第 45 卷　第 9 期　西南师范大学学报（自然科学版）　2020 年 9 月
Vol. 45　No. 9　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Sep.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.09.002

# 一类广义 Riccati 系统极限环和局部临界周期分支①

刘园园[1]，　黄文韬[2]

1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院，广西 桂林 541004；2. 桂林航天工业学院，广西 桂林 541004

**摘要：** 研究了一类广义 Riccati 系统在原点处的极限环与局部临界周期分支问题. 通过计算其伴随复系统的奇点量，导出系统原点为中心的必要条件，运用对称原理证明了系统原点成为中心的充分条件，进一步得到系统原点成为 6 阶细焦点的条件. 由周期常数的计算得到了系统原点为 3 阶细中心的条件. 分别证明了系统在原点处可分支出 6 个极限环与 3 个局部临界周期分支，得到了三次 Riccati 系统极限环数和局部临界周期数的最好结果.

**关　键　词：** 广义 Riccati 方程；奇点量；中心；极限环；局部临界周期分支

**中图分类号：** O175.12　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2020)09－0006－07

由于希尔伯特第十六问题的重要性，平面多项式微分系统极限环数的研究一直吸引众多学者的关注，一些特殊类型三次系统的极限环问题常被研究. 文献[1-2] 分别证明了三次 Kules 系统和三次 Kolmogorov 系统在单一细焦点处可分支出 6 个极限环. 最近文献[3-4] 将如下形式的系统称为广义 Riccati 系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g_2(x)y^2 + g_1(x)y + g_0(x)$$

当 $f(y) = 1$ 时，即为经典的 Riccati 系统.

对于三次广义 Riccati 系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + a_{02}y^2 + a_{03}y^3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (b_{02} + b_{12}x)y^2 + (b_{11}x + b_{21}x^2)y + (x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3) =$$

$$x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2$$

其中 $x, y$ 是实变量且 $a_{ij}, b_{ij}$ 是实参数. 文献[5] 中考虑 $a_{03} \neq 0$，$g_2(x) = b_{02} + b_{12}x$，$g_1(x) = b_{11}x + b_{21}x^2$，$g_0(x) = x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3$，得到了系统可线性化的 4 组充要条件. 在文献[6] 中，当 $a_{03} = 0$，$g_2(x) = b_{02} + b_{12}x$，$g_1(x) = b_{11}x + b_{21}x^2$，$g_0(x) = x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3$ 时得到了该系统原点成为中心的 7 组充要条件，并且证明了在原点处至少可分支出 3 个极限环和 2 个局部临界周期分支.

临界周期分支最先由文献[7] 提出. 近年来对于三次多项式微分系统局部临界周期分支的研究有许多结论[8-10].

记 $a_{02} = a_2$，$a_{03} = a_3$，$b_{20} = b_1$，$b_{11} = b_2$，$b_{02} = b_3$，$b_{30} = b_4$，$b_{21} = b_5$，$b_{12} = b_6$，再取 $a_3 = -1$，$g_2(x) = -b_1 + b_6x$，$g_1(x) = b_2x + b_5x^2$，$g_0(x) = x - b_1x^2 + b_4x^3$，得到如下的三次广义 Riccati 系统

① 收稿日期：2019－05－15
基金项目：国家自然科学基金项目(11461021)；广西自然科学基金重点项目(2016GXNSFDA380031).
作者简介：刘园园(1993－)，女，硕士研究生，主要从事微分方程定性理论及其应用的研究.
通信作者：黄文韬，教授.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-b_2y^2-y^3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+b_1x^2+b_2xy+b_4x^3+b_5x^2y-b_1y^2+b_6xy^2 \tag{1}$$

证明了该系统在原点处可分支出 6 个极限环和 3 个局部临界周期分支.

## 1　预备知识

考虑实系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k(x,y)=X(x,y,\lambda)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}Y_k(x,y)=Y(x,y,\lambda)\end{cases} \tag{2}$$

其中：$X_k(x,y)$,$Y_k(x,y)$ 是关于 $x$,$y$ 的 $k$ 次齐次多项式；$\lambda\in\Lambda$ 为系统的系数集. 通过变换 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=x-\mathrm{i}y$，$T=\mathrm{i}t$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，可化为如下复系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T}=z+\sum\limits_{k=2}^{\infty}Z_k(z,w)=Z(z,w)\\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T}=-w-\sum\limits_{k=2}^{\infty}W_k(z,w)=-W(z,w)\end{cases} \tag{3}$$

其中 $z$,$w$,$T$ 为复变量，并且

$$Z_k(z,w)=\sum_{\alpha+\beta=k}a_{\alpha\beta}z^{\alpha}w^{\beta},\ W_k(z,w)=\sum_{\alpha+\beta=k}b_{\alpha\beta}w^{\alpha}z^{\beta}$$

$$\overline{a_{\alpha\beta}}=b_{\alpha\beta},\ \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta\geqslant 2$$

称系统(2)与(3)互为伴随系统.

**引理 1**[11]　对系统(3)可逐项确定形式级数 $M(z,w)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}C_{\alpha\beta}z^{\alpha}w^{\beta}$，且

$$\frac{\partial(MZ)}{\partial z}-\frac{\partial(MW)}{\partial w}=\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\mu_m(zw)^m$$

其中 $C_{00}=1$，$\mu_m$ 是系统(3)在原点的第 $m$ 个奇点量. 对任意的 $\alpha$,$\beta$，当 $\alpha\neq\beta$ 时，

$$C_{\alpha\beta}=\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k+j=3}^{\infty}[(\alpha+1)a_{k,j-1}-(\beta+1)b_{j,k-1}]C_{\alpha-k+1,\beta-j+1}$$

当 $\alpha<0$，$\beta<0$ 或 $\alpha=\beta>0$，置 $C_{\alpha\beta}=0$. 对任意的正整数 $m$，有

$$\mu_m=\sum_{k+j=3}^{\infty}(a_{k,j-1}-b_{k,j-1})C_{m-k+1,m-j+1}$$

**定义 1**　$\mu_m$ 称为系统(3)在原点处的第 $m$ 个奇点量，若 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{m-1}=0$ 且 $\mu_m\neq 0$，称原点为 $m$ 阶细奇点.

由文献[12]可知，系统(2)的首个非零的焦点量 $v_{2m+1}(2\pi)$ 与其伴随复系统的首个非奇点量 $\mu_m$ 满足 $v_{2m+1}(2\pi)=\mathrm{i}\pi\mu_m$，可将系统(2)的焦点量的计算转化为系统(3)的奇点量的计算.

系统(2)通过变换 $x=r\cdot\cos\theta$，$y=r\cdot\sin\theta$，可得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^k\varphi_{k+1}(\theta)}{1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}r^{k-1}\psi_{k+1}(\theta)} \tag{4}$$

其中 $k=2,3,4,\cdots$，

$$\varphi_{k+1}(\theta)=\cos\theta\cdot X_k(\cos\theta,\sin\theta)+\sin\theta\cdot Y_k(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$\psi_{k+1}(\theta)=\cos\theta\cdot Y_k(\cos\theta,\sin\theta)-\sin\theta\cdot X_k(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1+\sum_{k=2}^{\infty}r^{k-1}\psi_{k+1}(\theta) \tag{5}$$

记 $r(\theta, h)$ 为满足初始条件 $r|_{\theta=0}=h$ 的系统(4) 的解，对于足够小的实常数 $h$，有如下的周期函数

$$P(h, \lambda)=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sum_{k=2}^{\infty}r(\theta, h)^{k-1}\psi_{k+1}(\theta)}=2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\lambda)h^k$$

文献[7]已证明 $P_{2k+1}=0(k=0,1,2,3\cdots)$. 因此，在原点充分小的邻域内，系统(2) 过点$(h, 0)$ 的闭轨的最小正周期 $P(h, \lambda)$ 的展开式如下

$$P(h, \lambda)=2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}P_{2k}(\lambda)h^{2k} \tag{6}$$

其中 $P_{2k}$ 称为系统(2) 原点的第 $k$ 个周期常数. 如果对某个$\lambda^* \in \Lambda$，$P_2=P_4=P_6=\cdots=P_{2k}=0$，$P_{2k+2}\neq 0$，称系统(2) 的原点为 $k$ 阶细中心，当 $k=0$ 时称之为粗中心. 若对于任意的正整数 $m$，有 $P_{2m}=0$，称原点为系统(2) 的等时中心.

**引理 2**[13] 对于系统(3) 可找到如下的形式级数

$$f(z, w)=z+\sum_{k+j=2}^{\infty}c_{k, j}z^k w^j \qquad g(z, w)=w+\sum_{k+j=2}^{\infty}d_{k, j}w^k z^j$$

满足 $c_{k+1, k}=d_{k+1, k}=0$，$k=1,2,3\cdots$. 使得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}T}=f(z, w)+\sum_{j=1}^{\infty}p_j z^{j+1}w^j \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}T}=-g(z, w)+\sum_{j=1}^{\infty}q_j w^{j+1}z^j$$

其中 $c_{k,j}, d_{k,j}, p_j, q_j$ 满足如下方程

$$c_{k, j}=\frac{1}{j+1-k}\sum_{\alpha+\beta=3}^{k+j+1}[(k-\alpha+1)a_{\alpha, \beta-1}-(j-\beta+1)b_{\beta, \alpha-1}]c_{k-\alpha+1, j-\beta+1}$$

$$d_{k, j}=\frac{1}{j+1-k}\sum_{\alpha+\beta=3}^{k+j+1}[(k-\alpha+1)b_{\alpha, \beta-1}-(j-\beta+1)a_{\beta, \alpha-1}]d_{k-\alpha+1, j-\beta+1}$$

$$p_j=\sum_{\alpha+\beta=3}^{2j+2}[(j-\alpha+2)a_{\alpha, \beta-1}-(j-\beta+1)b_{\beta, \alpha-1}]c_{j-\alpha+2, j-\beta+1}$$

$$q_j=\sum_{\alpha+\beta=3}^{2j+2}[(j-\alpha+2)b_{\alpha, \beta-1}-(j-\beta+1)a_{\beta, \alpha-1}]d_{j-\alpha+2, j-\beta+1}$$

记 $\tau_k=p_k+q_k$ 为系统(3) 原点的复周期常数. 系统(2) 原点的第一个非零周期常数 $P_{2k}$ 与它的共轭复系统原点的第一个非零的复周期常数 $\tau_k$ 有如下的关系 $P_{2k}=-\pi\tau_k$.

**引理 3**[14] 假定复系统的周期常数 $\tau_i$ 依赖于 $k$ 个独立的参数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$，即 $\tau_i=\tau_i(\lambda)=\tau_i(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$. 如果 $\boldsymbol{\lambda}^*=(a_{1c}, a_{2c}, \cdots, a_{kc})$ 满足

$$\tau_i(\lambda^*)=0,\ i=1,2,\cdots,k,\ \tau_{k+1}(\lambda^*)\neq 0,\ \det\left[\frac{\partial(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots, \tau_k)}{\partial(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)}\right]_{\lambda}\neq 0$$

则在 $\lambda=\boldsymbol{\lambda}^*$ 处给予适当的扰动，系统(3) 在原点处有 $k$ 个局部临界周期分支.

## 2 伴随复系统奇点量的计算

通过变换 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=x-\mathrm{i}y$，$T=\mathrm{i}t$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，系统(1) 可化为如下的伴随复系统

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T}=&z+\frac{b_1w^2}{2}+\frac{\mathrm{i}b_2wz}{2}+\frac{b_1z^2}{2}-\frac{\mathrm{i}b_2z^2}{2}+\frac{w^3}{8}+\frac{b_4w^3}{8}+\frac{\mathrm{i}b_5w^3}{8}-\frac{b_6w^3}{8}-\frac{3w^2z}{8}+\\&\frac{3b_4w^2z}{8}+\frac{\mathrm{i}b_5w^2z}{8}+\frac{b_6w^2z}{8}+\frac{3wz^2}{8}+\frac{3b_4wz^2}{8}-\frac{\mathrm{i}b_5wz^2}{8}+\frac{b_6wz^2}{8}-\\&\frac{z^3}{8}+\frac{b_4z^3}{8}-\frac{\mathrm{i}b_5z^3}{8}-\frac{b_6z^3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T}=&w+\frac{b_1w^2}{2}+\frac{\mathrm{i}b_2w^2}{2}-\frac{\mathrm{i}b_2wz}{2}+\frac{b_1z^2}{2}-\frac{w^3}{8}+\frac{b_4w^3}{8}+\frac{\mathrm{i}b_5w^3}{8}-\frac{b_6w^3}{8}+\frac{3w^2z}{8}+\\&\frac{3b_4w^2z}{8}+\frac{\mathrm{i}b_5w^2z}{8}+\frac{b_6w^2z}{8}-\frac{3wz^2}{8}+\frac{3b_4wz^2}{8}-\frac{\mathrm{i}b_5wz^2}{8}+\frac{b_6wz^2}{8}+\\&\frac{z^3}{8}+\frac{b_4z^3}{8}-\frac{\mathrm{i}b_5z^3}{8}-\frac{b_6z^3}{8}\end{aligned}\tag{7}$$

由引理 1，利用数学软件 Mathematica 进行计算化简，可得系统(7) 前 6 个奇点量 $\mu_m$ 的表达式.

**定理 1**　系统(7) 原点的前 6 个奇点量为

$$\mu_1=-\frac{\mathrm{i}}{4}(2b_1b_2+b_5)\qquad \mu_2=-\frac{\mathrm{i}b_1b_2}{24}(-15+6b_2{}^2+7b_4-3b_6)$$

情形 1　若 $b_1=0$，则 $\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6=0$.

情形 2　若 $b_1\neq 0$，$b_2=0$，则 $\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6=0$.

情形 3　若 $b_1b_2\neq 0$，$b_6=\frac{1}{3}(-15+6b_2{}^2+7b_4)$，则

$$\mu_3=-\frac{1}{288}\mathrm{i}b_1b_2F_0\qquad \mu_4=-\frac{1}{17280}\mathrm{i}b_1b_2F_1$$

$$\mu_5=-\frac{1}{622080}\mathrm{i}b_1b_2F_2\qquad \mu_6=-\frac{1}{209018880}\mathrm{i}b_1b_2F_3$$

其中：

$$F_0=333-36b_1^2-342b_2^2+45b_1^2b_2^2+72b_2^4-246b_4-12b_1^2b_4+111b_2^2b_4+7b_4^2$$

$$\begin{aligned}F_1=&-1012257+85644b_1^2-6300b_1^4+1240353b_2^2-574578b_2^4+89190b_2^6+1053690b_4+84396b_1^2b_4+\\&2400b_1^4b_4-830583b_2^2b_4+195324b_1^4b_4-231625b_4^2-24584b_1^2b_4^2+107342b_2^2b_4^2+17024b_4^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2=&131499531+40800348b_1^2+4576500b_1^4-1622255499b_2^2+1945116774b_2^4-772931970b_2^6+\\&99921600b_2^8-1147888998b_4+138884508b_1^2b_4+2823488901b_2^2b_4-1624704804b_2^4b_4+\\&278325360b_2^6b_4+931642035b_4^2-25044744b_1^2b_4^2-944884818b_2^2b_4^2+235075296b_2^4b_4^2-\\&99657192b_4^3+1251264b_1^2b_4^3+54933168b_2^2b_4^3-8499904b_4^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3=&-68305442537558844-41687711996086152b_1^2+109017378908661162 6b_2^2-\\&115957457189061335 1b_2^4+204728147799606405b_2^6+82222912126481850b_2^8-\\&20472144716990250b_2^{10}-143418028307414256b_4-22234728435825585 6b_1^2b_4+\\&358852309829773308b_2^2b_4-994552719088284036b_2^4b_4+687137769524448945b_2^6b_4-\\&128766931812384300b_2^8b_4+122372846802678722 4b_4^2+98273891369827512b_1^2b_4^2-\\&235089595144823448 6b_2^2b_4^2+124587230916612894 3b_2^4b_4{}^2-231402254317991730b_2^6b_4^2-\\&104360376782034307 2b_4^3-23874419762690544b_1^2b_4^3+892914261176842992b_2^2b_4^3-\\&176681528159184528b_2^4b_4^3+168519126222890452b_4^4+13945236028404448b_1^2b_4^4-\\&69819165506611624b_2^2b_4^4+3506583048719072b_4^5\end{aligned}$$

在计算 $\mu_k$ 时，已置 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k-1}=0$，$k=2,3,4,5,6$.

**定理 2**　系统(7) 原点处的前 6 个奇点量为零当且仅当下面的条件之一成立

(i) $b_5=0$，$b_1=0$；

(ii) $b_5=0$，$b_2=0$.

**证**　充分性显然成立，下证必要性. 由定理 1 知，当 $\mu_1=0$ 时，$b_5=-2b_1b_2$. 在此条件下有 $\mu_2=-\frac{\mathrm{i}b_1b_2}{24}(-15+6b_2{}^2+7b_4-3b_6)$. 若定理 1 中的情形 1 成立，则条件(i) 成立. 同理，由情形 2 可得条件(ii). 针对情形 3，通过数学软件 Mathematica 计算$\langle F_0, F_1, F_2, F_3\rangle$ 关于独立参数 $b_1, b_2, b_4$ 的 Gröbner 基，可得 GroebnerBasis$[\{F_0, F_1, F_2, F_3\}, \{b_1, b_2, b_4\}]=\{1\}$. 即 $F_0=0$，$F_1=0$，$F_2=0$，$F_3=0$ 没有公共根，

所以这种情形下前 6 个奇点量不可能全为零.

**定理 3** 对于系统(7),系统原点所有奇点量为零的充要条件为系统前 6 个奇点量同时为零,即定理 2 的两个条件为系统(7) 原点的中心条件,相应的也是系统(1) 原点的中心条件.

**证** 当 $b_5 = 0$,$b_1 = 0$ 时,系统(1) 可化简为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y - b_2 y^2 - y^3,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + b_4 x^3 + b_2 xy + b_6 xy^2$$

可知系统关于 $x$ 轴对称,即证原点是中心.

当 $b_5 = 0$,$b_2 = 0$ 时,同理可知系统关于 $y$ 轴对称,即证原点是中心.

## 3 系统的极限环分支

由定理 1 情形 3 和定理 3 可知,系统(7) 在原点处的细奇点的阶数最高是 6. 原点成为 6 阶细奇点(即 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$,$\mu_6 \neq 0$) 当且仅当以下条件成立

$$b_5 = -2b_1 b_2,\ b_1 b_2 \neq 0,\ b_6 = \frac{1}{3}(-15 + 6b_2^{\ 2} + 7b_4),\ F_0 = 0,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0 \tag{8}$$

由于当 $F_0 = 0$,$F_1 = 0$,$F_2 = 0$ 时,其精确符号解过于复杂,用数学软件解此方程,可得到 16 组实数解(精确到小数点后 50 位),其中一组解为

$$\begin{cases} b_1 \approx -0.15761291884308220335402005327528364635330791504730 \\ b_2 \approx -2.29590198984303154505770614936128551517353717191 41 \\ b_4 \approx -1.63679049643709640713313665336797862986993380987 45 \end{cases} \tag{9}$$

故可分别求出 $b_5$,$b_6$

$$\begin{cases} b_5 \approx -0.72372762799360134412867109710436093900720032149509 \\ b_6 \approx 1.72315406891049183112834151978390897285358363313165 \end{cases} \tag{10}$$

通过计算

$$\det\left[\frac{\partial(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\ \mu_5)}{\partial(b_1,\ b_2,\ b_4,\ b_5,\ b_6)}\right]_{(9)(10)} \approx 2.87306344668328222640878936080075052733081053\mathrm{i} \neq 0$$

因此有:

**定理 4** 对于系统(1),当系数满足式(8) 时,原点为 6 阶细焦点,通过对系统系数进行扰动,系统在原点处可分支出 6 个小振幅极限环.

## 4 系统的细中心与局部临界周期分支

根据引理 2 中的递推算法,分别计算式(i)、式(ii) 条件下伴随复系统(7) 的周期常数,系统(1) 原点成为 3 阶细中心(即 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$,$\tau_4 \neq 0$) 当且仅当以下条件之一成立

$$b_5 = 0,\ b_1 = 0,\ b_4 = \frac{1}{3}(-3 + 4b_2^2 - b_6),\ M_0 = 0,\ M_1 = 0 \tag{11}$$

$$b_5 = 0,\ b_2 = 0,\ b_4 = \frac{1}{9}(-9 + 4b_1^{\ 2} - 3b_6),\ N_0 = 0,\ N_1 = 0 \tag{12}$$

当 $b_5 = 0$,$b_1 = 0$ 时,可得系统(7) 的前 4 个周期常数如下

$$\tau_1 = \frac{1}{4}(3 - 4b_2^2 + 3b_4 + b_6) \qquad \tau_2 = \frac{1}{24}M_0 \qquad \tau_3 = \frac{1}{1440}M_1 \qquad \tau_4 = \frac{1}{34560}M_2$$

其中:

$$M_0 = -36 + 96b_2^2 - 43b_2^4 - 6b_6 + 8b_2^2 b_6 - b_6^2$$

$$M_1 = 774054 - 824712b_2^2 + 76317b_6 - 65298b_2^2 b_6 + 8097b_6^2 + 29497b_2^2 b_6^2 - 7627b_6^3$$

$$M_2 = -4860 + 291600b_2^2 - 527049b_2^4 + 290652b_2^6 - 51565b_2^8 - 20250b_6 + 3744b_2^2 b_6 - 21753b_2^4 b_6 + 24097b_2^6 b_6 - 7515b_6^2 + 20106b_2^2 b_6^2 - 13971b_2^4 b_6^2 - 1185b_6^3 + 1459b_2^2 b_6^3 + 20b_6^4$$

在计算 $\tau_k$ 过程中，令 $\tau_1=\tau_2=\cdots=\tau_{k-1}=0(k=2,3,4)$. 计算 $\langle M_0, M_1, M_2\rangle$ 关于变量 $b_2, b_6$ 的 Gröbner 基，可得

$$\text{GroebnerBasis}[\{M_0, M_1, M_2\}, \{b_2, b_6\}]=\{1\}$$

即 $M_0=0$，$M_1=0$，$M_2=0$ 没有公共根，系统(1)原点是3阶细中心. 通过数值计算可得到 $M_0=0$，$M_1=0$ 的 4 组实数解(精确到小数点后 50 位)，其中一组解为

$$\begin{cases} b_2\approx-0.98257669150219718307920593112333647695241420141708 \\ b_6\approx 5.02668174064350354813423694594162790454215200416 84 \end{cases}\tag{13}$$

代入式(11) 可求出 $b_4$，

$$b_4\approx-1.38828464063662921736317668849497834579759918928 55\tag{14}$$

将 $b_2, b_4, b_6$ 的解代入 $M_2$ 的表达式可得

$$M_2\approx-61659.30062864905536174789681927507537733325871 2\neq 0$$

并且

$$\det\left[\frac{\partial(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(b_2, b_4, b_6)}\right]_{(13)(14)}\approx 592.00653973726366655228273575397425262094369819 9\neq 0$$

同理，当 $b_5=0$，$b_2=0$ 时，类似也可证明系统(7) 有 3 个局部临界周期分支. 因此有：

**定理 5**　对于系统(1)，当系数满足式(11) 或式(12) 时，原点成为 3 阶细中心，在原点处可分支出 3 个局部临界周期分支.

## 5　结束语

本文讨论了一类三次广义 Riccati 系统在原点处的极限环分支与局部临界周期分支问题. 通过符号计算与数值计算，得到了该系统原点成为 6 阶细焦点和 3 阶细中心的充分必要条件，并运用行列式方法证明了该系统在 6 阶细焦点条件下从原点处可分支出 6 个极限环以及该系统在 3 阶细中心条件下从原点处可分支出 3 个局部临界周期分支. 据我们所知，这是三次广义 Riccati 系统关于极限环数和局部临界周期分支数的最好结果.

**参考文献：**

[1] LLOYD N G, PEARSON J M. Conditions for a Centre and the Bifurcation of Limit Cycles in a Class of Cubic Systems [M]// Lecture Notes in Mathematics. Berlin：Springer，1990：230-242.

[2] LLOYD N G, PEARSON J M. A Cubic Kolmogorov System with Six Limit Cycles [J]. Computers and Mathematics with Applications，2002，44(3-4)：445-455.

[3] LLIBRE J, VALLS C. Algebraic Invariant Curves and First Integrals for Riccati Polynomial Differential Systems [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2014，142(10)：3533-3543.

[4] LLIBRE J, VALLS C. Liouvillian First Integrals for Generalized Riccati Polynomial Differential Systems [J]. Advanced Nonlinear Studies，2015，15(4)：951-961.

[5] ZHOU Z X, ROMANOVSKI V G, YU J. Centers and Limit Cycles of a Generalized Cubic Riccati System [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos，2020，30(2)：2050021.

[6] ROMANOVSKI V G, FERNANDES W, TANG Y L, et al. Linearizability and Critical Period Bifurcations of a Generalized Riccati System [J]. Nonlinear Dynamics，2017，90(1)：257-269.

[7] CHICONE C, JACOBS M. Bifurcation of Critical Periods for Plane Vector Fields [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1989，312(2)：433-486.

[8] 林怡平，李继彬. 平面自治系统的规范型与闭轨族周期临界点 [J]. 数学学报，1991，34(4)：490-501.

[9] ROUSSEAU C, TONI B. Local Bifurcations of Critical Periods in the Reduced Kukles System [J]. Canadian Journal of Mathematics，1997，49(2)：338-358.

[10] ZHANG W N, HOU X R, ZENG Z B. Weak Centers and Bifurcation of Critical Periods in Reversible Cubic Systems [J]. Computers & Mathematics With Applications，2000，40(6-7)：771-782.

[11] 刘一戎，陈海波．奇点量公式的机器推导与一类三次系统的前10个鞍点量[J]．应用数学学报，2002，25(2)：295-302.

[12] HUANG W，LIU Y. Bifurcations of Limit Cycles from Infinity for a Class of Quintic Polynomial System [J]. Bulletin Des Sciences Mathématiques，2004，128(4)：291-302.

[13] LIU Y R，HUANG W T. A New Method to Determine Isochronous Center Conditions for Polynomial Differential Systems [J]. Bulletin Des Sciences Mathématiques，2003，127(2)：133-148.

[14] CHEN T，HUANG W T，REN D C. Weak Centers and Local Critical Periods for a $Z_2$-Equivariant Cubic System [J]. Nonlinear Dynamics，2014，78(4)：2319-2329.

# Limit Cycles and Local Critical Periods for a Class of Generalized Riccati System

LIU Yuan-yuan[1]， HUANG Wen-tao[2]

1．*School of Mathematics and Computational Science，Guilin University of Electronic Technology，Guilin Guangxi 541004，China*；

2．*Guilin University of Aerospace Technology，Guilin Guangxi 541004，China*

**Abstract**：The limit cycle and local critical period bifurcation of a class of generalized Riccati systems at the origin have been investigated. By computing the singular point values of the origin of the system，the necessary conditions for the origin to be the center have been deduced. The sufficient conditions have been proved by the symmetry principle. Moreover，the conditions of the origin to be the six order fine focus have been given. By computing the period constants of the origin of the system，the conditions of the origin to be the three order fine center have been obtained. It is proved respectively that there are six small amplitude limit cycles bifurcated at the origin and three local critical periods bifurcated at the origin. As far as we known，there are the best results of the number of limit cycles and local critical periods for the cubic generalized Riccati systems.

**Key words**：generalized Riccati system；singular point value；center；limit cycle；local critical period

**责任编辑** 张 枸