oplus P''_1 \longrightarrow \cdots \tag{3}$$

再由文献[15]的定理6.3可知，$\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 保持序列(3)正合.

再设 M 的投射分解为

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{4}$$

对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q 和任意正整数 i，由序列 $\mathrm{Ext}_R^i(M'', Q) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M, Q) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(M', Q)$ 的正合性可得 $\mathrm{Ext}_R^i(M, Q) = 0$. 再利用引理2即得，$\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 保持序列(4)正合. 将正合列(3)和(4)粘接起来即得投射右 R- 模的正合列

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P'_0 \oplus P''_0 \longrightarrow P'_1 \oplus P''_1 \longrightarrow \cdots \tag{5}$$

使得 $M = \mathrm{coker}(P_1 \longrightarrow P_0)$，且正合列(5)在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下仍是正合的. 因此，M 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模.

现在设 M 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模. 由命题1知，存在右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模，N 是 Gorenstein FP_n- 投射的. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在短正合列 $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow C \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 中，由于 M'' 和 N 是 Gorenstein FP_n- 投射的，故由前面的证明可得，C 亦是 Gorenstein FP_n- 投射的．考虑第二行正合列 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0$，再由命题 1 得，$M'$ 是 Gorenstein FP_n- 投射模．

推论 2　Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模类关于直和项封闭．

证　设 M 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模，A 是 M 的直和项．则存在右 R- 模 B，使得 $M = A \oplus B$．由注 1(a) 可知，Gorenstein FP_n- 投射模关于直和封闭，于是令 $C = A \oplus B \oplus A \oplus B \oplus \cdots$，则 C 是 Gorenstein FP_n- 投射模．注意到 $C \cong A \oplus C$，即得 $A \oplus C$ 是 Gorenstein FP_n- 投射的．考虑下面的分裂正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0$，再由定理 1 可得，$A$ 是 Gorenstein FP_n- 投射模．

命题 3　设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 是右 R- 模正合列，其中 K_0, K_1 是 Gorenstein FP_n- 投射模．则有正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K' \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 P, Q 是投射模，K, K' 是 Gorenstein FP_n- 投射模．

证　因为 K_1 是 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模，故存在右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模，K_2 是 Gorenstein FP_n- 投射模．令 $H = \mathrm{Im}(K_0 \longrightarrow K_1)$，考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_2 \arrow[d] & K_2 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

和拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K_2 \arrow[d] & K_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & K' \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在正合列 $0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow K' \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$ 中，因为 K_0, K_2 是 Gorenstein FP_n- 投射模，故 K' 是 Gorenstein FP_n- 投射模．于是粘合短正合列 $0 \longrightarrow D \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 与 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K' \longrightarrow D \longrightarrow 0$，即得正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K' \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模，K' 是 Gorenstein FP_n- 投射模．

同理，可得正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 Q 是投射模，K 是 Gorenstein FP_n- 投射模．

定理 2　设 $m \geqslant 1$，且 $0 \longrightarrow A \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 是右 R- 模的正合列，其中每个 K_i 是 Gorenstein FP_n- 投射模．则存在右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow B \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow$

$P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow K \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射模，K 是 Gorenstein FP_n- 投射模.

证　对 m 用归纳法. 若 $m = 1$，则有右 R- 模正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow K_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 K_0 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 可知，有正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P_0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$，其中 P_0 是投射模，K 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 此时，根据下面的拉回图即得证：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

现在设 $m \geqslant 2$，且 $0 \longrightarrow A \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 是右 R- 模的正合列，其中 K_i 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 令 $M = \mathrm{Ker}(K_1 \longrightarrow K_0)$. 则有正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$. 由命题 3 知，存在右 R- 模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K_1' \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$，其中 P_0 是投射模，K'_1 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 记 $N' = \mathrm{Im}(K_1' \longrightarrow P_0)$，则粘合正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 与 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K_1' \longrightarrow N' \longrightarrow 0$，可得正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow K_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_2 \longrightarrow K_1' \longrightarrow N' \longrightarrow 0$. 再由归纳假设，可得结论成立.

本文最后讨论 Gorenstein FP_n- 投射模范畴的稳定性. 记 $[\mathscr{GFP}_n(R)]^2 = \{M \in \text{Mod-}R \mid$ 存在一个在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{FP}_n\text{-proj})$ 作用下保持正合的 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模的正合列 $\cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G_{-1} \longrightarrow G_{-2} \longrightarrow \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{coker}(G_1 \longrightarrow G_0)\}$.

引理 3　设 M 是右 R- 模. 则 M 有一个 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{FP}_n\text{-proj})$ 保持正合的右 R- 模正合列 $\cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中每个 G_i 是 Gorenstein FP_n- 投射模，当且仅当 M 有一个 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{FP}_n\text{-proj})$ 保持正合的右 R- 模正合列 $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射模.

证　充分性　显然成立.

必要性　设 $\cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是一个 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{FP}_n\text{-proj})$ 保持正合的右 R- 模正合列，其中每个 G_i 是 Gorenstein FP_n- 投射模. 令 $K_1 = \mathrm{Ker}(G_0 \longrightarrow M)$，$K_2 = \mathrm{Ker}(G_1 \longrightarrow G_0)$. 则有正合列 $\cdots \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$，$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 及 $0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$，且对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q，它们在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下仍是正合的. 由于 G_0 是 Gorenstein FP_n- 投射模，故存在短正合列 $0 \longrightarrow G' \longrightarrow P \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0$，其中 P 是投射的，G' 是 Gorenstein FP_n- 投射的. 考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & G' \arrow[d] & G' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

则所有行与列在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 作用下均是正合的. 再考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_1' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在正合列 $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G'_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0$ 中，由于 G',G_1 是 Gorenstein FP_n- 投射的，故利用定理 1 可知，G'_1 是 Gorenstein FP_n- 投射模．注意到 $0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow G'_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0$ 在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,\ FP_n\text{-proj})$ 作用下保持正合，于是 B 有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\ FP_n\text{-proj})$ 保持正合的右 R- 模正合列 $\cdots \longrightarrow G_3 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G'_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0$，其中每个 G_i 和 G'_1 是 Gorenstein FP_n- 投射模．继续重复上面的证明过程，可得结论成立．

对偶地，可得下面的结论：

引理 4　设 M 是右 R- 模．则 M 有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\ FP_n\text{-proj})$ 保持正合的右 R- 模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow G^0 \longrightarrow G^1 \longrightarrow \cdots$，其中每个 G^i 是 Gorenstein FP_n- 投射模，当且仅当 M 有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\ FP_n\text{-proj})$ 保持正合的右 R- 模正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$，其中每个 P^i 是投射模．

定理 3　对任意环 R 和任意整数 $n \geqslant 1$，我们有 $[\mathscr{GFP}_n(R)]^2 = \mathscr{GFP}_n(R)$．

证　显然，每个投射模都是 Gorenstein FP_n- 投射的，故有 $\mathscr{GFP}_n(R) \subseteq [\mathscr{GFP}_n(R)]^2$．

现在设 $M \in [\mathscr{GFP}_n(R)]^2$．则存在 Gorenstein FP_n- 投射右 R- 模的正合列 $\cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G_{-1} \longrightarrow G_{-2} \longrightarrow \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Im}(G_0 \longrightarrow G_0)$，且对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q，该正合列在 $\mathrm{Hom}_R(-,\ Q)$ 作用下保持正合．再利用引理 3 和引理 4 可得，存在一个投射右 R- 模的正合列 $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \longrightarrow P_{-1})$，且对任意 FP_n- 投射右 R- 模 Q，该序列在 $\mathrm{Hom}_R(-,\ Q)$ 作用下仍保持正合．故 M 是 Gorenstein FP_n- 投射的．

参考文献：

[1] AUSLANDER M，BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Providence，Rhode Island：Amer Math Soc，1969.

[2] ENOCHS E E，JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Math Z，1995，220(4)：611-633.

[3] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. J Pure Appl Algebra，2004，189(1-3)：167-193.

[4] MAO L X，DING N Q. Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules [J]. J Algebra Appl，2008，7(4)：491-506.

[5] DING N Q，LI Y L，MAO L X. Strongly Gorenstein Flat Modules [J]. J Aust Math Soc，2009，86(3)：323-338.

[6] GILLESPIE J. Model Structures on Modules Over Ding-Chen Rings [J]. Homology，Homotopy Appl，2010，12(1)：61-73.

[7] 朱辉辉. Gorenstein FP-投射模 [J]. 山东大学学报(理学版)，2011，46(2)：110-113.

[8] 李倩倩，杨晓燕. n-强 Gorenstein AC 投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：36-40.

[9] 刘仲奎，陈文静. Gorenstein fp-投射模和 Gorenstein fp-内射模 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2014，50(4)：1-5.

[10] MAO L X，DING N Q. FP-Projective Dimensions [J]. Comm Algebra，2005，33(4)：1153-1170.

[11] 魏宝军，杨晓燕. GProjR 中的 FP-投射模及维数 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(10)：58-61.

[12] BRAVO D，PÉRE M A. Finiteness Conditions and Cotorsion Pairs [J]. J Pure Appl Algebra，2017，221(6)：1249-1267.

[13] 周德旭. n-凝聚环的若干刻画 [J]. 福建师范大学学报(自然科学版)，2003，19(4)：9-12.

[14] HUANG C H，HUANG Z Y. Gorenstein Syzygy Modules [J]. J Algebra，2010，324(12)：3408-3419.

[15] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York：Academic Press，1979.

On Gorenstein FP_n-Projective Modules

ZHANG Jian-fang，　GAO Zeng-hui

School of Applied Mathematics，Chengdu University of Information Technology，Chengdu 610225，China

Abstract：Let R be a ring and $n \geqslant 1$ be an integer. As a generalization of Gorenstein FP-projective modules，Gorenstein FP_n-projective modules have been introduced and investigated in this paper. After discussing some basic homological properties of Gorenstein FP_n-projective modules，it is proved that the class of Gorenstein FP_n-projective modules is projectively resolving. Finally，the stability of Gorenstein FP_n-projective modules has also been discussed.

Key words：Gorenstein FP_n-projective module；projectively resolving class；stability

责任编辑　廖　坤