

利用重心有理插值配点法 求解一、二维对流扩散方程^①

陈文兴¹, 戴书洋¹, 田小娟², 郑宝娟³, 纪乐⁴

1. 武汉大学 数学与统计学院, 武汉 430072; 2. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092;
3. 长安大学 理学院, 西安 710064; 4. 宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021

摘要: 对流扩散是自然界中一种最为常见的物理现象, 在气液固中均可发生, 该方程已被广泛应用于飞行器设计、热磁辐射、天气预报、化工反应、生物斑点生长等重要领域. 为了进一步提高该微分方程的逼近精度, 可通过改进基底函数或者调整离散点分布来实现. 借助于重心有理插值数值逼近稳定性好, 离散矩阵具有稀疏性等优势, 求解了一、二维对流扩散方程. 将该数值方法与传统的 FDM 以及 Meshfree 等方法进行比较, 得到的结论是: 重心有理插值配点法在求解一、二维对流扩散问题上具有精度高、条件数小、收敛快等优点. 从插值节点的分布效果上看, Chebyshev 点比等距网格点更稳定, 逼近精度略高, 且能有效地抑制“龙格”现象的发生. 最后, 给出了相应的误差估计与收敛性分析, 并使用软件画出了热流密度的分布云图, 该图有利于分析对流扩散方程的数值解变化趋势问题.

关键词: 重心有理插值; 对流扩散方程; 变系数; 热流密度云图

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)08-0035-09

对流扩散方程广泛应用于热磁辐射、气象学、航空等重要领域, 此外, Burgers 方程、不可压的 Navier-Stokes 方程^[1]、对流扩散化学反应动力等方程都含有对流扩散的性质. 目前求解该类方程常见的数值方法有 FDM 法^[2]、FEM 法^[3]、FVM 法^[4]、格子 Boltzmann 方法^[5]等, 但在逼近过程中还存在一些缺陷, 比如: 离散理论复杂, 求解效率和稳定性有待改进. 因此, 还有待探索出新的数值方法, 对于传统的有限差分法, 文献[6-7]提出了 2 种将特征线和有限差分相结合的数值方法, 当色散效应小于扩散效应时容易产生震荡解, 需要取较小的时间步长来避免数值解的不稳定性. 文献[8]提出了用广义的有限差分法结合二阶显式 Runge-Kutta 方法(RK2 方法)来求解耦合非定常非线性的对流扩散方程(CDE), 与传统的欧拉方法相比, RK2 方法具有更高的精度. 文献[9]基于经典的 Douglas-Gunn 格式构造了一种新的交替隐(ADI)差分格式, 求解了三维分数阶反常对流扩散方程, 对于光速传播、布朗运动现象有准确的解释性. 文献[10]求解了一维对流扩散方程, 空间项上采用了四阶紧致的差分格式, 时间项用 $\frac{1}{3}$ 的 Simpson 公式进行离散, 该高精度紧致隐式差分法的截断误差为 $O(\tau^4 + h^4)$, 并加入了指数变换方法来降低对流项对数值解产生的影响.

重心有理插值配点法是一种高精度的数值方法, 近年来备受科研人员的青睐. 文献[11]给出了重心插值公式及其收敛性、稳定性的证明. 文献[12-13]用重心有理插值配点法求解了非线性 MEMS 微梁的非线性弯曲问题, 还将之应用到了求解极坐标系下的弹性问题. 此外, 重心插值配点法还可以求解 Fredholm 积

① 收稿日期: 2019-07-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501313); 国家自然科学基金青年教师基金项目(11701433).

作者简介: 陈文兴(1990-), 男, 博士研究生, 主要从事偏微分方程数值解与多尺度材料建模的研究.

通信作者: 戴书洋, 副教授.

分方程^[14]. 文献[15]利用线性重心有理插值法求解了非线性抛物型方程, 验证了该方法的有效性. 重心有理插值法也是谱方法的重要分支, 对于周期性的边界问题, 使用 Fourier 谱变换将 PDE 降阶为 ODE 方程组, 有较好的数值结果^[16]. 以上文献体现了重心有理插值配点法适应范围广、精度高、数值稳定、可延拓等特点. 使用重心插值配点法求解对流扩散问题的研究相对较少, 该微分方程在变系数与高维方面的情况还有待进一步研究.

本文重点研究利用重心有理插值配点法求解变系数的一、二维对流扩散方程. 对于变系数的对流扩散问题, 对流项与扩散项之间的影响是不固定的, 求解时容易产生数值耗散与震荡, 为此需要寻找更好更稳定的高精度数值解法, 这也是本文探索与数值实验的目的. 通过与高精度紧致差分以及 Meshfree 等数值方法进行比较, 突出该方法精度高、收敛快、离散矩阵的条件数小等特点. 重心有理插值配点法是基于重心 Lagrange 插值法的改进, 需要递推出 n 阶微分矩阵的内部规律, 本文给出了相应的误差分析以及收敛性分析, 是用软件画出了热流密度云图, 更加直观地可视化了内部函数值的变化.

1 重心有理插值理论

重心有理插值配点法是根据重心 Lagrange 插值法改进权值得到的, 权值的合理性直接影响数值的逼近精度和稳定性. 用重心有理插值配点法求解对流扩散方程最关键的步骤是对微分方程的离散^[17], 离散前需构造出重心有理插值的微分矩阵, 即明确待求函数与插值基函数值之间的函数关系. 若给定 n 个离散点, 记为 x_1, x_2, \dots, x_n , 任选一个整数 d , 且满足 $0 \leq d \leq N$, $J_k = \{i: i = k - d, \dots, k\}$, 则重心有理权为

$$\omega_k = \sum_{i \in J_k} (-1)^i \prod_{j=i, j \neq k}^{i+d} \frac{1}{x_k - x_j} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

对于区间 $[a, b]$ 上的 n 个节点 $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 函数 $u(x)$ 在节点处的函数值为 $u_j = u(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 则函数 $u(x)$ 的重心有理插值函数为

$$u(x) = \sum_{j=1}^n B_j(x) u_j$$

其中 $B_j(x)$ 为

$$B_j(x) = \frac{\frac{\omega_j}{x - x_j}}{\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{x - x_k}} \quad (2)$$

移项后, 将公式(2) 两边同时乘以 $x - x_i$ ($i \neq j$), 令 $L_j = B_j(x)$, 变形后得

$$L_j \sum_{k=1}^n \omega_k \frac{x - x_i}{x - x_k} = \omega_j \frac{x - x_i}{x - x_k} \quad (3)$$

对(3) 式两边分别关于 x 求一阶和二阶导数, 同时记

$$s(x) = \sum_{k=1}^n \omega_k \frac{x - x_i}{x - x_k}$$

则有

$$L_j'(x) s(x) + L_j(x) s'(x) = \omega_j \left(\frac{x - x_i}{x - x_j} \right)' \quad (4)$$

$$L_j''(x) s(x) + 2L_j'(x) s'(x) + L_j(x) s''(x) = \omega_j \left(\frac{x - x_i}{x - x_j} \right)'' \quad (5)$$

然后, 将 $s'(x_i), s''(x_i)$ 的结果分别代入(4), (5) 式, 可得

$$L_j'(x_i) = \frac{\frac{\omega_j}{x_i - x_j}}{\frac{\omega_i}{x_i - x_k}}$$

$$L_j''(x_i) = -2 \frac{\frac{\omega_j}{x_i - x_j}}{x_i - x_j} \left(\sum_{k \neq i}^n \frac{\frac{\omega_k}{x_i - x_k}}{x_i - x_k} + \frac{1}{x_i - x_j} \right)$$

一维重心有理插值的一、二阶微分矩阵的元素计算公式分别表示为

$$D_{ij}^{(1)} = L'_j(x_i) \quad D_{ij}^{(2)} = L''_j(x_i)$$

再用数学归纳法依次可得 m 阶微分矩阵的元素计算公式为

$$D_{ij}^{(m)} = m \left(D_{ii}^{(m-1)} D_{ij}^{(1)} - \frac{D_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad i \neq j \quad (6)$$

$$D_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}^{(m)} \quad (7)$$

$u(x)$ 在节点 x_1, x_2, \dots, x_n 对应的函数向量为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, 则一维 m 阶导数的离散公式为

$$u_i^{(m)} = \frac{d^m \mathbf{u}(x_i)}{dx^m} = \sum_{j=1}^n B_j^{(m)}(x_i) u_j = \sum_{j=1}^n D_{ij}^{(m)} u_j \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$\mathbf{D}^{(m)}$ 为未知函数 $\mathbf{u}(x)$ 的 m 阶微分矩阵, 记为 $\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{u}$. 二维偏微分方程的离散公式是在一维的离散基础上形成的, 在表示二维重心有理插值微分矩阵的同时还需要引入 Kronecker 积, $\mathbf{C}^{(l)}, \mathbf{D}^{(k)}$ 表示沿着 x 方向和 y 方向的 l, k 阶微分矩阵, 且规定 $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{I}_M, \mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{I}_N$, 其中 $\mathbf{I}_M, \mathbf{I}_N$ 为单位矩阵. 对二维 $l+k$ 阶偏导函数 $\mathbf{u}^{(l,k)}(x_i, y_j) (i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N)$, 离散的结果为

$$\mathbf{u}^{(l,k)} = \frac{\partial^{l+k} \mathbf{u}(x, y)}{\partial x^l \partial y^k} = \mathbf{D}^{(l,k)} \mathbf{u} = (\mathbf{C}^{(l)} \otimes \mathbf{D}^{(k)}) \mathbf{u} \quad (9)$$

2 误差估计与收敛性分析

已知 $P_n(x)$ 是重心插值函数, $\hat{P}_n(x)$ 是考虑了微小扰动后的函数逼近值. 由误差摄动理论来估计最后的误差范围, 也是对数值舍入误差敏感度的衡量. 向后误差分析有助于检验算法在计算过程中的稳定性. 当计算的扰动项 ε 很小时, 若求解的数值结果在误差允许的范围, 则算法是向后稳定的. 估计时引入函数的条件数来表示扰动的灵敏度. 由文献[18]中的定理 4.1 可得相对误差估计界为

$$\frac{|P_n(x) - \hat{P}_n(x)|}{|P_n(x)|} \leq u(3n+4) \text{cond}(x, n, f) + u(3n+2) \Lambda_n + O(u^2) \quad (10)$$

定理 1 若使用第二类 Chebyshev 插值点, $P_n(x)$ 是重心 Lagrange 插值函数, $P^*(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳一致逼近多项式^[19], 则存在常量 $C = \frac{2}{\pi} \log n + 2$, 使得

$$\|f(x) - P_n(x)\| < (2 + \frac{2}{\pi} \log n) \|f(x) - P^*(x)\| \quad (11)$$

定理 2 若使用等距节点做为重心插值逼近的离散点, 则满足如下范数关系式:

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} \|f(x) - p_n(x)\| &\leq \varepsilon \max_{a \leq x \leq b} \Lambda_n \\ \frac{2^{d-2}}{d+1} \ln\left(\frac{n}{d} - 1\right) &\leq \Lambda_n \leq 2^{d-1} (2 + \ln n) \quad d \geq 2 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 Λ_n 为 Lebesgue 常量, 也是有上下界的^[20].

定理 3 影响重心有理插值算法收敛性的主要因素有多项式 $r_n(x)$ 的次数 d 以及网格尺寸 h ^[21]. 假如 $d \geq 1, n \geq 3$, 并且 $f \in C^{d+2}[a, b]$, 最大网格步长为 $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 重心插值的收敛阶为 $O(h^{d+1})$, 且满足不等式

$$\|f(x) - r_n(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - r_n(x)| \leq Ch^{d+1} \quad (13)$$

3 数值算例

3.1 算例 1

本算例求解的是一维非定常对流扩散方程, 采用等距节点对方程进行离散, 并将本文的重心有理插值配点法与文献[22]中的 3 种有限差分法进行比较. 差分格式包括了古典隐格式、C-N 格式、高精度紧致差分格式, 3 种有限差分数值解格式中表现较好的是高精度紧致差分格式, 待求解方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + P(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad x \in [0, 1], t \in [0, 1] \quad (14)$$

初始条件: $u(0, t) = 0, u(1, t) = e^{-t} \sin 1, t \in [0, 1]$.

边界条件: $u(x, 0) = \sin x, u(x, 1) = e^{-1} \sin x, x \in [0, 1]$.

解析解: $u(x, t) = e^{-t} \sin x, x \in [0, 1], t \in [0, 1]$. 源项函数为 $f(x, t) = te^{-t} \sin x \cos x$, 对流系数为 $P(x, t) = t \sin x$, 扩散项系数 $\varepsilon = 1$. 用重心有理插值配点法对方程(14) 进行离散, 有

$$[(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}_t^{(1)}) + \text{diag}(\mathbf{P}(x_i, t_j))(\mathbf{D}_x^{(1)} \otimes \mathbf{I}_n) - \varepsilon(\mathbf{D}_x^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n)] \mathbf{u}_{N \times 1} = \mathbf{F}_c \quad (15)$$

其中: $\mathbf{D}_t^{(1)}$ 是关于时间项的一阶微分矩阵, $\mathbf{D}_x^{(1)}$ 是空间项 x 的一阶微分矩阵; 同理, 二阶微分矩阵为 $\mathbf{D}_x^{(2)}$, 源项函数(右端项)是列向量 \mathbf{F}_c . 边界条件属于 Dirichlet 边界, 初始条件的离散结果为 $\mathbf{I}_t \mathbf{u}_t = \mathbf{F}_1$, 边界条件的离散结果为 $\mathbf{I}_x \mathbf{u}_x = \mathbf{F}_2$, 使用附加法将控制方程与初边值条件的离散结果组装, 形成一个总的线性方程组 $\mathbf{A}_t \mathbf{U} = \mathbf{F}$. 求解结果如表 1 所示, 空间步长参数为 h , 时间步长定为 $\tau = 0.05$, 数值结果都是在同一网格尺度下进行比较的.

表 1 重心有理插值配点法与 3 种有限差分格式的数值解对比表

h	古典隐格式		C-N 格式		高精度紧致差分格式		重心有理插值配点法	
	最大绝对值误差	收敛阶	最大绝对值误差	收敛阶	最大绝对值误差	收敛阶	最大绝对值误差	收敛阶
$\frac{1}{8}$	2.41×10^{-2}	—	3.16×10^{-3}	—	9.50×10^{-3}	4.05	8.85×10^{-7}	—
$\frac{1}{16}$	6.41×10^{-3}	1.91	9.24×10^{-4}	1.77	5.72×10^{-4}	4.09	1.41×10^{-8}	5.97
$\frac{1}{32}$	1.68×10^{-3}	1.93	2.49×10^{-4}	1.89	3.35×10^{-5}	4.02	2.32×10^{-11}	9.25
$\frac{1}{64}$	4.25×10^{-4}	1.98	6.33×10^{-5}	1.98	2.06×10^{-6}	4.01	4.51×10^{-12}	5.16
$\frac{1}{128}$	1.07×10^{-4}	1.99	1.59×10^{-6}	1.99	1.28×10^{-7}	4.00	2.68×10^{-10}	2.04

注: $t = 0.5$ 时刻各数值方法对应的最大绝对值误差和收敛阶.

通过以上数值实验对比, 在 3 种有限差分格式中, 高精度紧致差分格式求解的逼近精度相对较高, 但是与重心有理插值配点法相比, 高精度紧致差分格式的逼近精度以及收敛速度明显较低. 重心插值配点法的空间步长不需要划分到很细便能达到理想的逼近结果, 该数值结果也能反映出重心插值配点法的优势所在. 此外, 算例 1 数值结果的可视化如图 1 与图 2 所示, 图 1 是重心有理插值的数值解, 呈现出了非常光滑的曲面性质. 图 2 则是 $h = \frac{1}{32}$ 时的绝对误差图, 误差图在边界波动较大, 内部变化相对平缓, 说明对流扩散类方程在使用重心插值配点法求解时, 边界处的离散点选取非常重要.

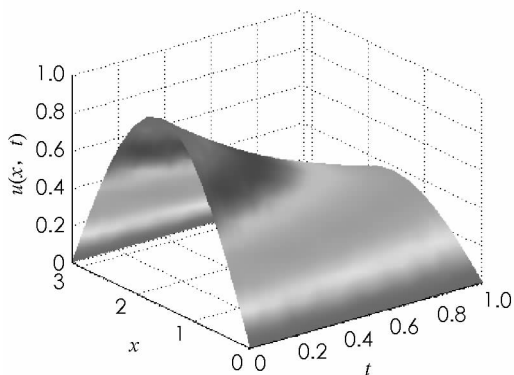


图 1 一维对流扩散方程的重心有理插值数值解

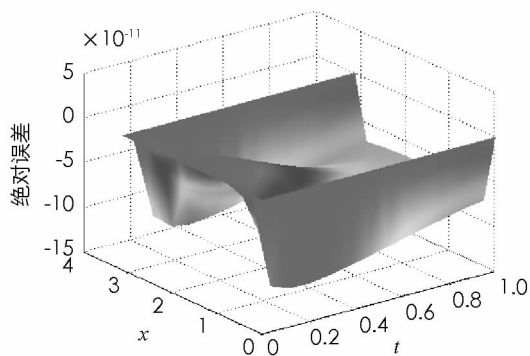


图 2 重心有理插值配点法的最大绝对误差图

3.2 算例 2

本算例同样取的是一维非定常对流扩散方程, 不同之处在于采用了两种离散点进行求解, 分别是等距节点与 Chebyshev 离散点. 本算例另一个区别是采用了 Robin 边界条件, 初始条件中出现了函数的偏导, 再

按照重心有理插值理论对方程进行离散, 待求解的一维非定常对流扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - P(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Q(x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad -1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \quad (16)$$

初始条件: $u_x(0, t) - \frac{3}{2}u(0, t) = 0, u_x(1, t) + u(1, t) = 2te^{1-\beta t} t \in [0, 1]$.

边界条件: $u(x, -1) = (x^2 - 1)e^{x+\beta}, u(x, 1) = (1 - x^2)e^{x-\beta}, x \in [-1, 1]$.

解析解: $u(x, t) = (1 - x^2)te^{x-\beta t}, x \in [-1, 1], t \in [0, 1]$.

源项函数: $f(x, t) = \frac{1}{2}e^{x-\beta t}(1 - \beta t + x^2 - \beta tx - 2t - 2tx)$.

扩散项系数为 $P(x) = \frac{1}{x+3}$, 对流项系数为 $Q(x) = -\frac{1}{x+1}$. 方程离散结果为

$$[(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}_t^{(1)}) - \text{diag}(\mathbf{P}(x_i))(\mathbf{D}_x^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) + \text{diag}(\mathbf{Q}(x_i))(\mathbf{D}_x^{(1)} \otimes \mathbf{I}_n)]\mathbf{u} = \mathbf{F}_c \quad (17)$$

边界条件的离散结果表示为 $\mathbf{I}_m \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1, t = 0, x \in [-1, 1]$, 与 $\mathbf{I}_m \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}_2, t = 1, x \in [-1, 1]$. 另外 2 个初始条件的离散结果为 $[\mathbf{D}_x^{(1)} \otimes \mathbf{I}_n - 1.5\mathbf{I}_n]\mathbf{u}_3 = \mathbf{F}_3$ 和 $[(\mathbf{D}_x^{(1)} \otimes \mathbf{I}_n) + \mathbf{I}_n]\mathbf{u}_4 = \mathbf{F}_4$. 组装成总的离散方程后可以得到 $\mathbf{A}_1 \mathbf{U} = \mathbf{F}$, 其中 $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)^T, \mathbf{F} = (\mathbf{F}_c, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^T$, 求解数值结果如表 2 所示.

表 2 两种类型的离散点计算一维非定常对流扩散方程的误差比较表

N	Chebyshev 点		等距节点	
	E_1	E_2	E_1	E_2
100	9.96×10^{-11}	1.04×10^{-11}	4.04×10^{-12}	2.91×10^{-13}
225	3.43×10^{-12}	2.48×10^{-13}	4.01×10^{-12}	2.91×10^{-13}
400	3.45×10^{-12}	1.97×10^{-13}	5.89×10^{-12}	3.27×10^{-13}
625	1.25×10^{-11}	5.60×10^{-13}	2.53×10^{-10}	1.14×10^{-11}
900	4.14×10^{-11}	1.56×10^{-12}	3.25×10^{-9}	1.22×10^{-10}

表 2 中的 E_1 与 E_2 分别代表了参数 $\beta = 0.5$ 与 $\beta = 1$ 的相对误差. 从结果可以看出参数 β 的选取对数值结果是有影响的(限于篇幅, 其他的 β 数值未一一列举). 数值结果中得到的规律是: 随着参数 β 的增大, 数值解的逼近效果会降低. 从表 2 可得出: 随着插值离散点的增多, 逼近的精度是先增, 后趋于平缓或略有下降的趋势. 对于等距节点, 随着离散点的增多, 插值结果会出现“龙格现象”, 数值逼近结果会有轻微震荡和不稳定现象. 而在相同插值点数下, Chebyshev 点的逼近效果好于等距节点. 因此, 无论是点数还是逼近多项式的项数都需要选择合适, 这也说明了影响重心有理插值逼近效果的因素与插值点的分布情况有关. 最后, 本文还用 MATLAB 画出了该方程的热流密度云图, 图 3 能很直观地看到在不同区域上热流的变化情况, 箭头越长表示变化越快, 黑色线条表示的是等温线, 总趋势是由高温向低温区域扩散. 图 4 表示的是重心有理插值在 $N = 225$ 时, 选择 Chebyshev 节点离散, 最终得到的数值相对误差图.

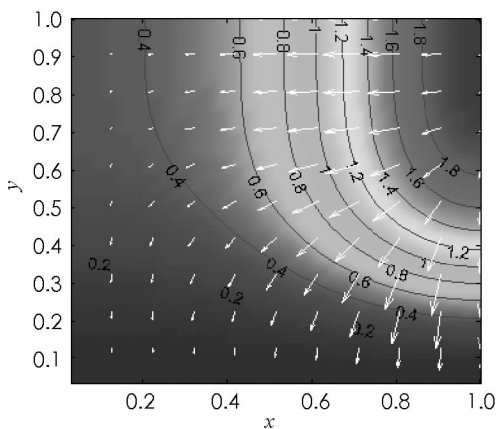


图 3 一维非定常对流扩散方程数值解云图

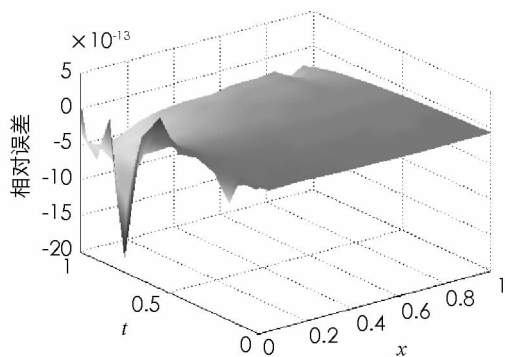


图 4 一维非定常对流扩散方程的相对误差图

3.3 算例 3

本算例考虑的是一个二维稳态的对流扩散方程, 对流扩散也能客观描述热传递现象, 常见传热方式有: 导热、对流与辐射, 物体的热量会从高温区传到低温区^[23]. 如果物体温度不随着时间的变化而变化, 称为稳态, 否则为瞬态导热. 稳态传热的应用实例如保温墙和长热力管的管壁导热等. 微粒在扩散时伴有流入和流出现象, 促使扩散和对流两种物理特性互相耦合发生. 求解的方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (18)$$

其中, $(x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $a(x, y) = 2 - x^2 - y$, $b(x, y) = e^{x-y}$, 方程(18)化简后的等价形式为

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{yy} + C(x, y)u_x + D(x, y)u_y = F(x, y) \quad (19)$$

沿 x 方向的扩散项系数为 $A(x, y) = 2 - x^2 - y$, y 方向的扩散项系数为 $B(x, y) = e^{x-y}$.

x 方向的对流项系数为 $C(x, y) = -2x$, y 方向的对流项系数为 $D(x, y) = e^{x-y}$.

源项函数: $F(x, y) = -16x(1-x)(3-2y)e^{x-y} + 32y(1-y)(32x^2 + y^2 - x - 2)$.

精确解为 $u(x, y) = 16xy(1-x)(1-y)$, 边界条件为 $u(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma$.

按照上述重心有理插值离散理论对算例 3 的方程与边界分别进行离散, 离散点分别取等距节点和 Chebyshev 节点, 区别在于求解的是二维稳态的对流扩散方程, 并与 Meshfree 方法的数值解进行比较. 使用重心有理插值配点法对方程(18)进行离散, 对应的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} A_1(x, y) & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_m(x, y) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & \cdots & C_{1m}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1}^{(2)} & \cdots & C_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(x, y) & & & \\ & \ddots & & \\ & & B_m(x, y) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1''(y) \\ \vdots \\ u_m''(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(x, y) & & & \\ & \ddots & & \\ & & C_m(x, y) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & \cdots & C_{1m}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1}^{(1)} & \cdots & C_{mm}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1(x, y) & & & \\ & \ddots & & \\ & & D_m(x, y) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(y) \\ \vdots \\ u_m'(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_m(x, y) \end{bmatrix} \quad (20)$$

算例 3 采用置换法, 对于矩形域来说, 是将边界离散的方程替换掉原离散的 M 个方程组, 再进行求解, 其优点是统一处理边界, 且得到的离散矩阵是方阵, 一定程度上可以避免线性方程组系数的矩阵奇异化, 也能提高代数方程的求解精度. 矩阵方程(20)的等价方程可简写为

$$\begin{aligned} & [\text{diag}(\mathbf{A}(x_i, y_j))(\mathbf{D}_x^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) + \text{diag}(\mathbf{B}(x_i, y_j))(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}_y^{(2)}) + \\ & \text{diag}(\mathbf{C}(x_i, y_j))((\mathbf{D}_x^{(1)} \otimes \mathbf{I}_n) + (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}_y^{(1)}))] \mathbf{u} = \mathbf{F}_c \end{aligned} \quad (21)$$

边界为 Dirichlet 边界, 离散表达式为 $\mathbf{I}_b \mathbf{u}_b = \mathbf{F}_b$. 其中 \mathbf{F}_b 是零向量, 其行数与左边微分矩阵 \mathbf{u}_b 保持一致. 在方程(21)中, $\mathbf{D}_x^{(2)}$ 和 $\mathbf{D}_x^{(1)}$ 分别表示 x 方向的二阶和一阶微分矩阵, $\mathbf{D}_y^{(2)}$ 和 $\mathbf{D}_y^{(1)}$ 分别表示 y 方向的二阶和一阶微分矩阵. $\mathbf{I}_m, \mathbf{I}_n$ 分别是单位矩阵, \mathbf{F}_c 是源项函数, 常使用 $N \times 1$ 的向量函数表示, 记为 $\mathbf{F}_{N \times 1} = f(x_i, y_j)$. 同样经过控制方程与边界方程离散结果的组装, 得到总的线性方程组 $\mathbf{A}_l \mathbf{U} = \mathbf{F}$, 再求解出数值解 \mathbf{U} . 最后, 本文将重心有理插值配点法计算的数值结果与 Kansa 无网格配点方法进行了比较, 该数值算例选自文献[24]第 39 章的第二个算例, 无网格的基底函数分别选用了 Gaussian 函数和 IMQ 函数, 离散点选择的是 Halton 点, 用 Kansa 无网格配点法求解该方程时存在一个缺陷: 当离散点较多时, 离散矩阵的条件数比较大, 容易引起数值解的不稳定性. 具体的误差结果比较详见表 3 和表 4.

表 3 无网格法求解二维稳态对流扩散方程的数值结果

N	IMQ 函数		Gaussian 函数	
	误差	条件数	误差	条件数
25	1.0918×10^{-2}	4.898×10^3	1.1235×10^{-2}	3.302×10^3
81	1.8543×10^{-4}	1.286×10^9	1.3709×10^{-3}	4.992×10^5
289	8.4456×10^{-7}	7.031×10^{19}	8.1051×10^{-5}	7.527×10^9
1089	2.5598×10^{-5}	4.553×10^{20}	7.0414×10^{-8}	7.786×10^{17}

表 4 重心有理插值配点法求解二维稳态对流扩散方程的数值结果

N	Chebyshev 点		等距节点	
	相对误差	条件数	相对误差	条件数
25	2.203×10^{-12}	9.895×10^4	9.766×10^{-11}	2.451×10^6
81	7.727×10^{-12}	3.566×10^5	1.307×10^{-10}	5.376×10^6
289	1.371×10^{-11}	9.662×10^5	9.265×10^{-10}	8.703×10^6
1 089	1.787×10^{-11}	2.184×10^6	9.895×10^{-10}	1.281×10^7

通过表 3 和表 4 的比较能直观看出, 重心插值配点法的逼近精度更高, 如当 $N=25$ 时 Gaussian 无网格法的逼近误差数量级为 10^{-2} , 而基于 Chebyshev 插值节点的重心有理插值配点法的数值误差数量级可达到 10^{-12} . 此外, 重心插值配点法的条件数相对较小, 数值解更加稳定, 收敛速度接近指数收敛. 对于 Kansa 无网格数值方法, 其优点是离散点的选取相对自由, 不受网格约束, 缺陷是在处理高维问题或为了提高精度而加密插值点时, 离散矩阵容易产生弱奇异现象. 这些潜在问题容易引发数值解的不稳定性, 需要结合正则化理论加以修正, 实际上增大了计算时间.

图 5 是用重心插值配点法求解二维稳态对流扩散方程的数值解云图, 云图的函数变化趋势相对平滑. 图 6 是热流密度云图, 从图 6 可以看到梯度值的变化与流动方向. 黑色线圈代表的是某时刻对应的等温线, 可更直观地反映物质内部温度的分布情况. 如果有多组瞬态图合成则可以制作成动态图, 实时仿真物体在受热后温度是如何动态流动扩散的, 也为瞬态对流扩散的研究奠定了基础. 白色箭头越长表示温度变化趋势越快, 该方面的研究也突显了数值解的直观与便捷的优势.

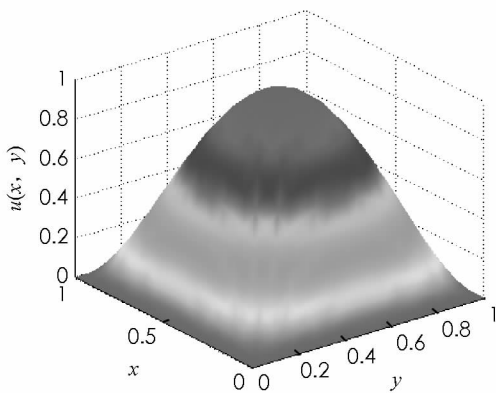


图 5 二维变系数稳态对流扩散方程的数值解

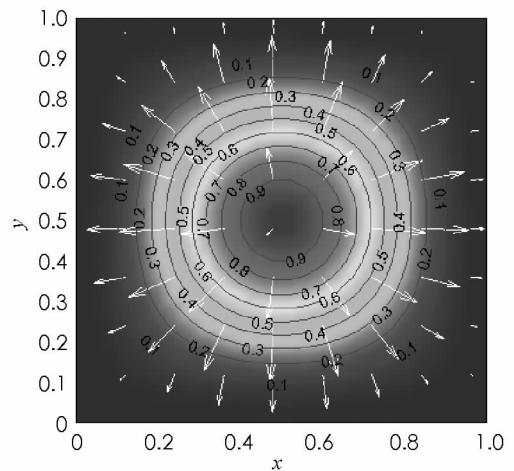


图 6 二维稳态对流扩散方程的热流密度云图

4 结 论

本文主要研究的是利用重心有理插值配点法求解一、二维变系数对流扩散方程, 该数值方法是在重心 Lagrange 插值法的理论上改进权函数而得到的, 改进后的插值性质更加稳定. 本文总结了重心有理插值配点法常见的几种数值误差估计以及收敛性分析. 全文总共包含了 3 个数值算例, 计算结果表明: 在相同网格尺寸下, Chebyshev 点比等距节点的逼近效果要好. 此外, 重心有理插值配点法与古典隐格式、C-N 格式、高精度紧致差分格式进行比较, 可以看出重心有理插值配点法在数值精度与收敛阶上都有明显的优势. 对于二维稳态的对流扩散问题, 将重心有理插值配点法与非对称的 Kansa 无网格配点法进行比较, 该方法的离散矩阵条件数更小, 并且求解精度更高, 再次验证了该方法的有效性. 最后, 本文还可可视化热流密度云图, 能更好地可视化数值结果, 对于研究热扩散、对流强弱变化问题具有一定的应用价值.

参考文献:

- [1] 刘青, 尚月强. 非定常 Navier-Stokes 方程有限元算子分裂算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(3):

75-83.

- [2] SUMAN V K, SENGUPTA T K, JYOTHI D P C, et al. Spectral Analysis of Finite Difference Schemes for Convection-Diffusion Equation [J]. *Computers & Fluids*, 2017, 150: 95-114.
- [3] CHEICHAN M S, KASHKOOL H A, GAO F Z. A Weak Galerkin Finite Element Method for Solving Nonlinear Convection-Diffusion Problems in Two Dimensions [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 354: 149-163.
- [4] TAN J W. An Upwind Finite Volume Method for Convection-Diffusion Equations on Rectangular Mesh [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, 118: 159-165.
- [5] WANG H L, SHI B C, LIANG H, et al. Finite-Difference Lattice Boltzmann Model for Nonlinear Convection-Diffusion Equations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 309: 334-349.
- [6] 陆金甫, 刘晓遇, 杜正平. 对流占优扩散问题的一种特征差分方法 [J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2002, 42(8): 1125-1127.
- [7] 芮洪兴. 对流扩散问题的沿特征线修正的区域分解并行算法 [J]. *山东大学学报(自然科学版)*, 1998, 32(2): 121-127.
- [8] FU Z J, TANG Z C, ZHAO H T, et al. Numerical Solutions of the Coupled Unsteady Nonlinear Convection-Diffusion Equations Based on Generalized Finite Difference Method [J]. *The European Physical Journal Plus*, 2019, 134(6): 272.
- [9] 聂玉峰, 胡嘉卉, 王俊刚. 求解三维空间分数阶对流扩散方程的 Douglas-Gunn 格式 [J]. *郑州大学学报(理学版)*, 2019, 51(1): 44-50.
- [10] 罗传胜, 李春光, 董建强, 等. 求解对流扩散方程的一种高精度紧致差分格式 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2018, 40(9): 91-95.
- [11] BERRUT J P, TREFETHEN L N. Barycentric Lagrange Interpolation [J]. *SIAM Review*, 2004, 46(3): 501-517.
- [12] 王兆清, 庄美玲, 姜 剑. 非线性 MEMS 微梁的重心有理插值迭代配点法分析 [J]. *固体力学学报*, 2015, 36(5): 453-459.
- [13] 李树忱, 王兆清, 袁 超. 极坐标系下弹性问题的重心插值配点法 [J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2013, 44(5): 2031-2040.
- [14] 虎晓燕, 韩惠丽. 重心插值配点法求解分数阶 Fredholm 积分方程 [J]. *郑州大学学报(理学版)*, 2017, 49(1): 17-23.
- [15] LUO W H, HUANG T Z, GU X M, et al. Barycentric Rational Collocation Methods for a Class of Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2017, 68: 13-19.
- [16] 陈文兴, 田小娟, 王磊磊, 等. Fourier 谱方法求解二维波动方程及动态仿真多列波的干涉现象 [J]. *中国科技论文*, 2018, 13(24): 2834-2843.
- [17] 李树忱, 王兆清. 高精度无网格重心插值配点法——算法、程序及工程应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2012: 5-35.
- [18] HIGHAM N J. The Numerical Stability of Barycentric Lagrange Interpolation [J]. *Journal of Numerical Analysis*, 2004, 24(4): 547-556.
- [19] BATTLES Z, TREFETHEN L N. An Extension of MATLAB to Continuous Functions and Operators [J]. *SIAM Journal of Science Computation*, 2004, 25(5): 1743-1770.
- [20] BOS L, MARCHI S D, HORMANN K, et al. On the Lebesgue Constant of Barycentric Rational Interpolation at Equidistant Nodes [J]. *Numerische Mathematik*, 2012, 121(3): 461-471.
- [21] FLOATER M S, HORMANN K. Barycentric Rational Interpolation with No Poles and High Rates of Approximation [J]. *Numerische Mathematik*, 2007, 107(2): 315-331.
- [22] 葛永斌, 田振夫, 吴文权. 含源项非定常对流扩散方程的高精度紧致隐式差分方法 [J]. *水动力学研究与进展(A辑)*, 2006, 21(5): 619-625.
- [23] 詹涌强. 求解热传导方程的一个高精度格式 [J]. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 40(1): 18-22.
- [24] FASSHAUER G E. Meshfree Approximation Methods with Matlab [M]. Singapore: World Scientific Publishers, 2007: 358-361.

On Barycentric Rational Interpolation Collocation Method to Solve 1D and 2D Convection Diffusion Equation

CHEN Wen-xing¹, DAI Shu-yang¹,
TIAN Xiao-juan², ZHENG Bao-juan³, JI Le⁴

1. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;

3. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

4. School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China

Abstract: Convection-diffusion problem is one of the most common physical phenomenon in nature, which can occur in gas, liquid, and solid. This equation has been widely used in aircraft design, thermal magnetic radiation, weather forecasting, chemical reactions, and biological spot growth and so on. Constructing a new basis function and adjusting the distribution of discrete points are common methods to improve the approximation accuracy of differential equations. The Barycentric Rational Interpolation method is employed to solve the one and two-dimensional convection-diffusion equation based on its higher precision and the sparse discrete matrix. By comparing the mentioned numerical method with the traditional FDM and Mesh-free methods, the results show that the Barycentric Rational Interpolation collocation method has the advantages of high accuracy, small condition number, and fast convergence as solving the one and two-dimensional convection-diffusion equation. From the distribution effect of interpolation nodes, not only the stability and approximation accuracy of Chebyshev points are more superior than the equidistant grid points, but it can also effectively avoid "Runge phenomenon". Finally, the relative error estimate and convergence analysis are given and the heat flux density cloud map is demonstrated, which is beneficial to analyze the change trend of the numerical solution of the convection-diffusion equation.

Key words: barycenter rational interpolation; convection diffusion equation; variable coefficient; heat flux density cloud map

责任编辑 廖 坤