第 45 卷 第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 8 月
Vol. 45 No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.08.005

Orlicz-Aleksandrov 体的混合体积①

杨　林[1]，　罗　淼[2]，　何邦财[1]，　唐孝国[1]，　陈　兵[1]

1. 铜仁职业技术学院 信息工程学院，贵州 铜仁 554300；2. 贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要： 探究了 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论中关于 Orlicz-Aleksandrov 体的混合体积，建立了相应的 Orlicz-Minkowski 不等式与 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式.

关　键　词： Orlicz-Aleksandrov 体；混合体积；Orlicz-Minkowski 不等式；Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式

中图分类号：O186.5　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2020)08-0025-04

文献[1-3]在 L_p Brunn-Minkowski 理论的基础上探究了 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论，建立了 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式与 Orlicz-Minkowski 不等式，并在其基础上衍生了一系列结果[4-9]，关于凸几何方面的其他信息可参见文献[10-15].

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体之集记为 $\mathcal{K}^n$，$\mathcal{K}_o^n=\{K\in\mathcal{K}^n: o\in\operatorname{int}K\}$. 用 C^+ 表示定义在单位球面 S^{n-1} 上连续的正值函数族，$\mathcal{A}$ 表示$[0,+\infty)$上非负的严格递增凸函数族.

设 $K\in\mathcal{K}^n$ 的支撑函数为 $h_K(u)=\max\{x\cdot u: x\in K\}$，$u\in S^{n-1}$. n 维体积为 $V(K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_K(u)\mathrm{d}S(K,u)$，$\mathrm{d}S(K,u)$ 表示 K 在 u 方向上的面积微元.

设 $\varphi\in\mathcal{A}$，$K,L\in\mathcal{K}_o^n$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$(α,β 不同时为 0). K,L 的 Orlicz 组合[4,7] $\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L\in\mathcal{K}_o^n$ 由 $h_{\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L}(u)=\inf\left\{\lambda>0: \alpha\varphi\left(\frac{h_K(u)}{\lambda}\right)+\beta\varphi\left(\frac{h_L(u)}{\lambda}\right)\leqslant\varphi(1)\right\}$ 确定.

由 Orlicz 组合的定义知

$$h_{\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L}(u)=\lambda\Leftrightarrow\alpha\varphi\left(\frac{h_K(u)}{h_{\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L}(u)}\right)+\beta\varphi\left(\frac{h_L(u)}{h_{\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L}(u)}\right)=\varphi \tag{1}$$

文献[8]研究了 $\varphi\in\mathcal{A},K_1,\cdots,K_n,L\in\mathcal{K}_o^n$ 的 Orlicz 多元混合体积 $V_\varphi(K_1,\cdots,K_n,L)$，其定义为

$$V_\varphi(K_1,\cdots,K_n,L)=\varphi'_+(1)V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K_n+_\varphi\varepsilon\cdot_\varphi L)'_+(0)=$$

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{h_L(u)}{h_{K_n}(u)}\right)h_{K_n}(u)\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)$$

当 $\varphi(x)=x$ 时，$V_\varphi(K_1,\cdots,K_n,L)=V(K_1,\cdots,K_n)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_{K_n}(u)\mathrm{d}S_i(K_1,\cdots,K_{n-1},u)$；当 $K_1=\cdots=K_{n-i-1}=K$，$K_{n-i}=\cdots=K_{n-1}=B$，$\varphi(x)=x$ 时，$V_\varphi(K_1,\cdots,K_n,L)=W_i(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_L(u)\mathrm{d}S_i(K,u)$. 有如下 Minkowski 不等式[10]：

$$W_i(K,L)^{n-i}\geqslant W_i(K)^{n-i-1}W_i(L) \tag{2}$$

文献[8]建立了如下所示的 Orlicz-Aleksandrov-Fenchel 不等式和 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式：

Orlicz-Aleksandrov-Fenchel 不等式　若 $\varphi\in\mathcal{A}$，$K_1,\cdots,K_n,L\in\mathcal{K}_o^n$，$1\leqslant r\leqslant n$，则

$$\frac{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K_n,L)}{V(K_1,\cdots,K_n)}\geqslant\varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{m}V(K_r[m],K_{m+1},\cdots,K_{n-1},L)^{\frac{1}{m}}}{V(K_1,\cdots,K_n)}\right)$$

---

① 收稿日期：2019-07-22

基金项目：贵州省基础研究计划项目(黔科合基础[2019]1228 号)；贵州师范大学资助博士科研项目(11904/0517082).

作者简介：杨　林(1988-)，男，讲师，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.

通信作者：罗　淼，副教授.

Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式 若 $\varphi \in \mathscr{A}$, $K_1, \cdots, K_n, L \in \mathscr{K}_o^n$, 且 $\varphi(1)=1$, 则对 $\forall \varepsilon > o$ 有

$$\varphi\left(\frac{V(K_1, \cdots, K_{n-1}, K_n)}{V(K_1, \cdots, K_{n-1}, K_n +_\varphi \varepsilon \cdot_\varphi L)}\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{V(K_1, \cdots, K_{n-1}, L)}{V(K_1, \cdots, K_{n-1}, K_n +_\varphi \varepsilon \cdot_\varphi L)}\right)\leqslant 1$$

设 $f(u), g(u) \in C^+(S^{n-1})$, $\varphi \in \mathscr{A}$, f, g 的 Orlicz 组合 $\alpha \cdot_\varphi f +_\varphi \beta \cdot_\varphi g$ 为

$$\alpha \cdot_\varphi f(u) +_\varphi \beta \cdot_\varphi g(u) = \inf\left\{\lambda > 0: \alpha\varphi\left(\frac{f(u)}{\lambda}\right)+\beta\varphi\left(\frac{g(u)}{\lambda}\right)\leqslant \varphi(1)\right\} \qquad u \in S^{n-1}$$

设函数 $f(u) \in C^+(S^{n-1})$, 与 $f(u)$ 相关的 Aleksandrov 体[11] 为 $A(f)=\max\{K \in K_o^n: h_K(u) \leqslant f(u)\}$.

文献[9] 研究了关于函数 $f(u), g(u) \in C^+(S^{n-1})$, $\varphi \in \mathscr{A}$ 的 Orlicz-Aleksandrov 体 $A(\alpha \cdot_\varphi f +_\varphi \beta \cdot_\varphi g)$, 其支持函数 $h_{A(\alpha \cdot_\varphi f(u) +_\varphi \beta \cdot_\varphi g(u))} = \max\{Q \in \mathscr{K}_o^n: h_Q(u) \leqslant \alpha \cdot_\varphi f(u) +_\varphi \beta \cdot_\varphi g(u)\}$.

由 Orlicz-Aleksandrov 体的定义及公式(1) 知

$$\alpha\varphi\left(\frac{h_{A(f(u))}}{h_{A(\alpha \cdot_\varphi f(u) +_\varphi \beta \cdot_\varphi g(u))}}\right)+\beta\varphi\left(\frac{h_{A(g(u))}}{h_{A(\alpha \cdot_\varphi f(u) +_\varphi \beta \cdot_\varphi g(u))}}\right)=\varphi(1) \tag{3}$$

当 $\varphi = t^p (p \geqslant 1)$ 时的 Orlicz-Aleksandrov 体为 p-Aleksandrov 体[10,12], 即

$$A(\alpha \cdot_\varphi f +_\varphi \beta \cdot_\varphi g) = A(\alpha \cdot_p f +_p \beta \cdot_p g)$$

本文在文献[8-9] 的启发下, 探索了关于 Orlicz-Aleksandrov 体的 Orlicz 多元混合体积 $V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f, g)$, 其定义为

$$V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f, g) = \varphi'_+(1) V(K_1, \cdots, K_{n-1}, A(f(u) +_\varphi \varepsilon \cdot_\varphi g(u)))'_+(0) \tag{4}$$

同时建立了如下不等式:

定理 1 若 $f(u), g(u) \in C^+(S^{n-1})$, $\varphi \in \mathscr{A}$, $K_i \in \mathscr{K}_o^n$, $1 \leqslant r \leqslant n$, 则

$$\frac{V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f, g)}{V(K_1, \cdots, K_{n-1}, f)} \geqslant \varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{m} V(K_r[m], K_{m+1}, \cdots, K_{n-1}, g)^{\frac{1}{m}}}{V(K_1, \cdots, K_{n-1}, f)}\right)$$

定理 2 若 $f(u), g(u) \in C^+(S^{n-1})$, $\varphi \in \mathscr{A}$, $K_i \in \mathscr{K}_o^n$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, 则

$$\varphi(1) \geqslant \varphi\left(\frac{V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f)}{V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f +_\varphi g)}\right)+\varphi\left(\frac{V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, g)}{V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f +_\varphi g)}\right)$$

引理 1[10] 若 $f(u), g(u) \in C^+(S^{n-1})$, 则 $A(f +_{\varphi, \varepsilon} g) \to A(f)$.

引理 2[9] 若 $f(u) \in C^+(S^{n-1})$, $A(f)$ 为与 $f(u)$ 相关的 Aleksandrov 体, 则

$$V(f) = V(A(f)) = V_\varphi(A(f), f) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \varphi\left(\frac{f(u)}{h_{A(f)}(u)}\right) h_{A(f)}(u) \mathrm{d}S(A(f), u)$$

引理 3 若 $f, g \in C^+(S^{n-1})$, $\varphi \in \mathscr{A}$, 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h_{A(f +_\varphi \varepsilon \cdot_\varphi g)}(u) - h_{A(f)}(u)}{\varepsilon} = \frac{\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right) f(u)}{\varphi'_+(1)}$$

证 令 $h_{A(f +_\varphi \varepsilon \cdot_\varphi g)}(u) = h_\varepsilon(u)$, $h_{A(f)}(u) = h_f(u)$. 由引理 1、引理 2、公式(3) 及凸函数的性质知

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h_\varepsilon(u) - h_f(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h_\varepsilon(u)}{\varepsilon}\left(1 - \frac{h_f(u)}{h_\varepsilon(u)}\right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1 - \varphi^{-1}\left(\varphi(1) - \varepsilon\varphi\left(\frac{g(u)}{h_\varepsilon(u)}\right)\right)}{\varphi(1) - \left(\varphi(1) - \varepsilon\varphi\left(\frac{g(u)}{h_\varepsilon(u)}\right)\right)} \varphi\left(\frac{g(u)}{h_\varepsilon(u)}\right) h_\varepsilon(u) =$$

$$\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right) f(u) \lim_{\varepsilon \to 1^+} \frac{1 - x}{\varphi(1) - \varphi(x)} =$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right) f(u)}{\varphi'_+(1)}$$

其中 $x = \varphi^{-1}\left(\varphi(1) - \varepsilon\varphi\left(\frac{g(u)}{h_\varepsilon(u)}\right)\right)$.

引理 4 若 $f(u), g(u) \in C^+(S^{n-1})$, $\varphi \in \mathscr{A}$, $K_i \in \mathscr{K}_o^n (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则

$$V_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, f, g) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right) f(u) \mathrm{d}S(K_1, \cdots, K_{n-1}, u)$$

证 由引理 2、引理 3、公式(4), 有

$$V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f,g)=\varphi'_+(1)V(K_1,\cdots,K_{n-1},A(f+_\varphi\varepsilon\cdot_\varphi g))'_+(0)=$$
$$\frac{\varphi'_+(1)}{n}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{S^{n-1}}\frac{h_{A(f+_\varphi\varepsilon\cdot_\varphi g)}(u)-h_{A(f)}(u)}{\varepsilon}\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)=$$
$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right)f(u)\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)$$

若 $K_1=\cdots=K_{n-i-1}=A(f)$，$K_{n-i}=\cdots=K_{n-1}=B$，则有

$$V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f,g)=W_{\varphi,i}(A(f),g)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right)f(u)\mathrm{d}S_i(A(f),u)$$

引理 5[11]　若 $K_i\in\mathscr{K}^n(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $V(K_1,\cdots,K_n)\geqslant\prod_{r=1}^{m}V(K_r[m],K_{m+1},\cdots,K_n)^{\frac{1}{m}}$. 特别地，当 $m=n$ 时，有 $V(K_1,\cdots,K_n)\geqslant\prod_{r=1}^{n}V(K_i)^{\frac{1}{n}}$.

定理 1 的证明　根据引理 2、引理 4、Jensen 不等式[16]，可得

$$V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f,g)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)}\right)f(u)\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)\geqslant$$
$$V(K_1,\cdots,K_{n-1},f)\varphi\left(\frac{\int_{S^{n-1}}g(u)\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)}{nV(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}\right)=$$
$$V(K_1,\cdots,K_{n-1},f)\varphi\left(\frac{V(K_1,\cdots,K_{n-1},g)}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}\right)\tag{5}$$

结合引理 2 与引理 5 可得：

$$\frac{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f,g)}{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}\geqslant\varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{m}V(K_r[m],K_{m+1},\cdots,K_{n-1},g)^{\frac{1}{m}}}{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}\right)$$

在定理 1 中令 $m=n$，可得

推论 1　若 $f(u),g(u)\in C^+(S^{n-1})$，$K_1,\cdots,K_{n-1}\in\mathscr{K}_o^n$，则

$$\frac{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f,g)}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}\geqslant\varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{n-1}V(K_r)^{\frac{1}{n}}V(g)^{\frac{1}{n}}}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}\right)$$

令 $K_1=\cdots=K_{n-i-1}=A(f)$，$K_{n-i}=\cdots=K_{n-1}=B$，由不等式(2) 与不等式(5) 可得：

推论 2　若 $f(u),g(u)\in C^+(S^{n-1})$，$\varphi\in\mathscr{A}$，$i=0,2,\cdots,n-1$，则

$$W_{\varphi,i}(f,g)\geqslant W_i(f)\varphi\left(\left(\frac{W_i(g)}{W_i(f)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)$$

在推论 2 中取 $i=0$，可得：

推论 3　若 $f(u),g(u)\in C^+(S^{n-1})$，则 $V_\varphi(f,g)\geqslant V(f)\varphi\left(\left(\frac{V(g)}{V(f)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

定理 2 的证明　令 $\Delta=V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_\varphi g,f)+V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_\varphi g,g)$，由公式(3) 与引理 4 可得

$$\Delta=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{f(u)}{f(u)+_\varphi g(u)}\right)(f(u)+_\varphi g(u))\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)+$$
$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)+_\varphi g(u)}\right)(f(u)+_\varphi g(u))\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)=$$
$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\left[\varphi\left(\frac{f(u)}{f(u)+_\varphi g(u)}\right)+\varphi\left(\frac{g(u)}{f(u)+_\varphi g(u)}\right)\right](f(u)+_\varphi g(u))\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)=$$
$$\frac{\varphi(1)}{n}\int_{S^{n-1}}(f(u)+_\varphi g(u))\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)=$$
$$\varphi(1)V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_\varphi g)$$

由不等式(5) 可得

$$V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_\varphi g,f)\geqslant V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_\varphi g)\varphi\left(\frac{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f)}{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_\varphi g)}\right)\tag{6}$$

$$V_{\varphi}(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_{\varphi}g,g)\geqslant V_{\varphi}(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_{\varphi}g)\varphi\left(\frac{V_{\varphi}(K_1,\cdots,K_{n-1},g)}{V_{\varphi}(K_1,\cdots,K_{n-1},f+_{\varphi}g)}\right) \tag{7}$$

将(6)式与(7)式代入 Δ 中即得证定理2.

若取 $K_1=\cdots=K_{n-i-1}=A(f)$，$K_{n-i}=\cdots=K_{n-1}=B$，代入定理2可得：

推论4 若 $f(u),g(u)\in C^{+}(S^{n-1})$，$\varphi\in\mathscr{A}$，$i=0,2,\cdots,n-1$，则

$$\varphi(1)\geqslant\varphi\left(\left(\frac{W_i(f)}{W_i(f+_{\varphi}g)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)+\varphi\left(\left(\frac{W_i(g)}{W_i(f+_{\varphi}g)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)$$

在推论4中令 $i=0$，得：

推论5[9] 若 $f(u),g(u)\in C^{+}(S^{n-1})$，则 $\varphi\left(\left(\frac{V(f)}{V(f+_{\varphi}g)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)+\varphi\left(\left(\frac{V(g)}{V(f+_{\varphi}g)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\leqslant\varphi(1)$.

参考文献：

[1] LUTWAK E，YANG D，ZHANG G. Orlicz Centroid Bodies [J]. J Differential Geome，2010，84(2)：365-387.

[2] LUTWAK E，YANG D，ZHAMG G. Orlicz Projection Bodies [J]. Adv in Math，2010，223(1)：220-242.

[3] HABERL C，LUTWAK E，YANG D，et al. The Even Orlicz Minkowski Problem [J]. Adv in Math，2010，224(6)：2485-2510.

[4] GARDNER R，HUG D，WEIL W. The Orlicz-Brunn-Minkowski Theory：A General Framework，Additions，and Inequalities [J]. J Differential Geome，2014，97(3)：427-476.

[5] GARDNER R，HUG D，WEIL W，et al. The Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory [J]. J Math Anal Appl，2015，430(2)：810-829.

[6] ZHU B C，ZHOU J Z，XU W X. Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory [J]. Adv in Math，2014，264：700-725.

[7] XIONG G，ZOU D. Orlicz Mixed Quermassintegrals [J]. Science China Math，2014，57(12)：2549-2562.

[8] ZHAO C J. Orlicz-Aleksandrov-Fenchel Inequality for Orlicz Multiple Mixed Volumes [J]. J Func Spaces，2018，2018：1-16.

[9] 邢素丹. Orlicz-Aleksandrov体的不等式 [J]. 应用数学与计算数学学报，2017，31(1)：107-113.

[10] LUTWAK E. The Bruun-Minkowski-Firey Theory I：Mixed Volume and the Minkowski Problem [J]. J Differential Geome，1993，38(1)：131-150.

[11] SCHNEIDER R. Convex Bodies：the Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.

[12] HU Y，JIANG J H. Inequalities of Aleksandrov Body [J]. J Ineq Appl，2011，2011(1)：39.

[13] 张增乐，罗 淼，陈方维. 平面上的新凸体与逆Bonnesen-型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：27-30.

[14] 杨 林，罗 淼，侯林波. 逆的对偶Brunn-Minkowski不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(4)：85-89.

[15] 杨 林，罗 淼，王贺军. L_p 对偶Brunn-Minkowski不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，39(10)：79-83.

[16] HARDY G，LITTLEWOOD J，PÓLYA G. Inequalities [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1952.

On Mixed Volume of Orlicz-Aleksandrov Body

YANG Lin[1]， LUO Miao[2]，
HE Bang-cai[1]， TANG Xiao-guo[1]， CHEN Bing[1]

1. School of information technology，Tongren Polytechnic College，Tongren Guizhou 554300，China；
2. School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：In this paper，the mixed volume of Orlicz-Aleksandrov body over Brunn-Minkowski theorem has been studied，and the Orlicz-Minkowski inequality and Orlicz-Brunn-Minkowski inequality are obtained.

Key words：Orlicz-Aleksandrov body；mixed volume；Orlicz-Minkowski inequality；Orlicz-Brunn-Minkowski inequality

责任编辑 廖 坤