第 45 卷 第 9 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 9 月
Vol. 45 No. 9 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Sep. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.09.001

HGR 多项式根的交错分布定理①

刘建强

宁夏大学 数学统计学院,银川 750021

摘要: 乘积匹配是构造多任务核的一种基本方法,HGR 多项式则为乘积匹配多项式的存在性提供了判定依据. 运用数学归纳法等方法,研究了 HGR 多项式的性质,包括其首项系数、次数、对应连分式定义域的包含关系、根的交错分布等,在此基础上提出并证明了 HGR 多项式根的交错分布定理,最后举例说明了该定理的作用.

关 键 词: 交错分布;乘积匹配多项式;根的分布;HGR 系统

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)09-0001-05

再生核在机器学习中发挥着重要的作用[1-3],其中多项式核是一种常见的再生核[2,4-5].

当多个任务相互联系时,将多个任务同时学习是一种好的方法[6-8]. 多项式核的概念可以推广到多任务核,称为多项式多任务核[9-10]. 构造多任务核的方法主要有正算子方法、Bochner 定理方法、Kronecker 积方法以及乘积方法[5,9,11-12].

在乘积构造多任务核方法研究中,未见关于构造标量值核的研究. 因此,首先要用乘积构造标量值核(又称单任务核、传统再生核),才能考虑用乘积方式构造多任务核. 本研究从乘积构造标量值核时的一个充要条件出发,该充要条件与某多项式相关. 本文的研究内容是该多项式序列及其根的分布性质等等. 在乘积构造多任务核的研究中,发现了与一个多项式序列相关的数列,并证明了该数列的单调有界性[13].

定义 1[5] 设 P_1 是非零多项式且具有正负系数项至少各一个,若存在 n 次多项式 P_2 使得乘积 P_1P_2 系数全非负,则称 P_2 为 P_1 的 n 次乘积匹配多项式,简称匹配多项式.

文献[5]研究了二次多项式 $P_2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})^2-p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+q(p,q>0)$,发现不等式 $p^2/q\geqslant r_n$ 是 n 次匹配多项式存在的充分必要条件,数列 r_n 为多项式 P_1 的匹配多项式存在性判定数列[4,13],同时研究了 r_n 及其生产连分式列 h_n. 本文将研究 h_n 化为简化数之后的分子、分母序列,它们属于同一个多项式序列 g_n.

首先,用递归方式定义多项式 g_n.

定义 2 对实数 r,令 $g_0(r)=g_1(r)\equiv 1$;递归地,对非负整数 n,定义 $g_{n+2}(r)=g_{n+1}(r)-rg_n(r)$.

由定义 2 可知

$$g_2(r)=1-r \qquad g_3(r)=1-2r \qquad g_4(r)=1-3r+r^2$$
$$g_5(r)=1-4r+3r^2 \qquad g_6(r)=1-5r+6r^2-r^3$$

其中 g_0,g_1 没有根;g_2 的根 $r_{2,1}=1$;g_3 的根 $r_{3,1}=1/2$;g_4 的根 $r_{4,1}=(3-\sqrt{5})/2$,$r_{4,2}=(3+\sqrt{5})/2$;g_5 的根 $r_{5,1}=1/3$,$r_{5,2}=1$;g_6 的根 $r_{6,1}\approx 0.307\,979$,$r_{6,2}\approx 0.643\,104$,$r_{6,3}\approx 5.048\,917$.

为方便起见,用 ∂g_n 表示 g_n 的次数,用 $\alpha(g_n)$ 表示 g_n 的首项系数. 有下面引理.

引理 1 对非负整数 n,$\partial g_{2n}=\partial g_{2n+1}=n$;$\alpha(g_{2n})\alpha(g_{2n+1})>0$;$\alpha(g_{2n+1})\alpha(g_{2n+2})<0$.

---

① 收稿日期:2018-07-21

基金项目:宁夏高等学校科学技术研究项目(NCY2018047);国家自然科学基金项目(61662060);宁夏自然科学基金项目(2020AAC03030).

作者简介:刘建强(1981-),男,副教授,主要从事多任务核研究.

证 当 $n=0$ 时，结论显然成立．现假设结论对 $n=k-1$ 成立，即

$$\partial g_{2k-2}=\partial g_{2k-1}=k-1 \tag{1}$$

$$\alpha(g_{2k-2})\alpha(g_{2k-1})>0 \tag{2}$$

$$\alpha(g_{2k-1})\alpha(g_{2k})<0 \tag{3}$$

现在证明 $n=k$ 的情况．由式(1)，

$$\partial(-rg_{2k-2})=1+\partial(g_{2k-2})=k>\partial g_{2k-1} \tag{4}$$

由式(4) 可得

$$\partial(g_{2k})=\partial(g_{2k-1}-rg_{2k-2})=1+\partial(g_{2k-2})=k \tag{5}$$

且 g_{2k} 首项系数

$$\alpha(g_{2k})=\alpha(-rg_{2k-2})=-\alpha(g_{2k-2}) \tag{6}$$

根据式(2),(6) 有

$$\alpha(g_{2k})\alpha(g_{2k-1})=-\alpha(g_{2k-2})\alpha(g_{2k-1})<0$$

又根据式(1),(5) 有

$$\partial(g_{2k})=k,\ \partial(-rg_{2k-1})=k \tag{7}$$

且由式(3) 知 g_{2k} 与 $-rg_{2k-1}$ 同号，由 g_{2k+1} 定义知 g_{2k+1} 与 g_{2k} 为同次多项式，且首项系数符号相同，即

$$\alpha(g_{2k+1})\alpha(g_{2k})>0 \tag{8}$$

且

$$\partial(g_{2k+1})=\partial(g_{2k})=k \tag{9}$$

由式(6) 知

$$\partial(g_{2k+2})=1+\partial(g_{2k})=k+1 \tag{10}$$

且由式(8) 有

$$\alpha(g_{2k+2})\alpha(g_{2k+1})=-\alpha(g_{2k})\alpha(g_{2k+1})<0 \tag{11}$$

式(8)－(11) 说明命题对 $n=1$ 成立．根据归纳法原理，本引理式组对于所有 $n\geqslant 0$ 都成立，证毕．

根据引理 1，可以给出 g_n 的首项系数．

定理 1 对非负整数 n 有

$$\alpha(g_{2n})=(-1)^n \tag{12}$$

$$\alpha(g_{2n+1})=(-1)^n(n+1) \tag{13}$$

证 由 g_n 定义可知，$\alpha(g_0)=1$．现假设式(12) 对 $n=k-1(k\geqslant 1)$ 成立，即 $\alpha(g_{2k-2})=(-1)^{k-1}$，往证 $n=k$ 的情况．事实上，根据归纳假设及引理 1 中式(6)，$\alpha(g_{2k})=-\alpha(g_{2k-2})=-(-1)^{k-1}=(-1)^k$．

对于式(13)，注意到 $\alpha(g_1)=1$．假设其对 $n=k-1$ 成立，即 $\alpha(g_{2k-1})=(-1)^{k-1}k$．根据式(7) 及式(12)，$\alpha(g_{2k+1})=\alpha(g_{2k}-rg_{2k-1})=(-1)^k-(-1)^{k-1}k=(-1)^k(k+1)$．

下面介绍一些记号．首先介绍连分式序列 h_n[5]．定义 $h_0(r)\equiv 1$，$h_n(r)=1-r/h_{n-1}(r)$，$n\geqslant 1$，则 h_n 可以写成连分式形式 $h_n=1-r/(1-r/(\cdots r/(1-r)))$，其中共有 n 个 1．对 $n\geqslant 1$，定义集合 $\sigma_r(\mathbb{N})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(n)$，$\sigma_p(\mathbb{N})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(n)$，$\sigma_{rd}(\mathbb{N})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_{rd}(n)$．

引理 2 设 D_n 是 h_n 的定义域，则 $D_n=D_{n-1}\backslash\sigma_r(n)=\mathbb{R}\backslash\bigcup_{k=1}^{n}\sigma_r(k)$(其中 $n\geqslant 1$) 且$\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ 单调减．

证 易知 $D_0=\mathbb{R}$．要使 h_n 有意义，只需 h_{n-1} 有意义且非零．因此 $D_n=D_{n-1}\backslash\sigma_r(n)$，进而$\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ 单调减且 $D_n=D_{n-1}\backslash\sigma_r(n)=D_{n-2}\backslash\sigma_r(n-1)\backslash\sigma_r(n)=\cdots=\mathbb{R}\backslash\bigcup_{k=1}^{n}\sigma_r(k)$．

结合 g_n 和 h_n，有如下关系：

引理 3 对正整数 n，$h_n(r)=g_{n+1}(r)/g_n(r)$，$r\in D_n$．

证 等式对 $n=0$ 显然成立．假设其对 $n=k-1$ 成立，也即 $h_{k-1}(r)=g_k(r)/g_{k-1}(r)$，$r\in D_k$．根据引理 2 知 $h_{k-1}(r)$ 有意义且不为零．根据归纳假设，有 $h_k(r)=1-r/(g_k(r)/g_{k-1}(r))=g_{k+1}(r)/g_k(r)$．

引理 3 建立了 g_n 和 h_n 之间的紧密联系．

定理 2 1) 对正整数 n，$\sigma_r(n)\subset\sigma_p(n)\subset\sigma_{rd}(n)$；

2) $\sigma_r(\mathbb{N})=\sigma_p(\mathbb{N})=\sigma_{rd}(\mathbb{N})$．

证　1）对 $n=1,2,\cdots$，设 $r_n^* \in \sigma_r(n)$，由引理 3 得 $h(r_n^*)=g_{n+1}(r_n^*)/g_n(r_n^*)=0$，从而 $g_{n+1}(r_n^*)=0$ 且 $g_n(r_n^*)\neq 0$. 因此 $r_n^* \in \sigma_p(n)$，故 $\sigma_r(n)\subset\sigma_p(n)$.

设 $r_n^{**}\in\sigma_p(n)$，则 $g_{n+1}(r_n^{**})=0$，若 $g_n(r_n^{**})\neq 0$，则 r_n^{**} 是 h_n 的零点；反之若 $g_n(r_n^{**})=0$ 或不存在，则 r_n^{**} 是 h_n 的间断点. 总之，有 $r_n^{**}\in\sigma_{rd}(n)$. 因此 $\sigma_p(n)\subset\sigma_{rd}(n)$.

2）根据本引理条目 1）及集合并运算的单调性有 $\sigma_r(\mathbb{N})\subset\sigma_p(\mathbb{N})\subset\sigma_{rd}(\mathbb{N})$. 只需证 $\sigma_{rd}(\mathbb{N})\subset\sigma_p(\mathbb{N})$. 对任何 $r_n^{***}\in\sigma_{rd}(\mathbb{N})$，存在 n 使得 r_n^{***} 是 h_n 的零点或间断点. 设 n_0 是这样的正整数中最小的，从而 $h_m(r_n^{***})=g_{m+1}(r_n^{***})/g_{m+1}(r_n^{***})\neq 0$，进而 $g_{m+1}(r_n^{***})\neq 0$，$m=1,2,\cdots,n_0-1$. 特别地 $g_{n_0}(r_n^{***})\neq 0$. 又 $h_{n_0}(r_n^{***})=g_{n_0+1}(r_n^{***})/g_{n_0}(r_n^{***})\neq 0$，故而 r_n^{***} 不是 h_{n_0} 的间断点，只能是零点. 从而 $r_n^{***}\in\sigma_r(n_0)\subset\sigma_r(\mathbb{N})$.

注　文献[5]定义 $r_n=\sup\{r:\forall\xi<r,\ h_n(\xi)>0\}$，$r_0=+\infty$，并证明了 r_n 是严格单调减数列且 $r_n>1/4$. 定义每个多项式 g_n 实根的个数为 M_n，这些实根按值升序记为 $r_{n,1},r_{n,2},\cdots,r_{n,M_n}$. 根据定理 2，由于连分式函数列 h_n、相应多项式列 g_n 及其根集合 $\sigma_p(\mathbb{N})$ 三部分内容紧密联系，为引用方便，分别称为 HGR 连分式、HGR 多项式和 HGR 根集合，并合称为 HGR 系统. 下面给出这些根大小关系的两个引理.

引理 4　对正整数 n，$r_n\in(1/4,\ r_{n-1})$.

证　根据文献[5]引理 3，对正整数 n，$r_n<r_{n-1}$；根据文献[5]定理 2，对非负整数 n，$\gamma_n>1/4$；根据文献[5]引理 9，对非负整数 n，$\gamma_n=r_n$. 因此对正整数 n，$1/4<\gamma_n=r_n<r_{n-1}$.

引理 5　对正整数 n，$r_{n+1,1}=r_n$.

证　由定义知 r_n 是 h_n 的零点或间断点. 我们断言 r_n 是 h_n 的零点. 若不然，根据引理 2，存在 $k<n$ 使得 $h_k=0$，因此有 $r_k\leqslant r_n$，这与文献[5]中引理 2 的结论数列 r_n 严格单调减矛盾.

又由引理 3 得 $h_n(r_n)=g_{n+1}(r_n)/g_n(r_n)$，因此 $g_{n+1}(r_n)=0$. 再由 $r<r_n$ 时 $h_n(r)>0$ 知 $g_{n+1}(r)\neq 0$. 因此 r_n 是 g_{n+1} 的最小零点，而 $r_{n+1,1}$ 是 g_{n+1} 的根且是按升序排列的第一个，因此 $r_{n+1,1}=r_n$，$n=1,2,\cdots$.

注　引理 4 的证明也可根据引理 5 及 g_n 在 $r=r_{n-1}$ 及 $r\to-\infty$ 时应用零点存在定理得到.

下面给出本文的主要结论.

定理 3（HGR 多项式根的交错分布定理）　对于 HGR 多项式及其根有以下结论成立：

1）（实根的个数）$M_n=s_n$，其中 $s_n=[n/2]$，$[\cdot]$ 表示取整函数，$n=0,1,\cdots$；

2）（根的正性）$r_{n,1}>1/4$，$n=1,2,\cdots$；

3）（单根）g_n 的所有根均为单根，$n=1,2,\cdots$；

4）（根的交错分布）对 $1\leqslant k\leqslant n$，$n=1,2,\cdots$，有 $r_{2n+1,k}<r_{2n,k}$，$r_{2n+2,k}<r_{2n+1,k}$，$r_{2n+1,n}<r_{2n+2,n+1}$；

5）（g_n 的符号）对 $n=1,2,\cdots$，有

$$\operatorname{sgn}(g_n(r))=\begin{cases}0, & r=r_{n,k},\ k\in\mathbb{N}_{M_n}\\ 1, & r<r_{n,1}\\ (-1)^k, & r_{n,k}<r<r_{n,k+1},\ k\in\mathbb{N}_{s_n-1}\\ (-1)^{s_n}, & r>r_{n,s_n}\end{cases}\tag{14}$$

证　因为结论 2）由引理 4 和文献[5]中结论 $r_n>1/4$ 直接可得，故只需证明结论 1），3），4），5）. 根据结论 4）里函数 $g_n(r)$ 符号变化，采用数学归纳法，以每 4 个函数 g_{4m}，g_{4m+1}，g_{4m+2}，g_{4m+3} 为一组进行证明，$m=0,1,\cdots$.

首先对 $m=0$，g_0,g_1,g_2,g_3 满足

(a) g_0,g_1 没有根；g_2,g_3 各有一个实根，1），3）成立；

(b) 没有出现两个以上根，结论 4），5）自动成立.

假设定理结论 1），3），4），5）对于第 m 组成立，即

(c) g_{4m},g_{4m+1} 各有 $2m$ 个实根，g_{4m+2},g_{4m+3} 各有 $2m+1$ 个实根；

(d) $g_{4m},g_{4m+1},g_{4m+2},g_{4m+3}$ 的所有根都是单根；

(e) 下面 4 式成立

$$1/4 < r_{4m,1} < r_{4m-1,1} < r_{4m,2} < r_{4m-1,2} < \cdots < r_{4m,2m-1} < r_{4m-1,2m-1} < r_{4m,2m},$$
$$1/4 < r_{4m+1,1} < r_{4m,1} < r_{4m+1,2} < r_{4m,2} < \cdots < r_{4m+1,2m} < r_{4m,2m},$$
$$1/4 < r_{4m+2,1} < r_{4m+1,1} < r_{4m+2,1} < r_{4m+1,2} < \cdots < r_{4m+2,2m} < r_{4m+1,2m} < r_{4m+2,2m+1},$$
$$1/4 < r_{4m+3,1} < r_{4m+2,1} < r_{4m+3,2} < r_{4m+2,2} < \cdots < r_{4m+3,2m+1} < r_{4m+2,2m+1} \tag{15}$$

(f) g_{4m}, g_{4m+1}, g_{4m+2}, g_{4m+3} 的符号均满足式(14).

下面证明第 $m+1$ 组的情况. 根据引理4及引理5,

$$1/4 < r_{4m+3,1} < r_{4m+2,1} \tag{16}$$

再由式(16)归纳假设(f)可得 $g_{4m+2}(r_{4m+3,1}) > 0$,从而

$$g_{4m+4}(r_{4m+3,1}) = -r_{4m+3,1}g_{4m+2}(r_{4m+3},1) < 0 \tag{17}$$

根据引理1知

$$\partial g_{4m+4} = 2m+2 \tag{18}$$

根据定理1知

$$\alpha(g_{4m+4}) = (-1)^{2m+2} = 1 \tag{19}$$

由式(18),(19)知多项式 g_{4m+4} 是正首项系数偶次多项式,因此

$$g_{4m+4}(-\infty) = +\infty \tag{20}$$

结合式(17),(20),根据连续函数的零点存在定理可得存在 g_{4m+4} 的一个根 ξ_1 且满足

$$\xi_1 < r_{4m+3,1} \tag{21}$$

同理由式(15)知对 $k=2,3,\cdots,2m$

$$r_{4m+2,k} < r_{4m+3,k+1} < r_{4m+2,k+1} \tag{22}$$

由式(22)及归纳假设(f)中式(14)知,当 $r_{n,k} < r < r_{n,k+1}$, $k=1,\cdots,s_n-1$ 时 $\mathrm{sgn}(g_n(r)) = (-1)^k$,从而可得

$$\mathrm{sgn}(g_{4m+4}(r_{4m+3},k+1)) = -\mathrm{sgn}(r_{4m+3,k+1}g_{4m+2}(r_{4m+3,k+1})) = (-1)^{k+1} \tag{23}$$

根据零点存在定理,存在 g_{4m+4} 的根 ξ_k, $k=2,3,\cdots,2m+1$,满足

$$r_{4m+3,k-1} < \xi_k < r_{4m+3,k} \tag{24}$$

现在考虑最右端的一个区间$(r_{4m+3,2m+1}, +\infty)$. 在式(23)中取特殊值 $k=2m$,得

$$\mathrm{sgn}(g_{4m+4}(r_{4m+3,2m+1})) = -\mathrm{sgn}(r_{4m+3,2m+1}g_{4m+2}(r_{4m+3,2m+1})) = (-1)^{2m+1} = -1 \tag{25}$$

由式(18),(19)可得

$$g_{4m+4}(+\infty) = +\infty \tag{26}$$

根据连续函数零点存在定理可得存在 g_{4m+4} 的一个根 ξ_{2m+2}

$$\xi_{2m+2} > r_{4m+3,2m+1} \tag{27}$$

这样就找到了 g_{4m+4} 的 $2m+2$ 个实根$\{\xi_k : k=1,2,\cdots,2m+2\}$. 由式(18)可知它们是 g_{4m+4} 的所有根. 因此1)对 $n=4m+4$ 成立;根据大小顺序可知

$$r_{4m+4,k} = \xi_k,\ k=1,2,\cdots,2m+2 \tag{28}$$

这些根存在于不相交的开区间内,因此都是单根,故3)成立;又根据式(21),(24),(27),(28)将 g_{4m+4} 根与 g_{4m+3} 根按照大小排列得

$$1/4 < r_{4m+4,1} < r_{4m+3,1} < r_{4m+4,2} < r_{4m+3,2} < \cdots < r_{4m+4,2m+1} < r_{4m+3,2m+1} < r_{4m+4,2m+2} \tag{29}$$

因此4)对 $n=4m+4$ 成立;5)中式(14)在 g_{4m+4} 零点上为零,结论成立;由(18),(19)式得式(14)在 $r < r_{n,1}$ 时成立;考虑到多项式 g_{4m+4} 所有根都已找到且都是单根,可知所有 $2m+2$ 个根所分的每个区间内符号保持不变,可由式(20),(23)及(26)得出,故5)中式(14)在 $r > r_{n,1}$ 时成立.

至此,证明了本定理对 $n=4m+4$ 成立. 对于 $n=4m+5$ 情况的证明与(15)-(29)式的证明类似. 同理可以证明 $n=4m+6$, $n=4m+7$ 的情形.

这样得到了第 $m+1$ 组的证明. 根据数学归纳法原理,定理对于所有正整数成立. 又因为 $n=0,1$ 时1)成立,故定理得证.

下面以 g_8 为例说明定理3的作用. 由 $g_7(r) = 1-6r+10r^2-4r^3$, $g_8(r) = 1-7r+15r^2-10r^3+r^4$,

根据定理 3，g_7 有 3 个大于 1/4 的正单根，通过试根法及分解因式可得 $r_{7,1}=1-\sqrt{1/2}$，$r_{7,2}=1/2$，$r_{7,3}=1+\sqrt{1/2}$；g_8 有 4 个正单根，分别位于区间$(1/4, r_{7,1})$，$(r_{7,1}, r_{7,2})$，$(r_{7,2}, r_{7,3})$，$(r_{7,3}, +\infty)$内. 在每个区间内采用二分法可找到这些根. 经计算，$r_{8,1}\approx 0.283\,119$，$r_{8,2}\approx 0.426\,022$，$r_{8,3}\approx 1$，$r_{8,4}\approx 8.290\,859$. 定理 3 为根的存在性和位置判断提供了依据.

二次多项式 $P_2(x)=x^2-px+q(p,q>0)$ 在 $p^2/q\geqslant r_{8,1}$ 时存在 7 次匹配多项式；反之当 $p^2/q<r_{8,1}$ 时，不存在 7 次乘积匹配多项式。

参考文献：

[1] ARONSZAJN N. Theory of Reproducing Kernels [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1950，68(3)：337-404.

[2] VAPNIK V N. The Nature of Statistical Learning Theory [M]. New York：Springer，1995.

[3] SCHOLKOPF B，SMOLA A J. Learning with Kernels [M]. Cambridge：MIT Press，2002.

[4] FITZGERALD C H，MICCHELLI C A，PINKUS A. Functions that Preserve Families of Positive Semidefinite Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications，1995，221：83-102.

[5] 刘建强. 乘积匹配多项式的存在性 [J]. 兰州理工大学学报，2019，45(2)：149-154.

[6] CARUANA R. Multitask Learning [J]. Machine Learning，1997，28(1)：41-75.

[7] THRUN S，PRATT L. Learning to Learn [M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1997.

[8] BAXTER J. A Model of Inductive Bias Learning [J]. Journal of Artificial Intelligence Research，2000，12(1)：149-198.

[9] MICCHELLI C A，PONTIL M. On Learning Vector-Valued Functions [J]. Neural Computation，2005，17(1)：177-204.

[10] LIU J Q，MICCHELLI C A，WANG R，et al. Finite Rank Kernels for Multi-Task Learning [J]. Advances in Computational Mathematics，2013，38(2)：427-439.

[11] CAPONNETTO A，MICCHELLI C A，PONTIL M，et al. Universal Multi-Task Kernels [J]. Journal of Machine Learning Research，2008，9：1615-1646.

[12] 刘建强. 有限秩多任务核的若干性质 [J]. 长春大学学报，2015，25(4)：41-44.

[13] 刘建强. 一类完全由内积构造的多任务核的几个性质 [J]. 长春师范大学学报，2015，34(8)：10-13.

On Staggered Distribution Theorem of HGR Polynomial Roots

LIU Jian-qiang

School of Mathematics and Statistics，Ningxia University，Yinchuan 750021，China

Abstract：Product-matching is a basic method for constructing multi-task kernels. HGR polynomials offer evidences for the existence of the product-matching polynomials. With mathematical induction，we have studied their properties including leading coefficients，orders，the containment relationship of domains of their corresponding continued fractions and the staggered distributing properties. Then based on these properties，we have proposed and proved the staggered distribution theorem of HGR polynomials. At last，we show the application of the staggered distribution theorem by an example.

Key words：staggered distribution；product-matching polynomials；root distribution；HGR system

责任编辑　张　枸