第 45 卷 第 8 期 西 南 师 范 大 学 学 报(自然科学版) 2020 年 8 月
Vol. 45 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.08.006

带双参数的第二类 FKS 函数方程的单谷延拓解[①]

刘好斌[1,2], 石勇国[1,2]

1. 内江师范学院 数学与信息科学学院,四川 内江 641100;
2. 内江师范学院 数据恢复四川省重点实验室,四川 内江 641100

摘要: FKS 函数方程刻画了圆映射的拟周期到混沌的路径. 作为简化,考虑了另外一种形式的方程——带双参数的第二类 FKS 函数方程,将单参数的情形拓展到双参数. 首先分别给出了连续解和单谷延拓解满足的必要条件;其次,得到了单谷解和单谷延拓解的区分条件;然后,针对参数特定的取值范围,利用迭代构造法,分别构造了所有单谷解和单谷延拓解,将第二类 KFS 函数方程已有的递减解的结果扩充到单谷延拓连续解,并在文中给出了详细的证明过程.

关 键 词: 第二类 FKS 函数方程;单谷解;单谷延拓解;迭代构造法

中图分类号:O192 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2020)08-0029-06

文献[1]研究发现,在含参数区间映射进行迭代时,出现了周期倍增现象,为解释这种现象,提出了函数方程

$$\begin{cases} g(x)=-\lambda^{-1}g(g(-\lambda x)) & x\in[0,1] \\ g(0)=1 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$ 是参数,g:$[-1,1]\longrightarrow[-1,1]$ 是未知函数. 后来方程(1)被称作 Cvitanovic-Feigenbaum 方程或 Feigenbaum 方程,诸多学者对其进行了研究. 文献[2]证明了方程(1)解的存在性,文献[3]扩大参数的取值范围并证明了方程(1)有 C^2 凹解,文献[4]利用不动点定理证明了解析解的存在性. 但这些证明方法都是非构造性的. 文献[5]提出了第二类 Feigenbaum 函数方程

$$\begin{cases} f(x)=\lambda^{-1}f(f(\lambda x)) & x\in[0,1] \\ f(0)=1 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$ 是参数,f:$[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 是未知函数,并论证了两类方程的等价性,给出了 2 种构造其单谷连续解的可行方法. 在此基础之上,文献[6]探讨了方程(2)由单谷映射扩充所能得到的一切连续解的形态,并给出了这类解的可行方法;文献[7]讨论了 Feigenbaum 函数方程(2)的单峰偶解,并获得了方程(1)的单峰偶解是连续可微解以及 C^k 解的一些较文献[5]更为广泛的条件;文献[8-9]研究了第二类 Feigenbaum 函数方程(2)的 C^2 凸的单谷解,并利用新的构造性方法讨论了推广后的方程的单谷连续解的存在性与唯一性. Feigenbaum 方程刻画了周期分岔到混沌的路径,为了刻画圆映射拟周期到混沌的路径,文献[10]提出了如下函数方程(简称 FKS 方程):

$$\begin{cases} g(g(\varepsilon^2 x))=\varepsilon g(x) & x\in[0,1] \\ g(0)=1 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\varepsilon\in(-1,0)$ 是参数,g:$[0,1]\longrightarrow[-1,1]$ 是未知函数. 文献[11]研究了方程(1)和 FKS 方程(3)

---

① 收稿日期:2019-10-27
基金项目:国家自然科学基金项目(11301256);四川省教育厅基金项目(18ZA0274).
作者简介:刘好斌(1983-),男,讲师,主要从事微分方程的研究.
通信作者:石勇国,教授.

的解析解和奇异解.

最近的工作主要是研究单调递减解[11-12]，本文则是研究单谷延拓解. 本文在文献[10-13]的基础上，作为化简，讨论了带双参数的第二类FKS函数方程

$$\begin{cases} f(x)=\kappa^{-1}f(f(\lambda x)) & x\in[0,1] \\ f(0)=1 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $0<\kappa^2\leqslant\lambda\leqslant\kappa<1$，$f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 是未知函数，给出了连续解和单谷延拓解满足的必要条件，得到了单谷解和单谷连续解的区分条件. 文献[14-15]利用不动点理论在方程的研究中得到了较好的结论，本文研究这类方程的解不适宜使用不动点理论，而适合利用迭代构造法，可以得到方程(4)的所有单谷解和单谷延拓连续解.

1 预备知识

引理1 设 f 是方程(4)的连续解，α 是 f 的最小值点，则：

(i) $f(1)=\kappa$，$f^2(\lambda)=\kappa^2$；

(ii) $f(\alpha)=0$ 且 $\alpha>\lambda$.

证 对于(i)，将 $x=0$ 代入方程(4)，得 $f(1)=\kappa$. 再将 $x=1$ 代入方程(4)，得 $f^2(\lambda)=\kappa^2$.

对于(ii)，设 α 为 f 的最小值点，将 $x=\alpha$ 代入方程(4)，得

$$f(\alpha)=\kappa^{-1}f(f(\lambda\alpha))\geqslant\kappa^{-1}f(\alpha)$$

因此 $f(\alpha)=0$.

若 $\alpha\leqslant\lambda$，则

$$\kappa f\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)=f(f(\alpha))=f(0)=1$$

则 $f\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)=\frac{1}{\kappa}>1$，矛盾. 故 $\alpha>\lambda$.

引理2 设 f 是方程(4)的连续解，α 是 f 的唯一最小值点，则：

(i) $f([0,\lambda\alpha])=[\alpha,1]$，$f([\alpha,1])=[0,\kappa]$；

(ii) $f(\lambda)\neq\alpha$.

证 对于(i)，若 $x\in[0,\lambda]$ 使得 $f(x)=\alpha$，则

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\kappa^{-1}f(f(x))=\kappa^{-1}f(\alpha)=0$$

于是 $x=\lambda\alpha$. 由 f 的连续性知 $f([0,\lambda\alpha])=[\alpha,1]$. 设 f 在 $[\alpha,1]$ 上的最大值点是 ξ. 则在 $[\alpha,1]$ 上必存在 x_1，使得 $f(x_1)=\xi$. 从而

$$f(\xi)=f(f(x_1))=\kappa f\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)\leqslant\kappa$$

根据单调性和 $f(1)=\kappa$，所以 $f([\alpha,1])=[0,\kappa]$.

对于(ii)，假设 $f(\lambda)=\alpha$，则

$$\kappa^2=\kappa f(1)=f(f(\lambda))=f(\alpha)=0$$

矛盾. 故 $f(\lambda)\neq\alpha$.

下面给出单谷解和单谷延拓解的定义：

定义1 映射 $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$，如果：

(a) f 是方程(4)的连续解；

(b) f 在区间上存在最小 $\alpha\in(0,1)$，使得 f 在 $[0,\alpha]$ 上严格递减，f 在 $[\alpha,1]$ 上严格递增.

则称 f 为方程(4)的单谷解.

定义2 映射 $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$，如果：

(a) f 是方程(4)的连续解；

(b) f 在区间上存在 $\alpha\in(\lambda,1)$，使得 f 在 $[\lambda,\alpha]$ 上严格递减，f 在 $[\alpha,1]$ 上严格递增.

则称 f 为方程(4)的单谷延拓解.

显然单谷解也是单谷延拓解，但是两者并不一定相同. 关于推广的第二类 FKS 函数方程(4)的单谷延拓解，有如下的性质：

引理 3 设 f 是方程(4)的单谷延拓解，α 是 f 在区间$[\lambda, 1]$上的最小值点，则：

(i) α 是 f 的唯一最小值点，且 $f(\alpha)=0$；

(ii) 对于 $x\in(0,\lambda)$，$f(x)=\alpha$ 当且仅当 $x=\lambda\alpha$；

(iii) $f(x)=\kappa x$ 在$[\alpha, 1]$上有唯一解 $x=1$.

证 对于(i)，由引理 1(ii)知，$f(\alpha)=0$ 且 $\alpha>\lambda$. 根据单谷延拓解的定义，α 是 f 的唯一最小值点. 对于(ii)，由于 $f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(f(x))=0\Leftrightarrow\kappa^{-1}f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\lambda}=\alpha\Leftrightarrow x=\lambda\alpha$，因此(ii)成立.

对于(iii)，显然 $x=1$ 是 $f(x)=\kappa x$ 的解. 假设 $x=\xi\in[\alpha, 1)$ 也是方程 $f(x)=\kappa x$ 的解. 由于

$$f(\lambda\alpha)=\alpha<\xi<1=f(0)$$

根据 f 的连续性，存在 $\zeta\in(0,\lambda\alpha)$ 使得 $f(\zeta)=\xi>\alpha$. 于是

$$f(f(\lambda\zeta))=\kappa f(\zeta)=\kappa\xi=f(\xi)$$

再根据 f 在$[\alpha, 1)$上单调，且 $f(\lambda\zeta)>f(\lambda\alpha)=\alpha$，所以 $f(\lambda\zeta)=\xi$. 利用归纳法，对于任意的 $n\geqslant 0$，有 $f(\lambda^n\zeta)=\xi$. 令 $n\to\infty$，得 $f(0)=\xi$，即 $\xi=1$.

命题 1 设 f 是方程(4)的单谷延拓解，且 $f(\lambda)>\alpha$，则对任意的 $n\geqslant 1$，$f|_{[\lambda^n\alpha,\lambda^n]}$ 为严格增加的，$f|_{[\lambda^{n+1}\alpha,\lambda^n]}$ 为严格减少的，因此 f 有无穷多个极值点.

证 只需要证明 $n=1$ 的情形，其余可由归纳法推导.

由 $f(\lambda)>\alpha$、引理 2(ii)和 f 的连续性，可知

$$f([\lambda^2,\lambda])\subset[\alpha, 1]$$

令 $q=f|_{[\alpha,1]}$，当 $x\in[\lambda\alpha,\lambda]$时，$q(f(x))=\kappa f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$，即

$$f(x)=q^{-1}\left(\kappa q\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

由于$\dfrac{x}{\lambda}\in[\alpha, 1]$，以及 q,q^{-1} 都是严格递增的，故 $f|_{[\lambda\alpha,\lambda]}$ 是严格递增的. 类似地可以证明 $f|_{[\lambda^2,\lambda\alpha]}$ 是严格递减的.

命题 2 设 f 是方程(4)的单谷延拓解，且 $\lambda<f(\lambda)<\alpha$，则 $f|_{[0,\lambda]}$ 为严格减少的，因此 f 是单谷的.

证 利用归纳法可推导. 对于每个 $n\geqslant 1$，$f|_{[\lambda^{n+1},\lambda^n]}$ 是严格递减的. 当 $n=1$ 时，据引理 2(i)，$f([0,\lambda\alpha])=[\alpha, 1]$，对任意 $x\in[\lambda\alpha,\lambda]$，$\dfrac{x}{\lambda}\in[\alpha, 1]$，根据引理 1(i)，有

$$f(f(x))=\kappa f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leqslant\kappa^2\leqslant\lambda<\alpha$$

根据引理 2(i)，有 $f(x)\notin[0,\lambda\alpha]$，故有 $f(x)>\lambda\alpha$. 若存在某一点 $x_1\in[\lambda\alpha,\lambda]$，使得 $f(x_1)=\lambda$. 则

$$f(\lambda)=f(f(x_1))=\kappa f\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)\leqslant\kappa^2\leqslant\lambda<f(\lambda)$$

矛盾，因此对于任意的 $x\in[\lambda\alpha,\lambda]$，$f(x)>\lambda$，根据假设 $f(\lambda)<\alpha$ 和引理 3(ii)，$f([\lambda\alpha,\lambda])\subset[\lambda,\alpha]$. 其余的证明与命题 1 类似.

命题 1、命题 2 表明单谷延拓连续解可以分为两类，由 f 在 λ 处的值确定. 当 $\lambda<f(\lambda)<\alpha$ 时是单谷的，当 $f(\lambda)>\alpha$ 时有无穷多个极值点. 对于后者，更明确地表明 $\lambda^n\alpha$ 是 f 的局部极小值点，λ^n 是 f 的局部极大值点($n=0,1,\cdots$).

2 单谷延拓连续解的构造

本文考虑 $0<\kappa^2\leqslant\lambda\leqslant\kappa<1$，$\lambda<f(\lambda)$ 时的情况，对于 $f(\lambda)<\lambda$ 或者参数其他范围的情况将在后续研究中给出. 下面两个定理分别给出了方程(4)的单谷解和单谷延拓连续解的构造方法：

定理1 任取实数 $a \in (\lambda, 1)$ 和 $\alpha \in (a, 1)$，任取定义在$[\lambda, 1]$上的初始函数 φ_0，使得：

(i) $\varphi_0(1) = \kappa$，$\varphi_0(\alpha) = 0$，$\varphi_0(\lambda) = a$ 且 $\varphi_0(a) = \kappa^2$；

(ii) φ_0 在$[\lambda, \alpha]$上严格递减，在$[\alpha, 1]$严格递增；

(iii) $\varphi_0(x) = \kappa x$ 在$[\alpha, 1]$上有唯一解 $x = 1$.

则 φ_0 能够被唯一延拓为方程(4)的单谷解. 反之，若 φ_0 是方程(4)的某单谷解在$[\lambda, 1]$上的限制，则 φ_0 必满足条件(i),(ii),(iii).

证 定理中后一部分的结论在前面的引理中已给出证明，这里只证明前一部分.

令 $p = \varphi_0 |_{[\lambda, \alpha]}$，$q = \varphi_0 |_{[\alpha, 1]}$，$I_j = [\lambda^{j+1}, \lambda^j]$，$j = 0,1,2,\cdots$，定义方程(4)的单谷解在 I_j 上的限制记为 φ_j. 根据方程(4)，对于 $x \in [\lambda\alpha, \lambda]$，有

$$f(\varphi_1(x)) = \kappa\varphi_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \kappa q\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

根据函数的单调性和值域，可进一步改写为

$$p(\varphi_1(x)) = \kappa q\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

类似地，对于 $x \in [\lambda^2, \lambda\alpha]$，有 $q(\varphi_1(x)) = \kappa p\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. 于是在$[\lambda^2, \lambda]$上 φ_1 定义为

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} q^{-1}\left(\kappa p\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\right) & x \in [\lambda^2, \lambda\alpha] \\ p^{-1}\left(\kappa q\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\right) & x \in [\lambda\alpha, \lambda] \end{cases}$$

类似地，对于 $n \geqslant 1$，$x \in [\lambda^{n+1}, \lambda^n]$，利用归纳法，$\varphi_n$ 定义为

$$\varphi_n(x) = q^{-1}\left(\kappa\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \qquad x \in I_n$$

再令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \varphi_n(x) & x \in I_n \end{cases}$$

下面证明 φ 在区间$[0, 1]$上是连续的.

因

$$\varphi_1(\lambda) = p^{-1}(\kappa q(1)) = p^{-1}(\kappa^2) = a = \varphi_0(\lambda)$$

故 φ_1 在 $x = \lambda$ 处连续. 又因

$$q^{-1}(\kappa p(\alpha)) = p^{-1}(\kappa q(\alpha)) = \alpha$$

所以 φ_1 在 $x = \lambda\alpha$ 处连续. 利用归纳法，可以证明

$$\varphi_n(\lambda^n) = q^{-1}(\kappa\varphi_{n-1}(\lambda^{n-1})) = q^{-1}(\kappa\varphi_{n-2}(\lambda^{n-1})) = \varphi_{n-1}(\lambda^n)$$

因此 φ 在区间$(0, 1]$上是连续的. 又因为 φ 在区间$(0, \alpha]$上严格递减且有界，当 $x \to 0$ 时，$\varphi(x)$ 极限存在，设极限为 ξ，则 $\xi = q^{-1}(\kappa\xi)$. 根据(iii)，$\xi = 1$. 因此 φ 在 $x = 0$ 处连续.

定理2 任取实数 $a \in (\lambda, 1)$ 和 $\alpha \in (\lambda, a)$，任取定义在$[\lambda, 1]$上的初始函数 g，使得：

(i) $g(1) = \kappa$，$g(\alpha) = 0$，$g(\lambda) = a$ 且 $g(a) = \kappa^2$；

(ii) g 在$[\lambda, \alpha]$上严格递减，在$[\alpha, 1]$上严格递增；

(iii) $g(x) = \kappa x$ 在$[\alpha, 1]$上有唯一解 $x = 1$.

则方程(4)有唯一的单谷延拓连续解 f，满足 $f |_{[\lambda, 1]} = g$，且 f 有无穷多个极值点. 反之，若 g 是方程(4)的某单谷延拓连续解在$[\lambda, 1]$上的限制，则 g 必满足条件(i),(ii),(iii).

证 定理中后一部分的结论在引理2中已给出证明，这里只证明前一部分.

设

$$p = g |_{[\lambda, \alpha]} \qquad q = g |_{[\alpha, 1]}$$
$$I_n = [\lambda^{n+1}, \lambda^n] \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

根据条件，有 $\lambda < g(\lambda) < 1$ 且 $g(\lambda) > \alpha$.

令 $f_0(x) = g(x)$，$x \in I_0$，则 g_0 已有定义并且连续. 对任意 $n \geqslant 1$，可定义

$$f_n = q^{-1}\left(\kappa f_{n-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \qquad x \in I_n \tag{5}$$

因为 q 严格增加，故逆映射 q^{-1} 存在，于是 f_n 有意义而且连续. 令

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ f_n(x) & x \in I_n \end{cases}$$

为说明 $f(x)$ 有意义，我们证明对每个 $n \geqslant 1$，g_n 与 g_{n-1} 在 $I_n \cap I_{n-1} = \{\lambda^n\}$ 处取相同值. 利用归纳法证明得：

当 $n = 1$ 时，$f_1(\lambda) = q^{-1}\left(\kappa f_0\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)\right) = q^{-1}(\kappa^2) = f_0(\lambda)$；

当 $n = k$ 时，$f_k(\lambda^k) = f_{k-1}(\lambda^k)$；

当 $n = k + 1$ 时，根据(5) 式有

$$f_{k+1}(\lambda^{k+1}) = q\left(\kappa f_{k-1}\left(\frac{\lambda^{k+1}}{\lambda}\right)\right) = q(\kappa f_k(\lambda^k)) = q(\kappa f_{k-1}(\lambda^k)) = q\left(\kappa f_{k-1}\left(\frac{\lambda^{k+1}}{\lambda}\right)\right) = f_k(\lambda^{k+1})$$

于是 $f(x)$ 有意义.

下证 $f(x)$ 连续. 这里只需要证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续就够了. 注意到 $f_n(x)$ 在 $\lambda^n\alpha$ 处取到最小值，以及

$$f_1(\lambda\alpha) < f_2(\lambda^2\alpha) < \cdots < f_n(\lambda^n\alpha) < \cdots$$

根据(5) 式，容易通过归纳法证明$\{f_n(\lambda^n\alpha)\}$ 是$[\alpha, 1]$ 上的严格增加的数列. 故可设

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda^n\alpha) = \eta$$

则 $\eta \in [\alpha, 1]$. 根据(5) 式，有

$$g(f_n(\lambda^n\alpha)) = \lambda f_{n-1}(\lambda^{n-1}\alpha)$$

令 $n \to \infty$，即得 $g(\eta) = \lambda\eta$. 由条件(iii)，$\eta = 1 = f(+0)$. 这就保证了 f 在 $x = 0$ 点连续.

3　结　　论

本文研究了第二类 FKS 函数方程推广形式下的单谷延拓解，将一个参数的情形拓展到两个参数. 文献[12-13]已经得到了单调递减解，本文进一步得到了单谷解和单谷延拓解的存在条件. 利用迭代构造法，分别构造了所有单谷解和单谷延拓解. 我们能够得到这些解的前提条件是假设存在这些特殊类型的解，从而推导出解存在性的诸多充分条件. 在这些充分条件成立的情况下，我们非常幸运地构造出了所有这些类型的解. 因此我们导出的条件不仅是充分的，而且还是必要的. 至于是否还有其他类型的解，以及如何构造，是我们下一步的工作.

参考文献：

[1] FEIGENBAUM M J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations [J]. Journal of Statistical Physics，1978，19(1)：25-52.

[2] FEIGENBAUM M J. The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations [J]. Journal of Statistical Physics，1979，21(6)：669-706.

[3] CAMPANINO M，EPSTEIN H. On the Existence of Feigenbaum's Fixed Point [J]. Communications in Mathematical Physics，1981，79(2)：261-302.

[4] LANFORD O E. A Computer-Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures [J]. Bulletin of the American Mathematical Society，1982，6(3)：427-435.

[5] 杨　路，张景中. 第二类 Feigenbaum 函数方程 [J]. 中国科学(A 辑)，1985，15(12)：1061-1069.

[6] 廖公夫. 第二类 Feigenbaum 函数方程的单谷扩充连续解 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版)，1988，9(6)：649-654.

[7] 唐元生. Feigenbaum 函数方程的单峰偶解 [J]. 青岛大学学报(自然科学版)，1994，7(1)：29-35.

[8] 司建国，张　敏. 第二类 Feigenbaum 函数方程凸解的构造 [J]. 中国科学(A 辑)，2009，39(1)：49-70.

[9] 张　敏，司建国. 推广后的第二类 Feigenbaum 函数方程的解的新构造性方法 [J]. 山东大学学报(理学版)，2011，

46(4):34-36,41.

[10] FEIGENBAUM M J, KADANOFF L P, SHENKER S J. Quasiperiodicity in Dissipative Systems: A Renormalization Group Analysis [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1982, 5(2-3): 370-386.

[11] BRIGGS K M, DIXON T W, SZEKERES G. Analytic Solutions of the Cvitanovic'-Feigenbaum and Feigenbaum-Kadanoff-Shenker Equations [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, 8(2): 347-357.

[12] 刘好斌,石勇国. Feigenbaum-Kadanoff-Shenker 方程带双参数的推广 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2018,41(6):781-784.

[13] SHI Y G. Single-Valley Solutions of the Second Type of FKS Equation [J]. Aequationes Mathematicae, 2019, 93(5): 919-925.

[14] 闻道君,胡 洵. 单调 α-非扩张映象不动点的强收敛定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2018,40(2):44-48.

[15] 李兴贵,黄家琳. 不动点技巧在反应扩散模糊随机周期时滞系统稳定性分析中的应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2019,41(6):64-72.

On Single-Valley-Extended Solution for the Second Type of FKS Equation with Two Parameters

LIU Hao-bin[1,2], SHI Yong-guo[1,2]

1. College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan 641100, China;

2. Data Recovery Key Laboratory of Sichuan Province, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan 641100, China

Abstract: The FKS function equation copes with the description of the quasiperiodic route to chaos for mappings of circle. As a simplification, this paper considers another form of equation which is the second type of FKS function equation with two parameters, extending the case of single parameter to two parameters. Firstly, the necessary conditions for continuous solutions and single-valley-extended solutions have been given respectively. Secondly, the conditions have been obtained for distinguishing single-valley solutions and single-valley-extended solutions. Finally, according to the specific value range of parameters, using the iterative construction method, all single-valley solutions and single-valley-extended solutions have been constructed, the result of the existing decreasing solution of the second type of KFS function equation is extended to the single-valley-extended continuous solution. The detailed proof process is given in this paper.

Key words: the second type of FKS equation; single-valley solution; single-valley-extended solution; iterative construction method

责任编辑 廖 坤