第 45 卷 第 8 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2020 年 8 月
Vol. 45 No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.08.004

若干图的顶点魔幻全标号①

席晓慧，　李敬文，　孙　帅

兰州交通大学 电子与信息工程学院，兰州 730070

摘要： 设计了一种针对顶点魔幻解空间的递归搜索算法，并利用顶点魔幻全标号的特性以及一系列剪枝函数对其进行优化，实现了对有限点内任意简单连通图的顶点魔幻全标号的求解. 通过对已经得到的结果进行分析总结，发现了关于龙图、图$C_4^{(m)}$、图$F_n^{(2)}$ 以及一类用联图 $G \nabla H$ 来刻画的图的标号规律，总结出若干定理.

关　键　词： 顶点魔幻全标号；算法；剪枝函数；连通图

中图分类号：O157.5　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2020)08－0018－07

图论[1] 来源于18世纪提出的一个实际应用问题——哥尼斯堡七桥问题. 在1736年，瑞士数学家欧拉解决了该问题，并开创了图论这一新的数学分支，从此，图论得到了众多学者的研究，并不断发展. 图论的研究应用涵盖了计算机科学、信息学、密码学等多个领域[2]，具有重要的理论意义和现实意义.

图标号是图论中的重要分支之一，起源于优美猜想，后来学者提出优美标号、$(p, 1)$-全标号和魔幻标号等，优美标号是至今图论中重要的研究领域[3-4]. 文献[5]引入了顶点魔幻全标号的概念. 通过对特殊图和一些较容易被刻画的图的研究，众多研究者已经发表了许多关于顶点魔幻全标号的研究成果. 文献[6-11]证明了图C_n、图 K_n、图 T_n、正则图等特殊图的标号结论. 但是为了更好地与实际问题相结合，只使用特殊图是完全不够的，而已有的研究成果中对于一般图的研究又比较少见.

针对以上问题，本文设计了一种针对顶点魔幻解空间的递归搜索算法，并利用顶点魔幻全标号的特性以及一系列剪枝函数对其进行优化，得到了有限点内所有图的顶点魔幻全标号，然后从结果集中分析所有图的标号规律，得到了龙图、图 $C_4^{(m)}$、图 $F_n^{(2)}$ 以及 $G \nabla H$ 的标号规律，得出相关结论.

1　基础知识

文中 S_n 定义为中心节点为 v_0 且包含 n 个叶子节点的星图，扇图 F_n 定义为中心节点为 v_0 且包含 n 个扇页顶点的扇图. 图 $G(p, q)$ 表示的是包含 p 个顶点、q 条边，且顶点集合为 $V(G)$，边集合为 $E(G)$ 的简单连通图.

定义 1[12]　对于给定的图 $G(p, q)$，如果存在常数 k 和一一映射 $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$，使得对每个顶点 $v \in V(G)$ 都满足 $f(v) + \sum\limits_{u \in N(v)} f(uv) = k$，其中 $N(v)$ 表示与顶点 v 所关联的顶点的集合，k 为魔幻常数，则称 f 是图G 的顶点魔幻全标号，简称 VMTL，如果一个图不存在 VMTL，则称其为非 VMTL 图，简称 NVMTL.

定义 2　将图 G 的叶子节点与图 H 的中心点连接，所得的图记为 $G \nabla H$. 例如：

(i) $G = S_m$，$H = C_n$，联图为$S_m \nabla C_n (n \geqslant 2, m \geqslant 3)$，示例如图 1(a) 所示；

(ii) $G = S_m$，$H = F_n$，联图$S_m \nabla F_n (m \geqslant 2, n \geqslant 3)$，示例如图 1(b) 所示.

---

① 收稿日期：2019－07－06

基金项目：国家自然科学基金项目(11461038).

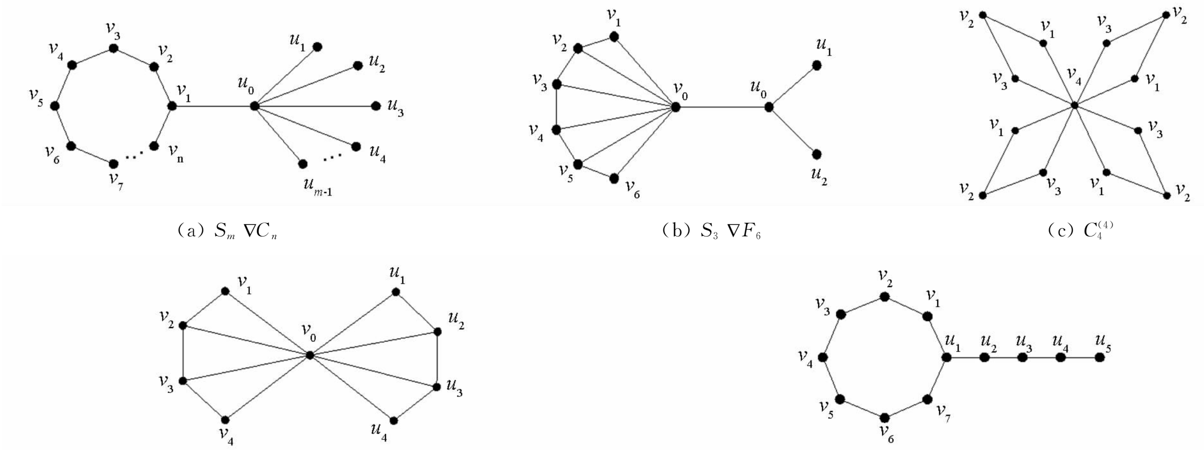
作者简介：席晓慧(1990－)，女，硕士研究生，主要从事图论算法及其应用的研究.

通信作者：李敬文，教授.

定义 3[12]　具有公共点的 m 个 C_n 组成的图称为 m 个 C_n 的并图，记为 $C_n^{(m)}$ $(n \geqslant 3)$，示例如图 1(c) 所示.

定义 4[12]　将两个扇图 F_n 的中心点 v_0 连接，即具有公共点的 2 个 F_n 组成的图，记为 $F_n^{(2)}$ $(n \geqslant 2)$，示例如图 1(d) 所示.

定义 5[13]　将 P_k 的一个端点与 C_n 的一个点连接，所得的图称为龙图，记为 $C_n * P_k$，示例如图 1(e) 所示.



(a) $S_m \nabla C_n$　　(b) $S_3 \nabla F_6$　　(c) $C_4^{(4)}$

(d) $F_4^{(2)}$　　(e) $C_8 * P_5$

图 1　示例图

对于给定的图 $G(p,\ q)$，VMTL 算法是基于搜索解空间的，进而找出 VMTL，为了方便说明该算法，给出 VMTL 解空间 $\varphi(p,\ q,\ k)$ 的定义：

定义 6　对于度序列 $(d(v_i),\ i = 1,2,\cdots,p)$ 相同的一类图 $G(p,\ q)$，都存在一个表(如表 1)，设 u，$v \in V(G)$，$uv \in E(G)$，映射 f：$V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1,\ 2,\ \cdots,\ p+q\}$，满足 $f(v), f(uv) \in [1,\ p+q]$，$f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv) = k$，$N(v)$ 表示与顶点 v 所关联的顶点的集合，则称表 1 为图 $G(p,\ q)$ 的 VMTL 解空间 $\varphi(p,\ q,\ k)$.

表 1　VMTL 解空间 $\varphi(p,\ q,\ k)$

$d(v)$	点 v 及关联边标号			
1	$1,\ k-1$	$2,\ k-2$	…	$p+q,\ k-(p+q)$
2	$1,\ 2,\ k-3$	$1,\ 3,\ k-4$	…	$p+q-1,\ p+q,\ k-2p-2q+1$
…	…	…	…	…
$p-1$	$1,\ 2,\ \cdots p-1,\ k-\frac{(p-1)p}{2}$	$1,\ 3,\ \cdots p,\ k-\frac{(p+1)p}{2}-2$	…	$q+2,\ q+3,\ \cdots,\ p+q,\ k-\frac{(p-1)(p+2q+2)}{2}$

对于度序列相同的一类图 $G(p,\ q)$ 的 VMTL 解空间 $\varphi(p,\ q,\ k)$ 具有如下性质：

(i) $\varphi(p,\ q,\ k)$ 中可以组合构造的图集合记为 $G^*(p,\ q)$，其中包含连通图和非连通图，但都存在 VMTL；

(ii) 给定图 $G(p,\ q)$，若其存在 VMTL，则必然包含在 $G^*(p,\ q)$ 集合中，即解空间 $\varphi(p,\ q,\ k)$ 具有完备性；

(iii) 如果图 $G(p,\ q)$ 不包含在 $G^*(p,\ q)$ 集合中，则它不存在 VMTL.

2　VMTL 算法

2.1　基本计算

对于图 $G(p,\ q)$，当图 G 满足 VMTL 时，存在映射：f：$V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1,\ 2,\ \cdots,\ p+q\}$，即所有的标号总和 C 为 $C = S_p + S_q = \sum_{i=1}^{p+q} i$，其中 S_p 和 S_q 分别表示点和边标号值的总和.

图 G 的每个顶点满足 $f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv) = k$，即 $S_p + 2S_q = pk$.

当图 G 满足 VMTL 时，得到边和 S_q、魔幻常数 k 的取值范围分别为

$$\sum_{i=1}^{q} i \leqslant S_q \leqslant \sum_{i=p+1}^{p+q} i \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{q} i + C}{p} \leqslant k \leqslant \frac{\sum\limits_{i=p+1}^{p+q} i + C}{p}$$

2.2 VMTL 算法

算法思路如图 2 所示:

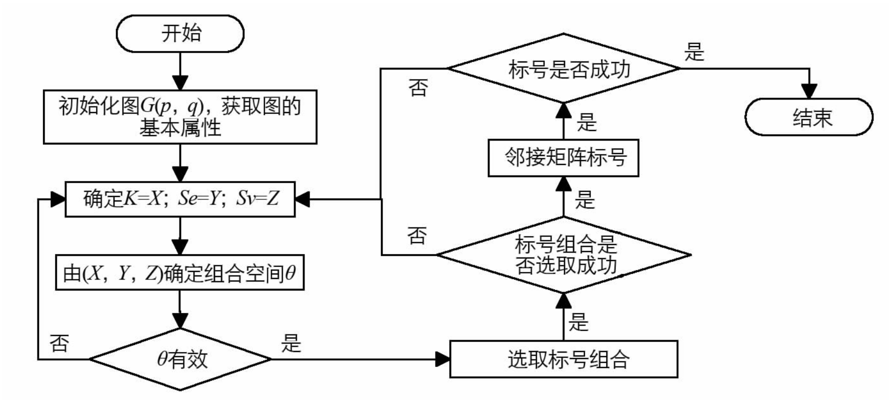


图 2　算法流程图

VMTL 算法步骤如下:

输入:图 $G(p, q)$ 的邻接矩阵文件;

输出:VMTL 矩阵或非 VMTL 图;

begin

1. 读取图 G 的邻接矩阵 AdjaMatrix
2. get p, q, degree　/* p 为图点的个数, q 为边的个数, degree 为度序列 */
3. G.isSuccess ← false
4. $C \leftarrow (p+q)(p+q+1)/2$
5. for $i = \min$; $i < \max$; $i += p$　/* min 和 max 分别代表图 G 边标号之和的最小值和最大值 */
6. $k \leftarrow (i + C)/p$　/* k 为顶点魔幻常数 */
7. get $\varphi(p, q, k)$　/* tuple$(a_1, a_2, \cdots, a_m) \in \varphi(p, q, k)$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = k$ */
8. filter by degree get $\varphi'(p, q, k)$
9. search $\varphi'(p, q, k)$
10. if(tuples → AdjaMatrix)
11. G.isSuccess ← true
12. 　break
13. 　end if
14. end for
15. if($\mathrm{graph}_{i.}$isSuccess == true)
16. 　　output($\mathrm{ResultMatrix}_i$)
17. 　else
18. 　　output(AdjaMatrix)
19. end if
20. return
21. end

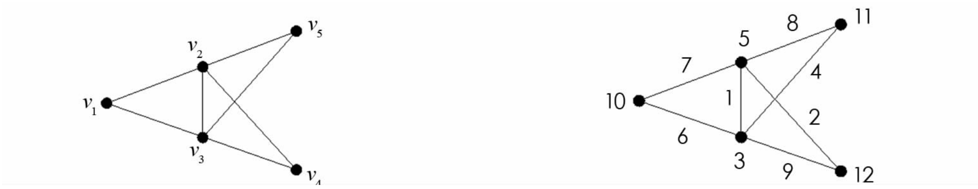
引理 1　给定图 $G(p, q)$, 其 VMTL 解空间为 $\varphi(p, q, k)$, 用 VMTL 算法搜索, 如果图 G 存在 VMTL, 则 VMTL 算法在 $\varphi(p, q, k)$ 上一定有解, 否则图 G 不存在 VMTL.

例 1　表 2 为图集 $G(5, 7)$ 中度序列为 311 的图的解空间, 图 3 为图集中一个图的 VMTL.

表 2　解空间 $\varphi(5,7,23)$

$d(v)$	点 v 及关联边标号						
$d(v_1)=d(v_4)=$	1,10,12	$\underline{2,9,12}$	2,10,11	3,8,12	3,9,11	4,7,12	$\underline{4,8,11}$
$d(v_5)=2$	4,9,10	5,6,12	5,7,11	5,8,10	$\underline{6,7,10}$	6,8,9	
	1,2,3,5,12	1,2,3,6,11	1,2,3,7,10	1,2,3,8,9	1,2,4,5,11	1,2,4,6,10	1,2,4,7,9
$d(v_2)=d(v_3)=4$	1,2,5,6,9	$\underline{1,2,5,7,8}$	1,3,4,5,10	$\underline{1,3,4,6,9}$	1,3,4,7,8	1,3,5,6,8	1,4,5,6,7
			2,3,4,5,9	2,3,4,6,8	2,3,5,6,7		

注：表中下划线标号组合为标成功的 VMTL 组合.



（a）示例图　　　（b）标号图

图 3　图的 VMTL

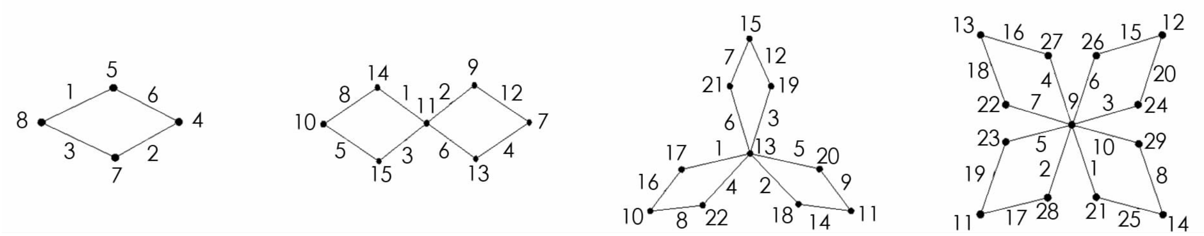
3　算法结论及证明

定理 1　对于图$C_4^{(m)}$，当 $1\leqslant m\leqslant 4$ 时存在 VMTL，当 $m\geqslant 5$ 时不存在 VMTL.

证　设 $V(C_4)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，即 $|V(C_4^{(m)})|=3m+1$，$|E(C_4^{(m)})|=4m$，所以

$$f(V(C_4^{(m)}))\cup f(E(C_4^{(m)}))\longrightarrow\{1, 2, \cdots, 7m+1\}$$

由 VMTL 算法得到图$C_4^{(m)}$（$1\leqslant m\leqslant 4$）的 VMTL 如图 4 所示：



（a）$C_4^{(1)}$　　（b）$C_4^{(2)}$　　（c）$C_4^{(3)}$　　（d）$C_4^{(4)}$

图 4　图$C_4^{(m)}$ 的 VMTL

对于图$C_4^{(m)}$，k 取最小值时，图$C_4^{(m)}$ 的最大度点以及其关联边取最小标号值

$$k\geqslant f(v)+\sum_{u\in N(v)}f(uv)=1+\sum_{2}^{2m+1}i=2\,m^2+3m+1$$

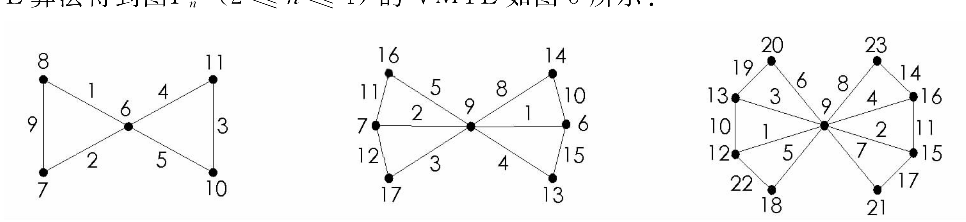
k 取最大值时，$C_4^{(m)}$ 中 $2m$ 条边加两次，即 $3mk\leqslant\sum_{2}^{7m+1}i+\sum_{5m+2}^{7m+1}i=\dfrac{1}{2}(73\,m^2+27m)$.

可得 $2m^2+3m+1\leqslant\dfrac{1}{2(3m)}(73m^2+27m)$．由$12m^2-55m-21\leqslant 0$，得到 $1\leqslant m\leqslant 4$，所以，定理 1 成立.

定理 2　对于图$F_n^{(2)}$，当 $2\leqslant n\leqslant 4$ 时存在 VMTL，当 $n\geqslant 5$ 时不存 VMTL.

证　设扇图 F_n 的顶点集合 $V(F_n)=\{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，即 $|V(F_n^{(2)})|=2n+1$，$|E(F_n^{(2)})|=4n-2$，所以 $f(V(F_n^{(2)}))\cup f(E(F_n^{(2)}))\longrightarrow\{1, 2, \cdots, 6n-1\}$.

由 VMTL 算法得到图$F_n^{(2)}$（$2\leqslant n\leqslant 4$）的 VMTL 如图 5 所示：



（a）$F_2^{(2)}$　　（b）$F_3^{(2)}$　　（c）$F_4^{(2)}$

图 5　$F_n^{(2)}$ 的 VMTL

k 取最小值时，图$F_n^{(2)}$ 的最大度点以及其关联边取最小标号值，即

$$k \geqslant f(v_0) + \sum_{u \in N(v_0)} f(uv_0) = 1 + \sum_{2}^{2n+1} i = 2n^2 + 3n + 1$$

k 取最大值时，图$F_n^{(2)}$ 中边缘 $n-1$ 条边加两次，所以取最大标号值，即

$$2nk \leqslant \sum_{2}^{6n-1} i + \sum_{4n+2}^{6n-1} i = 28n^2 - 12n - 2$$

可得 $2n^2 + 3n + 1 \leqslant \frac{1}{2n}(28n^2 - 12n - 2)$，$2n^3 - 11n^2 + 7n + 1 \leqslant 0$，得到 $1 \leqslant n \leqslant 4$. 所以，定理 2 成立.

定理 3 对于图$C_3 * P_k$，当 $2 \leqslant k \leqslant 14$ 时存在 VMTL.

证 设 $V(C_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$V(P_k) = \{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_k\}$，即 $|V(C_n * P_k)| = n + k - 1$，$|E(C_n * P_k)| = n + k - 1$，所以 $f(V(C_n * P_k)) \cup F(E(C_n * P_k)) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, 2n + 2k - 2\}$.

k 取最小值时，图$C_n * P_k$ 的最大度点以及其关联边取最小标号值 $k \geqslant 10$；

k 取最大值时，C_n 中 n 条边加两次，所以 C_n 中 $n-2$ 条边取最大值，P_K 的 $k-1$ 个顶点以及其关联边取次大标号值，即

$$(n + k - 2)k \leqslant \sum_{2}^{2n+2k-2} i + \sum_{n+k+3}^{2n+2k-2} i = \frac{1}{2}(7k^2 + 7n^2 + 14kn - 17n - 17k - 4)$$

可得 $10 \leqslant \frac{7k^2 + 7n^2 + 14kn - 17n - 17k - 4}{2(n + k - 2)}$，$7k^2 + (14n - 37)k + 7n^2 - 37n + 36 \geqslant 0$，得到 $k \geqslant -n + 4$. 当 $n = 3$ 时，$k \geqslant 1$，图$C_3 * P_k$ 可能存在 VMTL.

由 VMTL 算法得到图$C_3 * P_k (2 \leqslant k \leqslant 14)$ 的 VMTL 如表 3 所示：

表 3 图$C_3 * P_k$ 的 VMTL

图 $C_3 * P_k$	$f(v_1), f(v_2), f(v_3)$	$f(v_1v_2), f(v_2v_3), f(v_1v_3)$	$f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_k)$	$f(u_1u_2), f(u_2u_3), f(u_{k-1}u_k)$
$k=2$	4,5,1	7,2,3	1,6	8
$k=3$	7,6,8	5,3,2	8,9,10	1,4
$k=4$	6,7,11	9,1,6	11,10,8,12	3,4,5
$k=5$	11,12,13	6,1,2	13,9,8,10,14	3,7,4,5
$k=6$	8,9,15	12,1,2	15,11,10,14,13,16	4,7,5,3,6
$k=7$	16,17,18	6,1,2	18,14,13,12,11,10,15	3,7,4,8,5,9
$k=8$	20,18,19	6,3,1	19,16,11,13,14,17,10,12	4,7,9,5,8,2,15
$k=9$	21,22,14	1,6,7	14,19,12,17,16,15,20,13,18	2,8,9,3,10,4,5,11
$k=10$	23,24,13	1,7,8	13,22,15,16,17,19,20,21,12,14	4,6,11,5,10,3,9,2,18
$k=11$	26,25,17	1,8,7	17,23,14,20,21,19,16,15,24,18,22	2,9,11,3,10,5,13,6,4,12
$k=12$	27,28,17	1,8,9	17,23,22,26,24,18,19,20,15,25,14,16	3,11,4,7,6,13,5,12,10,2,21
$k=13$	29,30,20	1,8,9	20,27,26,25,16,23,22,21,28,19,18,17,24	2,10,3,11,12,4,13,5,6,14,7,15
$k=14$	32,31,20	1,10,9	20,28,27,30,19,22,25,17,23,29,21,26,16,18	3,11,4,8,15,5,12,13,6,7,14,2,24

注：表中 $f(v_i)$ 表示点 v_i 的 VMTL 标号值，$f(v_iv_{i+1})$ 表示边 v_iv_{i+1} 的 VMTL 标号值.

所以，定理 3 成立.

猜想 1 对于$C_n * P_k$，当 $n \geqslant 3$，$k \geqslant 2$ 时存在 VMTL.

定理 4 对于图$S_m \nabla C_3$，当 $1 \leqslant m \leqslant 3$ 时存在 VMTL，当 $m \geqslant 4$ 时不存在 VMTL.

证 设 $V(C_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$V(S_m) = \{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m\}$，即

$$|V(S_m \nabla C_n)| = n + m \qquad |E(S_m \nabla C_n)| = n + m$$

所以 $f(V(S_m \nabla C_n)) \cup F(E(S_m \nabla C_n)) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, 2n + 2m\}$.

k 取最小值时，u_0 和 v_1 点及其关联边取小标号值，边 u_0v_1 加两次，所以 $f(u_0v_1)$ 取最小值 1，即

$$2k \geqslant f(u_0) + \sum_{u \in N(u_0)} f(uu_0) + f(v_1) + \sum_{v \in N(v_1)} f(vv_1) = \sum_{1}^{m+4} i + 1 = \frac{1}{2}(m^2 + 9m + 22)$$

k 取最大值时，C_n 中 $n-2$ 条边加两次，所以 C_n 中 $n-2$ 条边取最大值，S_m 的 $m-1$ 个叶子节点以及

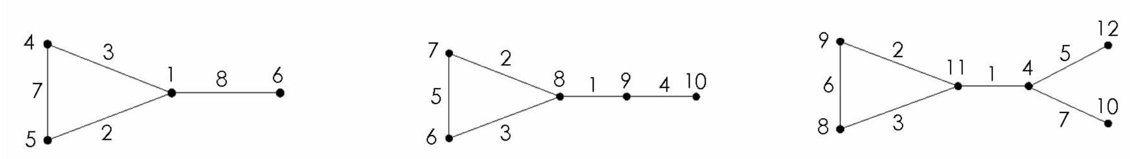
其关联边取次大标号值，即

$$(m+n-2)k \leqslant \sum_{1}^{m-1} f(u_i) + \sum_{u \in N(u_i)} f(uu_i) + \sum_{1}^{n-1} f(v_i) + \sum_{v \in N(v_i)} f(vv_i) = \sum_{4}^{2n+2m} i + \sum_{2m+n+3}^{2n+2m} i =$$

$$\frac{1}{2}(4m^2+7n^2+12mn-6m-n-18)$$

可得$\frac{1}{4}(m^2+9m+22) \leqslant \frac{4m^2+7n^2+12mn-6m-n-18}{2(m+n-2)}$，$m^3-m^2+m^2n-15mn+16m-14n^2+24n-8 \leqslant 0$. 当 $n=3$ 时，有$m^3+2m^2-29m-62 \leqslant 0$，得到 $-2 \leqslant m \leqslant 5$. 所以，当 $m \geqslant 6$ 时，图$S_m \nabla C_3$ 不存在 VMTL.

图 $S_m \nabla C_3(1 \leqslant m \leqslant 3)$ 的 VMTL 如图 6 所示：



(a) $S_1 \nabla C_3$ 标号图　　(b) $S_2 \nabla C_3$ 标号图　　(c) $S_3 \nabla C_3$ 标号图

图 6　图 $S_m \nabla C_3$ 的 VMTL

对于图$S_4 \nabla C_3$，$|V(S_4 \nabla C_3)|=7$，$|E(S_4 \nabla C_3)|=7$，所以 $f(V(S_4 \nabla C_3)) \cup f(E(S_4 \nabla C_3)) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, 14\}$. 根据引理 1，在解空间 $\varphi(7, 7, k)$ 中执行 VMTL 算法得出该图不存在 VMTL. 同理，可得图 $S_5 \nabla C_3$ 不存在 VMTL.

综上所述，定理 4 成立.

定理 5　对于图$S_2 \nabla F_n$，当 $2 \leqslant n \leqslant 8$ 时存在 VMTL，当 $n \geqslant 9$ 时不存在 VMTL.

证　设扇图 F_n 的顶点集合$V(F_n)=\{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$V(S_2)=\{u_0, u_1, u_2\}$，$|V(S_m \nabla F_n)|=n+3$，$|E(S_m \nabla F_n)|=2n+1$，$f(V(S_m \nabla F_n)) \cup f(E(S_m \nabla F_n)) \rightarrow \{1, 2, \cdots, 3n+4\}$.

k 取最小值时，v_0 点及其关联边取最小标号值，即

$$k \geqslant f(v_0) + \sum_{v \in N(v_0)} f(vv_0) = \sum_{1}^{n+2} i = \frac{1}{2}(n^2+5n+6)$$

k 取最大值时，扇图 F_n 中 $n-1$ 条边加两次，所以取最大标号值，即

$$(n+2)k \leqslant \sum_{2}^{3n+4} i + \sum_{2n+6}^{3n+4} i = \frac{1}{2}(14n^2+32n+8)$$

可得$\frac{1}{2}(n^2+5n+6) \leqslant \frac{14n^2+32n+8}{2(n+2)}$，即$n^3-7n^2-16n+4 \leqslant 0$，得到 $0 \leqslant n \leqslant 8$.

由 VMTL 算法得到图 $S_2 \nabla F_n(2 \leqslant n \leqslant 8)$ 的 VMTL 如表 4 所示：

表 4　图 $S_2 \nabla F_n$ 的 VMTL

图 $S_2 \nabla F_n$	$f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$	$f(v_1 v_2), f(v_2 v_3), \cdots, f(v_{n-1} v_n)$	$f(v_1 v_0), f(v_2 v_0), \cdots, f(v_n v_0)$	$f(v_0), f(v_0 u_0), f(u_0), f(u_0 u_1)\ f(u_2)$
$n=2$	7,6	5	2,3	8,1,9,4,10
$n=3$	11,7,13	5,6	4,2,1	10,3,9,8,12
$n=4$	15,12,11,13	8,5,6	3,1,4,7	9,2,14,10,16
$n=5$	18,16,15,13,17	10,6,8,9	5,1,4,3,7	11,2,12,19,14
$n=6$	20,15,14,16,19,22	13,8,12,9,10	6,3,5,2,1,7	11,4,17,18,21
$n=7$	23,15,21,20,19,18,25	16,9,14,11,12,13	7,6,2,1,4,3,8	10,5,17,24,22
$n=8$	24,17,18,15,19,21,14,20	23,11,25,13,16,12,26	8,4,1,2,7,6,3,9	10,5,22,28,27

注：$f(v_i)$ 表示点v_i 的 VMTL 标号值，$f(v_i v_{i+1})$ 表示边$v_i v_{i+1}$ 的 VMTL 标号值.

所以，定理 5 成立.

4　结　　论

图的 VMTL 自提出以来，已有很多特殊图的标号结论，由于图数量庞大，利用手工标号找出图的标号

规律局限于特殊图，即通过对点数少的一类图进行标号，发现标号规律，然后验证点数多的该类型图是否满足该规律，但是这种方法无法找出一般图的标号规律.

本文给出一种针对顶点魔幻解空间的递归搜索 VMTL 算法，利用 VMTL 的特性以及一系列剪枝函数对其进行优化，对整个解空间进行搜索遍历. 该算法可以对有限点内的所有图进行标号，得出该图是否存在 VMTL，然后从结果集中分析标号结果，找到龙图、图 $C_4^{(m)}$ 、图 $F_n^{(2)}$ 以及联图 $G \nabla H$ 的标号规律，总结出若干定理.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: Macmillan Education UK, 1976.

[2] ROSA A. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph [J]. Theory of Graphs, 1967, 1967: 349-355.

[3] 唐保祥，任　韩. 两类包含子图 $K_{1,m,n}$ 和 W_n 的优美图 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2015, 40(10): 1-5.

[4] 刘秀丽. 几类特殊图的 Mycielski 图的(2,1)-全标号 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(12): 100-104.

[5] MACDOUGALL J A, MILLER M, WALLIS W D. Vertex-Magic Total Labelings of Graphs [J]. Utilitas Mathematics, 2002, 61: 3-21.

[6] MCQUILLAN D. Edge-Magic and Vertex-Magic Total Labelings of Certain Cycles [J]. Ars Combin, 2009, 91: 257-266.

[7] KRISHNAPPA H K, KOTHAPALLI K, VENKAIAH V C. Vertex Magic Total Labelings of Complete Graphs 1 [J]. Akce Int J Graphs Comb, 2009, 6(1): 143-154.

[8] PRIHANDOKO A C, SETIAWAN T B, ROSITA F, et al. Vertex-Magic Total Labelings of Disconnected Graphs [J]. 2006(2): 147-156.

[9] GRAY I D, MACDOUGALL J A. Vertex-Magic Labelings of Regular Graphs II [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(20): 5986-5999.

[10] GRAY I D, MACDOUGALL J A. Vertex-Magic Labeling of Regular Graphs: Disjoint Unions and Assemblages [J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160(7-8): 1114-1125.

[11] GRAY I D , MACDOUGALL J, MCSORLEY J P, et al. Vertex-Magic Labeling of Trees and Forests [J]. Discrete Mathematics, 2003, 261(1-3): 285-298.

[12] GALLIAN J A . A Dynamic Survey of Graph Labeling [J]. Electronic Journal of Combinatorics, 2009, 16(6): 1-219.

[13] 刘信生，刘元元，姚　兵，等. 具有奇优美性的一类龙图 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2014, 36(4): 47-51.

Vertex-Magic Total Labelings of Some Graphs

XI Xiao-hui, LI Jing-wen, SUN Shuai

School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, a recursive search algorithm has been designed for vertex magic solution space, which uses the characteristics of vertex magic-total labeling and a series of pruning functions to optimize, the solution of vertex-magic total labeling of any simple connected graph with finite vertices is realized. By analyzing and summarizing the obtained results, finding the labeling rules of dragon graphs, $C_4^{(m)}$, $F_n^{(2)}$ and a class of graphs described by joint graphs $G \nabla H$, and summarizing several theorems.

Key words: vertex-magic total labelings; algorithm; pruning function; connected graph

责任编辑　廖　坤