DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.09.006

环境污染下的具有非线性捕获的捕食-食饵系统的稳定性和最优税收[①]

赵 亮[1,2], 陈凤德[3]

1. 福建师范大学 数学与信息学院,福州 350117;2. 广西财经学院 信息与统计学院,南宁 530003;
3. 福州大学 数学与计算机科学学院,福州 350116

摘要: 研究了一类环境污染下的具有非线性捕获的捕食-食饵系统的稳定性和最优税收. 首先分析了该系统平衡点的存在性,然后通过计算雅克比矩阵的特征值以及构造适当的 Lyapunov 函数给出了保证系统平衡点的局部稳定性和正平衡点全局稳定的充分性条件,最后利用 Pontryagin 最大值原理得到了达到最优税收的最优平衡解.

关 键 词: 捕食-食饵;环境污染;非线性捕获;稳定性;最优税收

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)09-0031-06

本文研究了如下环境污染下的具有非线性捕获的捕食-食饵系统的稳定性和最优税收:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{L}\right)-\alpha x_1x_2-\gamma_1x_1^3\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -r_2x_2+\beta x_1x_2-\frac{qEx_2}{aE+bx_2}-\gamma_2x_2^2\\ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \alpha_0E\left(\frac{(p-\tau)qx_2}{aE+bx_2}-c\right)\end{aligned}\tag{1}$$

其中:x_1,x_2 分别代表两个种群在 t 时刻的种群密度;$r_1>0$ 表示 x_1 种群的内禀增长率,$r_2>0$ 表示 x_2 种群的自然死亡率;L 表示 x_1 种群的环境容纳量;q 为捕食者 x_2 种群的可捕系数;$E\geqslant 0$ 表示捕食者 x_2 种群的捕捞努力量;α,β,a,b 均为正常数;$\gamma_1x_1^3,\gamma_2x_2^2$ 分别表示外界环境污染对 x_1,x_2 种群的影响;$\tau>0$ 为税收;p 表示单位资源 x_2 的出售价格;c 表示 x_2 的捕获成本;$\alpha_0E\left(\frac{(p-\tau)qx_2}{aE+bx_2}-c\right)$为收获者的纯经济收入.

众所周知,自然资源并非取之不尽用之不竭的,再加上环境污染对生物种群的影响,很多生物资源濒临灭绝,如何确保自然资源可持续利用,成为学者越来越关注的问题. 文献[1]提出了如下具有毒素和捕获的捕食-食饵系统:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{L}\right)-\alpha x_1x_2-c_1Ex_1-\gamma_1x_1^3\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -r_1x_2+\beta x_1x_2-c_2Ex_2-\gamma_2{x_2}^2\end{aligned}\tag{2}$$

文献[2] 注意到上述系统中的捕获项 E 是常数,不太合理,于是引入了税收变量,建立了如下模型:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{L}\right)-\alpha x_1x_2-\gamma_1x_1^3$$

① 收稿日期:2018-02-23
基金项目:国家自然科学基金项目(11771082),广西财经学院青年教师科研发展基金项目(2019QNB09).
作者简介:赵 亮(1988-),男,讲师,主要从事微分方程与动力系统的研究.

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-r_1x_2+\beta x_1x_2-c_2Ex_2-\gamma_2x_2^2$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\alpha_0E((p-\tau)qx_2-c) \tag{3}$$

探讨了该系统的局部稳定性、全局稳定性和最优税收等动力学行为. 但是近年来随着自然资源的过度开发，学者们对具有捕获的生态系统动力学行为展开了深入研究[3-9]. 受文献[3-5]启发提出了系统(1)并拟研究系统的稳定性和最优税收策略问题.

1　平衡点的存在性

系统(1)存在4个平衡点 $\boldsymbol{P}_0=(0,0,0)$，$\boldsymbol{P}_1=(\tilde{x}_1,0,0)$，$\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 和 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$，其中 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 是显然的，下面主要考虑 $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 存在的充分性条件.

定理1　若 $r_2<\bar{x}_1$ 成立，则平衡点 $\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 存在.

证　平衡点 $\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 满足下面的方程组：

$$r_1\left(1-\frac{x_1}{L}\right)-\alpha x_2-\gamma_1x_1^2=0$$

$$-r_2+\beta x_1-\gamma_2x_2=0$$

那么可得

$$B_1x_1^2+B_2x_1+B_3=0 \tag{4}$$

其中

$$B_1=-\gamma_1,\ B_2=-\left(\frac{r_1}{L}+\frac{\alpha\beta}{\gamma_2}\right),\ B_3=r_1+\frac{\alpha r_2}{\gamma_2}$$

易知方程(4)两根和积都为负，所以必有一正根 $\bar{x}_1$，从而 $\bar{x}_2=\dfrac{\bar{x}_1-r_2}{\gamma_2}$，当定理1中的条件满足时，$\bar{x}_1>0$，$\bar{x}_2>0$，平衡点 $\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 存在.

定理2　假设

$$\tau<p-\frac{cb}{q},\ L>A,\ \gamma_1<\frac{(L-A)r_1}{LA^2} \tag{5}$$

成立，则正平衡点 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$ 存在，其中 $A=\dfrac{(ar_2+q)[(p-\tau)q-bc]+abcr_2}{\alpha\beta[(p-\tau)q-bc]+abc\beta}$.

证　正平衡点满足方程组

$$\begin{aligned}&r_1\left(1-\frac{x_1}{L}\right)-\alpha x_2-\gamma_1x_1^2=0\\&-r_2+\beta x_1-\frac{qE}{aE+bx_2}-\gamma_2x_2=0\\&\frac{(p-\tau)qx_2}{aE+bx_2}-c=0\end{aligned} \tag{6}$$

所以可解得

$$x_1^*=A+\frac{\gamma_2}{\beta}x_2^*,\ E^*=\frac{(p-\tau)q-bc}{ac}x_2^*$$

$$x_2^*=\frac{-\left(\dfrac{r_1\gamma_2}{L\beta}+\alpha+\dfrac{2\gamma_1\gamma_2A}{\beta}\right)+\sqrt{\left(\dfrac{r_1\gamma_2}{L\beta}+\alpha+\dfrac{2\gamma_1\gamma_2A}{\beta}\right)^2+\dfrac{4r_1\gamma_2^2}{\beta^2}\left(r_1-\dfrac{r_1A}{L}-\gamma_1A^2\right)}}{\dfrac{2r_1\gamma_2^2}{\beta^2}}$$

显然当定理2中的条件满足时，$x_1^*>0$，$x_2^*>0$，$E^*>0$，则 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$ 是系统(1)的唯一正平衡点.

2　平衡点的局部稳定性

定理 3

(H_1) $\boldsymbol{P}_0=(0,0,0)$ 不稳定；

(H_2) 当 $r_2>\beta\tilde{x}_1$ 时，$\boldsymbol{P}_1=(\tilde{x}_1,0,0)$ 局部渐近稳定；

(H_3) 当 $r_2<\beta\bar{x}_1$ 和 $\tau>p-\dfrac{bc}{q}$ 时，$\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 局部渐近稳定；

(H_4) 当 $q<\dfrac{\gamma_2x_2^*(aE^*+bx_2^*)^2}{E^*bx_2^*}$ 和(5)式成立时，$\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$ 局部渐近稳定.

证　系统(1)的雅克比矩阵为

$$\boldsymbol{J}(x_1,x_2,E)=\begin{pmatrix} r_1-\dfrac{2r_1x_1}{L}-\alpha x_2-3\gamma_1x_1^2 & -\alpha x_1 & 0 \\ \beta x_2 & -r_2+\beta x_1-\dfrac{aqE^2}{(aE+bx_2)^2}-2\gamma_2x_2 & -\dfrac{bqx_2^2}{(aE+bx_2)^2} \\ 0 & \dfrac{\alpha_0aE^2(p-\tau)q}{(aE+bx_2)^2} & \alpha_0\left[\dfrac{bq(p-\tau)x_2^2}{(aE+bx_2)^2}-c\right] \end{pmatrix}$$

(I) 平衡点 $\boldsymbol{P}_0=(0,0,0)$ 的特征方程为 $(\lambda-r_1)(\lambda+r_2+qE)(\lambda+\alpha_0c)=0$，因此 $\boldsymbol{P}_0=(0,0,0)$ 不稳定.

(II) 平衡点 $\boldsymbol{P}_1=(\tilde{x}_1,0,0)$ 的特征方程为 $\left(\lambda+\dfrac{r_1\tilde{x}_1}{L}+2\gamma_1\tilde{x}_1^2\right)(\lambda+r_2-\beta\tilde{x}_1)(\lambda+\alpha_0c)=0$，当 $r_2>\beta\tilde{x}_1$ 时，特征值都为负，因此 $\boldsymbol{P}_1=(\tilde{x}_1,0,0)$ 局部渐近稳定.

(III) 平衡点 $\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 的特征方程为 $\left(\lambda-\alpha_0\left[\dfrac{(p-\tau)q}{b}-c\right]\right)(\lambda^2+\omega_1\lambda+\omega_2)=0$，其中

$$\omega_1=\frac{r_1\bar{x}_1}{L}+\gamma_2\bar{x}_2+2\gamma_1\bar{x}_1^2,\quad \omega_2=\left(\frac{r_1\bar{x}_1}{L}+2\gamma_1\bar{x}_1^2\right)\gamma_2\bar{x}_2+\alpha\beta\bar{x}_1\bar{x}_2 \tag{7}$$

当 $r_2<\bar{x}_1$ 和 $\tau>p-\dfrac{bc}{q}$ 成立时，其特征值均为负，因此 $\boldsymbol{P}_2=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$ 是局部稳定性的.

(IV) 系统(1)在平衡点 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$ 处的雅克比矩阵为

$$\boldsymbol{J}(x_1^*,x_2^*,E^*)=\begin{pmatrix} -\dfrac{r_1x_1^*}{L}-2\gamma_1x_1^{*2} & -\alpha x_1^* & 0 \\ \beta x_2^* & \dfrac{qE^*bx_2^*}{(aE^*+bx_2^*)^2}-\gamma_2x_2^* & -\dfrac{bqx_2^{*2}}{(aE^*+bx_2^*)^2} \\ 0 & \dfrac{\alpha_0aE^{*2}(p-\tau)q}{(aE^*+bx_2^*)^2} & \alpha_0\left[\dfrac{bc^2}{q(p-\tau)}-c\right] \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^3+\omega_1\lambda^2+\omega_2\lambda+\omega_3=0 \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_1&=F^*-A^*-D^* \\ \omega_2&=A^*D^*-B^*C^*-F^*(A^*+D^*)+\alpha\beta x_1^*x^2 \\ \omega_3&=F^*(A^*D^*-B^*C^*)-\alpha\beta x_1^*x_2^*D^* \end{aligned} \tag{9}$$

$$A^*=\frac{qE^*bx_2^*}{(aE^*+bx_2^*)^2}-\gamma_2x_2^*,\ B^*=-\frac{bq(x_2^*)^2}{(aE^*+bx_2^*)^2},\ C^*=\frac{\alpha_0a(E^*)^2(p-\tau)q}{(aE^*+bx_2^*)^2}$$

$$D^*=\alpha_0\left[\frac{bc^2}{q(p-\tau)}-c\right],\ F^*=\frac{r_1x_1^*}{L}+2\gamma_1(x_1^*)^2$$

当系统(1)的正平衡点存在且 $q<\dfrac{\gamma_2x_2^*(aE^*+bx_2^*)^2}{E^*bx_2^*}$ 即 $A^*<0$ 时，有 $\omega_1>0$，$\omega_3>0$，

$$\omega_1\omega_2-\omega_3=-(F^*)^2(A^*+D^*)+F^*\alpha\beta x_1^*x_2^*-(A^*)^2D^*+A^*B^*C^*+A^*F^*(A^*+D^*)$$
$$A^*\alpha\beta x_1^*x_2^*-A^*(D^*)^2+B^*C^*D^*+D^*F^*(A^*+D^*)>0$$

即 $\omega_1\omega_2>\omega_3$，由 Routh-Hurwitz 判别法可知方程(8)的根均有负实部，所以在条件 $A^*<0$ 和(5)式(即正平衡点存在条件)成立下，正平衡点是局部渐近稳定的.

3 正平衡点的全局部稳定性

定理 4 若正平衡点 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*, x_2^*, E^*)$ 存在，条件 $aE+bx_2>\dfrac{qbE^*}{\gamma_2(aE^*+bx_2^*)}$ 成立时，则平衡点 $\boldsymbol{P}_3$ 是全局渐近稳定的.

证 构造如下的 Lyapunov 函数：

$$V(t)=\left(x_1-x_1^*-x_1^*\ln\frac{x_1}{x_1^*}\right)+\eta_1\left(x_2-x_2^*-x_2^*\ln\frac{x_2}{x_2^*}\right)+\eta_2\left(E-E^*-E^*\ln\frac{E}{E^*}\right)$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=&(x_1-x_1^*)\left(-\frac{r_1}{L}(x_1-x_1^*)-\alpha(x_2-x_2^*)-\gamma_1(x_1+x_1^*)(x_1-x_1^*)\right)+\\&\eta_1(x_2-x_2^*)\left(\beta(x_1-x_1^*)-q\left(\frac{E}{aE+bx_2}-\frac{E^*}{aE^*+bx_2^*}\right)-\gamma_2(x_2-x_2^*)\right)+\\&\eta_2\alpha_0(E-E^*)(p-\tau)q\left(\frac{x_2}{aE+bx_2}-\frac{x_2^*}{aE^*+bx_2^*}\right)=\\&-\left(\frac{r_1}{L}+\gamma_1(x_1+x_1^*)\right)(x_1-x_1^*)^2-\left(\eta_1\gamma_2-\frac{\eta_1 qbE^*}{(aE+bx_2)(aE^*+bx_2^*)}\right)(x_2-x_2^*)^2-\\&\frac{\eta_2\alpha_0(p-\tau)qax_2^*}{(aE+bx_2)(aE^*+bx_2^*)}(E-E^*)^2+(\eta_1\beta-\alpha)(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*)+\\&\frac{\eta_2\alpha_0(p-\tau)qaE^*-\eta_1 qbx_2^*}{(aE+bx_2)(aE^*+bx_2^*)}(x_2-x_2^*)(E-E^*)\end{aligned}$$

令 $\eta_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\eta_2=\dfrac{\alpha bx_2^*}{\beta\alpha_0(p-\tau)aE^*}$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=&-\left(\frac{r_1}{L}+\gamma_1(x_1+x_1^*)\right)(x_1-x_1^*)^2-\frac{\alpha}{\beta}\left(\gamma_2-\frac{qbE^*}{(aE+bx_2)(aE^*+bx_2^*)}\right)(x_2-x_2^*)^2-\\&\frac{\alpha bq(x_2^*)^2}{\beta E^*(aE+bx_2)(aE^*+bx_2^*)}(E-E^*)^2\end{aligned}$$

当 $aE+bx_2>\dfrac{qbE^*}{\gamma_2(aE^*+bx_2^*)}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，因此，正平衡点 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*, x_2^*, E^*)$ 是全局渐近稳定的.

4 最优税收政策

人类对资源需求的不断增加与自然资源的自然供给的相对有限性之间的矛盾日显突出. 最优税收政策就是通过调节税收实现资源的人类需求与自然供给之间的平衡，在保证经济稳步发展的同时，又能促进资源节约和环境保护，这个目标值可表示为：

$$J=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta t}\left\{\left(\frac{pqx_2(t)}{aE(t)+bx_2(t)}-c\right)E(t)\right\}\mathrm{d}t$$

其中 $\delta>0$ 表示贴现率，利用 Pontryagin 最大值原理可以找到最优税收水平 τ，使得 J 在满足方程(3)和控制约束条件 $\tau_{\min}<\tau<\tau_{\max}$ 时取得最大值. 此控制问题顶峰哈密顿函数为

$$\begin{aligned}H=&\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\frac{pqx_2}{aE+bx_2}-c\right)E+\lambda_1(t)\left[r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{L}\right)-\alpha x_1x_2-\gamma_1x_1^3\right]+\\&\lambda_2(t)\left(-r_2x_2+\beta x_1x_2-\frac{qEx_2}{aE+bx_2}-\gamma_2x_2^2\right)+\lambda_3(t)\left[\alpha_0\,E\left(\frac{(p-\tau)qx_2}{aE+bx_2}-c\right)\right]\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i(t)$，$(i=1,2,3)$ 是伴随变量．由于 H 的最大值在区间 $\tau_{\min}<\tau<\tau_{\max}$ 上取得，所以

$$\frac{\partial H}{\partial \tau}=-\frac{\lambda_3(t)\alpha_0 Eqx_2}{aE+bx_2}=0$$

可得

$$\lambda_3(t)=0$$

根据 Pontryagin 最大值原理有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-\lambda_1(t)\left(r_1-\frac{2r_1x_1}{L}-\alpha x_2-3\gamma_1x_1^2\right)-\lambda_2(t)\beta x_2 \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\mathrm{e}^{-\delta t}\frac{aE^2pq}{(aE+bx_2)^2}+\lambda_1(t)\alpha x_1-\lambda_2(t)\left(-r_2+\beta x_1-\frac{aqE^2}{(aE+bx_2)^2}-2\gamma_2x_2\right) \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial E}=-\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\frac{bpqx_2^2}{(aE+bx_2)^2}-c\right)+\lambda_2(t)\frac{bqx_2^2}{(aE+bx_2)^2} \tag{12}$$

由 $\lambda_3(t)=0$ 和(12)式可得

$$\lambda_2(t)=\mathrm{e}^{-\delta t}\left[p-\frac{c}{bq}\left(\frac{aE+bx_2}{x_2}\right)^2\right] \tag{13}$$

把 λ_2 的值代入(10)式并在正平衡点 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$ 处整理可得：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}-Y_1\lambda_1(t)=Y_2\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{14}$$

其中

$$Y_1=\frac{r_1x_1}{L}+2\gamma_1x_1^2,\ Y_2=-\beta x_2\left[p-\frac{c}{bq}\left(\frac{aE+bx_2}{x_2}\right)^2\right]$$

解方程(14)可得

$$\lambda_1(t)=-\frac{Y_2}{Y_1+\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}+K_1\mathrm{e}^{Y_1t}$$

当 $t\to 0$，$K_1=0$ 时，影子价格 $\lambda_1\mathrm{e}^{\delta t}$ 是有界的．

$$\lambda_1(t)=-\frac{Y_2}{Y_1+\delta}\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{15}$$

同理，由(15)式和(11)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}-Q_1\lambda_2(t)=Q_2\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{16}$$

$$\lambda_2(t)=-\frac{Q_2}{Q_1+\delta}\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{17}$$

其中

$$Q_1=-\left(-r_2+\beta x_1-\frac{aqE^2}{(aE+bx_2)^2}-2\gamma_2x_2\right),\ Q_2=-\left(\frac{aE^2pq}{(aE+bx_2)^2}+\frac{Y_2\alpha x_1}{Y_1+\delta}\right) \tag{18}$$

由(13)和(16)式有

$$p-\frac{c}{bq}\left(\frac{aE+bx_2}{x_2}\right)^2=-\frac{Q_2}{Q_1+\delta}$$

把正平衡点 $\boldsymbol{P}_3=(x_1^*,x_2^*,E^*)$ 代入(18)式得到一个关于 τ 的方程，令 τ_δ 为方程的解，然后把 $\tau=\tau_\delta$ 代入 x_1^*，x_2^*，E^* 得最优解$(x_{1\delta},x_{2\delta},E_\delta)$和最优税收 $\tau_\delta=p-\dfrac{c(aE_\delta+bx_{2\delta})}{qx_{2\delta}}$.

5　小　　结

定理 2 和定理 3 表明税收、捕获和环境污染对种群的稳定性有着重要的影响，只有保证 $\tau<p-\dfrac{cb}{q}$，$L>A$，$\gamma_1<\dfrac{(L-A)r_1}{LA^2}$，$q<\dfrac{\gamma_2x_2^*(aE^*+bx_2^*)^2}{E^*bx_2^*}$，才能使系统正平衡点局部渐近稳定，这说明人类在改造

世界的同时，也要注意保护环境，防止过度开采，为此我们也给出了最优的税收政策，为我们开发资源，保证资源的可持续发展以及保护环境提供了重要的理论依据.

由文章第4部分的结论可知，通过最优税收的控制，既可以保证市场的正常秩序，保证经济的增长，又可以确保自然资源的可持续利用.

参考文献：

[1] DAS T, MUKHERJEE R N, CHAUDHURI K S. Harvesting of a Prey-Predator Fishery in the Presence of Toxicity [J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(5): 2282-2292.

[2] 赵 亮，陈凤德. 具有毒素的捕食-食饵系统的最优税收 [J]. 生物数学学报，2017，32(2)：252-260.

[3] 李有文，杨洪娴，田广立，等. 具有食饵避难的 Leslie-Gower 最优税收模型分析 [J]. 数学的实践与认识，2011，41(5)：167-171.

[4] 魏凤英，郭瑜婷. 一类食饵具有避难所的 Leslie-Gower 模型的稳定性及最优税收 [J]. 应用数学进展，2013，2(1)：10-14.

[5] 唐秋林，吴美云，郁胜旗，等. 一类具有食饵避难的 Leslie-Gower 捕食系统的征税模型 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2017，41(6)：54-60.

[6] 陈婉琳，陈凤德，王海娜，等. 具有避难所的 Lotka-Volterra 竞争系统捕获分析 [J]. 应用数学学报，2014，37(6)：1117-1129.

[7] ZHANG N, CHEN F D, SU Q Q, et al. Dynamic Behaviors of a Harvesting Leslie-Gower Predator-Prey Model [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011, 2011: 1-14.

[8] 张玉娟，刘会民，张树文，等. 竞争系统的两个种群同时进行捕获的优化问题 [J]. 生物数学学报，1998，13(4)：456-461.

[9] 姚晓洁，秦发金. 一类具有脉冲和收获率的 Lotla-Volterra 合作系统的4个正概周期解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(11)：7-14.

Optimal Taxation and Stability of a Predator-Prey System Incorporating Nonlinear Harvesting in a Polluted Environment

ZHAO Liang[1,2], CHEN Feng-de[3]

1. School of Mathematics and Information, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China;
2. School of Information and Statistics, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning 530003, China;
3. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China

Abstract: A predator-prey system incorporating nonlinear harvesting in a polluted environment has been studied in this paper. Firstly, the existence of equilibrium of the system has been discussed. Secondly, some sufficient conditions for the stability of the system have been obtained by calculating characteristic value of Jacobian matrix and constructing a suitable Lyapunov function. And lastly, the optimal taxation policy is obtained by using the Pontryagin's maximal principle.

Key words: predator-prey; polluted environment; nonlinear harvesting; stability; optimal taxation

责任编辑 张 构