第 45 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 10 月
Vol. 45　No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.001

3 阶对角占优张量的子直和①

何建锋

楚雄师范学院 数学与统计学院，云南 楚雄 675000

摘要： 利用矩阵与张量之间的联系，将矩阵子直和的概念推广到张量上，定义了张量的子直和. 讨论 3 阶严格对角占优张量的 k-子直和仍然是严格对角占优张量，给出 3 阶 S-严格对角占优型张量的 k-子直和为 S-严格对角占优型张量的条件，并举例说明.

关　键　词： 张量；子直和；严格对角占优张量；矩阵

中图分类号： O151.21　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2020)10－0001－07

方阵的 k- 子直和是矩阵和的推广，在许多应用中均有出现，例如矩阵完全化问题、区域分解方法中的重叠子域、有限元中的整体刚度矩阵等[1-3]. 文献[4]引入了方阵 k- 子直和的概念，并对其进行了相关研究，证明了正定矩阵的子直和是正定矩阵，对称 M- 矩阵的子直和是对称 M- 矩阵等结论. 关于方阵 k- 子直和的一些新的研究成果可参考文献[5-11].

张量是矩阵的高阶推广，在许多科学领域，如信号图像处理[12]、非线性优化[13]、高阶统计学[14]、物理学中的弹性分析[15-16] 和数据挖掘与处理等领域都有重要的应用. 有关张量的研究成果可参考文献[17-21]，关于张量的更多文献不在此逐一赘述.

令 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$，其中 $a_{i_1\cdots i_m}\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$，$i_j=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 m 阶 n 维的复(实)张量，记作 $\boldsymbol{A}\in C^{[m,n]}(R^{[m,n]})$.

鉴于矩阵与张量之间的关系，本文将矩阵子直和的概念推广到张量上，提出张量子直和的概念，并讨论 SDD 张量、S-SDD- 型张量子直和的性质.

为方便讨论，引入以下符号：

$$[n]=\{1,2,\cdots,n\}\qquad S_1=[m-k]=\{1,2,\cdots,m-k\}\qquad t=m-k$$

$$S_2=[m]\backslash S_1=\{m-k+1,\cdots,m\}\qquad S_3=[m+n-k]\backslash[m]=\{m+1,\cdots,m+n-k\}$$

$$\Delta^S=\{(i_2 i_3\cdots i_m):i_j\in S,\ j=2,\cdots,m\}\qquad r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})=\sum_{\substack{(i_2\cdots i_m)\in\Delta^S\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2\cdots i_m}|$$

$$\delta_{i_1\cdots i_m}=\begin{cases}1 & i_1=\cdots=i_m\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

1　张量子直和的概念

本节给出张量子直和及相关概念的定义.

定义 1[17]　设张量 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1 i_2\cdots i_m})\in R^{[m,n]}$，且满足

---

①　收稿日期：2020－02－21
基金项目：国家自然科学基金项目(61463002)；云南省教育厅科学研究基金项目(2019J0399).
作者简介：何建锋(1974－)，男，副教授，主要从事矩阵理论的研究.

$$a_{ii\cdots i} \geqslant \sum_{i_2,\cdots,i_m \in [n]} |a_{ii_2\cdots i_m}| - a_{ii\cdots i} \qquad i \in [n]$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角占优张量.

若对每个 $i \in [n]$，有

$$a_{ii\cdots i} > \sum_{i_2,\cdots,i_m \in [n]} |a_{ii_2\cdots i_m}| - a_{ii\cdots i}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优张量，简记为 SDD 张量.

定义 2 设张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1\cdots i_m}) \in R^{[m,n]}$，$n \geqslant 2$，$S$ 是 $[n]$ 的一个真子集，张量 $\boldsymbol{A}$ 满足以下两个条件：

(a) $|a_{i\cdots i}| \geqslant (>) r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$，$\forall i \in S$；

(b) $(|a_{i\cdots i}| - r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{j\cdots j}| - r_j^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A})) \geqslant (>) r_i^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A}) r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$，$\forall i \in S$，$\forall j \in \bar{S}$.

则称张量 $\boldsymbol{A}$ 为 S-对角占优型张量(S-严格对角占优型张量)，简记为 S-SDD_0-型张量(S-SDD-型张量).

定义 3 设张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1i_2i_3}) \in R^{[3,m]}$，$\boldsymbol{B} = (b_{i_1i_2i_3}) \in R^{[3,n]}$，$1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$，称张量

$$\boldsymbol{C} = (c_{i_1i_2i_3}) \in R^{[3,m+n-k]}$$

为张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的 k-阶子直和，记为 $\boldsymbol{A} \oplus_k \boldsymbol{B}$，其中

$$c_{i_1i_2i_3} = \begin{cases} a_{i_1i_2i_3} & i_1, i_2 \in S_1 \cup S_2,\ i_3 \in S_1 \\ a_{i_1i_2i_3} & i_1 \in S_1,\ i_2 \in S_1 \cup S_2,\ i_3 \in S_2 \\ a_{i_1i_2i_3} & i_1 \in S_2,\ i_2 \in S_1,\ i_3 \in S_2 \\ a_{i_1i_2i_3} + b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_1, i_2 \in S_2,\ i_3 \in S_2 \\ b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_1 \in S_2,\ i_2 \in S_3,\ i_3 \in S_2 \\ b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_1 \in S_3,\ i_2 \in S_2 \cup S_3,\ i_3 \in S_2 \\ b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_1, i_2 \in S_2 \cup S_3,\ i_3 \in S_3 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

例 1 设张量 $\boldsymbol{A} = [A(1,:,:), A(2,:,:), A(3,:,:)]$，$\boldsymbol{B} = [B(1,:,:), B(2,:,:), B(3,:,:)] \in R^{[3,3]}$，其中

$$A(1,:,:) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A(2,:,:) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A(3,:,:) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(1,:,:) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B(2,:,:) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B(3,:,:) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

则张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的 2-阶子直和为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \oplus_2 \boldsymbol{B} = [C(1,:,:), C(2,:,:), C(3,:,:), C(4,:,:)] \in R^{[3,4]}$$

其中

$$C(1,:,:) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C(2,:,:) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C(3,:,:) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C(4,:,:) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2 对角占优张量的子直和

本节我们讨论(严格)对角占优张量(S-(严格)对角占优型张量)的子直和仍然为(严格)对角占优张量

(S-(严格) 对角占优型张量) 的条件.

定理 1　设张量 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,m]}$, $\boldsymbol{B}=(b_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,n]}$ 均为对角占优张量, $1\leqslant k\leqslant\min\{m,n\}$, 且 $a_{iii}b_{jjj}>0$, $\forall i\in S_2$, $\forall j\in[k]$, 则张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的 k-阶子直和 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\oplus_k\boldsymbol{B}$ 也是对角占优张量.

证　当 $i_1\in S_1$ 时,

$$c_{i_1i_2i_3}=\begin{cases}a_{i_1i_2i_3} & i_2,i_3\in S_1\cup S_2\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

故有

$$c_{i_1i_1i_1}=a_{i_1i_1i_1}\geqslant\sum_{i_2,i_3\in S_1\cup S_2}|a_{i_1i_2i_3}|-a_{i_1i_1i_1}=\sum_{i_2,i_3\in S_1\cup S_2\cup S_3}|c_{i_1i_2i_3}|-c_{i_1i_1i_1}$$

当 $i_1\in S_2$ 时,

$$c_{i_1i_2i_3}=\begin{cases}a_{i_1i_2i_3} & i_2\in S_1\cup S_2,\ i_3\in S_1\\ a_{i_1i_2i_3} & i_2\in S_1,\ i_3\in S_2\\ a_{i_1i_2i_3}+b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_2,i_3\in S_2\\ b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_2\in S_3,\ i_3\in S_2\\ b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_2\in S_2\cup S_3,\ i_3\in S_3\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

故有

$$c_{i_1i_1i_1}=a_{i_1i_1i_1}+b_{i_1i_1i_1}\geqslant\Big(\sum_{i_2,i_3\in S_1\cup S_2}|a_{i_1i_2i_3}|-a_{i_1i_1i_1}\Big)+\Big(\sum_{i_2,i_3\in S_1}|b_{(i_1-t)i_2i_3}|-b_{(i_1-t)(i_1-t)(i_1-t)}\Big)=$$

$$\Big(\sum_{i_2,i_3\in S_1\cup S_2}|a_{i_1i_2i_3}|+\sum_{i_2,i_3\in S_1}|b_{(i_1-t)i_2i_3}|\Big)-(a_{i_1i_1i_1}+b_{(i_1-t)(i_1-t)(i_1-t)})=\sum_{i_2,i_3\in S_2}|c_{i_1i_2i_3}|-c_{i_1i_1i_1}$$

当 $i_1\in S_3$ 时,

$$c_{i_1i_2i_3}=\begin{cases}b_{(i_1-t)(i_2-t)(i_3-t)} & i_2,i_3\in S_2\cup S_3\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

故有

$$c_{i_1i_1i_1}=b_{(i_1-t)(i_1-t)(i_1-t)}\geqslant\sum_{i_2,i_3\in[n]\backslash[k]}|b_{(i_1-t)i_2i_3}|-b_{(i_1-t)(i_1-t)(i_1-t)}=\sum_{i_2,i_3\in S_1\cup S_2\cup S_3}|c_{i_1i_2i_3}|-c_{i_1i_1i_1}$$

综合以上 3 种情形可知, 结论成立.

例 2　设张量 $\boldsymbol{A}=[A(1,:,:),A(2,:,:),A(3,:,:)]$, $\boldsymbol{B}=[B(1,:,:),B(2,:,:),B(3,:,:)]$, 其中

$$A(1,:,:)=\begin{bmatrix}10&-1&1\\2&0&1\\3&1&0\end{bmatrix}\quad A(2,:,:)=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&11&1\\0&2&1\end{bmatrix}\quad A(3,:,:)=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&2&2\\1&1&12\end{bmatrix}$$

$$B(1,:,:)=\begin{bmatrix}15&3&0\\1&3&3\\0&3&1\end{bmatrix}\quad B(2,:,:)=\begin{bmatrix}1&4&-2\\0&13&1\\2&0&2\end{bmatrix}\quad B(3,:,:)=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\2&2&8\end{bmatrix}$$

易知张量 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为对角占优张量, 而张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的 2-阶子直和为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\oplus_2\boldsymbol{B}=[C(1,:,:),C(2,:,:),C(3,:,:),C(4,:,:)]$$

其中

$$C(1,:,:)=\begin{bmatrix}10&-1&1&0\\2&0&1&0\\3&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad C(2,:,:)=\begin{bmatrix}2&1&2&0\\1&26&4&0\\0&5&4&3\\0&0&3&1\end{bmatrix}$$

$$C(3,:,:)=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\2&3&5&-2\\1&2&25&1\\0&2&0&2\end{pmatrix}\qquad C(4,:,:)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&2&2&8\end{pmatrix}$$

计算知

$$c_{111}=10\geqslant 9=\sum_{i_2,i_3\in[4]}|c_{1i_2i_3}|-c_{111}\qquad c_{222}=26\geqslant 26=\sum_{i_2,i_3\in[4]}|c_{2i_2i_3}|-c_{222}$$

$$c_{333}=25\geqslant 24=\sum_{i_2,i_3\in[4]}|c_{3i_2i_3}|-c_{333}\qquad c_{444}=8\geqslant 7=\sum_{i_2,i_3\in[4]}|c_{4i_2i_3}|-c_{444}$$

故张量 $\boldsymbol{C}$ 为对角占优张量.

类似定理 1 的证明可得如下结论:

定理 2 设张量 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,m]}$, $\boldsymbol{B}=(b_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,n]}$ 均为严格对角占优张量, $1\leqslant k\leqslant\min\{m,n\}$, 且 $a_{iii}b_{jjj}>0$, $\forall i\in S_2$, $\forall j\in[k]$, 则张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的 k-阶子直和也是严格对角占优张量.

下面讨论 S-SDD-型张量的子直和. 先看一个例子.

例 3 设张量 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,4]}$, 其中

$$A(1,:,:)=\begin{pmatrix}2.6&0.1&0.1&0.02\\0.1&0.2&0.1&0.02\\0.1&0.1&0.2&0.03\\0.02&0.03&0.03&0.04\end{pmatrix}\qquad A(2,:,:)=\begin{pmatrix}0.4&0&0.1&0.1\\0&2.6&0.1&0.1\\0.1&0.1&0.1&0.1\\0.1&0.1&0.1&0.1\end{pmatrix}$$

$$A(3,:,:)=\begin{pmatrix}0.6&0.2&0&0.1\\0.2&0.3&0&0.1\\0&0&2.2&0.2\\0.1&0.1&0.2&0.2\end{pmatrix}\qquad A(4,:,:)=\begin{pmatrix}0.8&0.2&0.1&0\\0.2&0.3&0.1&0\\0.1&0.1&0.1&0\\0&0&0&2.2\end{pmatrix}$$

取 $S=\{1,2\}$, 由于

$$|a_{111}|=2.6>0.4=r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})\qquad |a_{222}|=2.6>0.4=r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$$

$$(|a_{111}|-r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{333}|-r_3^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A}))=3.25>0.39=r_1^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A})r_3^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$$

$$(|a_{111}|-r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{444}|-r_4^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A}))=4.62>0.45=r_1^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A})r_4^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$$

$$(|a_{222}|-r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{333}|-r_3^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A}))=3.52>0.52=r_2^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A})r_3^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$$

$$(|a_{222}|-r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{444}|-r_4^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A}))=4.62>0.46=r_2^{\Delta^{\bar{S}}}(\boldsymbol{A})r_4^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$$

即 $\boldsymbol{A}$ 为 $\{1,2\}$-SDD-型张量. 但是对于张量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\oplus_2\boldsymbol{A}$, 其中

$$C(1,:,:)=\begin{pmatrix}2.6&0.1&0.1&0.02&0&0\\0.1&0.2&0.1&0.02&0&0\\0.1&0.1&0.2&0.03&0&0\\0.02&0.03&0.03&0.04&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad C(2,:,:)=\begin{pmatrix}0.4&0&0.1&0.1&0&0\\0&2.6&0.1&0.1&0&0\\0.1&0.1&0.1&0.1&0&0\\0.1&0.1&0.1&0.1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$C(3,:,:)=\begin{pmatrix}0.6&0.2&0&0.1&0&0\\0.2&0.3&0&0.1&0&0\\0&0&4.8&0.3&0.1&0.02\\0.1&0.1&0.3&0.4&0.1&0.02\\0&0&0.1&0.1&0.2&0.03\\0&0&0.02&0.03&0.03&0.04\end{pmatrix}\qquad C(4,:,:)=\begin{pmatrix}0.8&0.2&0.1&0&0&0\\0.2&0.3&0.1&0&0&0\\0.1&0.1&0.5&0&0.1&0.1\\0&0&0&4.8&0.1&0.1\\0&0&0.1&0.1&0.1&0.1\\0&0&0.1&0.1&0.1&0.1\end{pmatrix}$$

$$C(5,:,:)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0.6&0.2&0&0.1\\0&0&0.2&0.3&0&0.1\\0&0&0&0&2.2&0.2\\0&0&0.1&0.1&0.2&0.2\end{pmatrix}\qquad C(6,:,:)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0.8&0.2&0.1&0\\0&0&0.2&0.3&0.1&0\\0&0&0.1&0.1&0.1&0\\0&0&0&0&0&2.2\end{pmatrix}$$

当 $i=1$，$j=5$ 时，有

$$(|c_{111}|-r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{555}|-r_5^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=-0.22<0=r_1^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_5^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

即张量 $\boldsymbol{C}$ 不是$\{1,2\}$-SDD- 型张量.

例 3 表明，S-SDD- 型张量的子直和不一定是S-SDD- 型张量. 因此，寻找 S-SDD- 型张量的子直和仍然为 S-SDD- 型张量的条件是有意义的.

定理 3　设张量 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,m]}$ 为 S-SDD- 型张量，S 为 S_1 的子集，$\boldsymbol{B}=(b_{i_1i_2i_3})\in R^{[3,n]}$ 为 SDD 张量，$1\leqslant k\leqslant\min\{m,n\}$，$a_{iii}>0$，$\forall i\in S_2$，$b_{jjj}>0$，$j\in[k]$，则张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的 k -阶子直和$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\oplus_k\boldsymbol{B}$ 也是 S-SDD- 型张量.

证　先证明 $S=S_1$ 时的情形.

要证明 $\boldsymbol{C}$ 是 S-SDD- 型张量，需证明：

(i) $|c_{iii}|>r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$，$\forall i\in S$；

(ii) $(|c_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{jjj}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))>r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$，$\forall i\in S$，$\forall j\in\bar S$.

此时，由于 $S=S_1$，则 $\bar S=S_2\cup S_3$. 下面逐一证明这两个条件成立.

(i) 由张量 $\boldsymbol{A}$ 为 S-SDD- 型张量知 $|a_{iii}|>r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$，$\forall i\in S_1$，从而有

$$|c_{iii}|=|a_{iii}|>r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})=r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})\qquad\forall i\in S_1$$

(ii) 当 $j\in S_2$ 时，由 $i\in S=S_1$，有

$$r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})=r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})\qquad r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})=r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})$$

$$r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})=r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A})+r_{j-t}(\boldsymbol{B})\qquad r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})=r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A})$$

由张量 $\boldsymbol{A}$ 为 S-SDD- 型张量得

$$(|a_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{jjj}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A}))>r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A})r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})\qquad\forall i\in S,\ \forall j\in\bar S$$

又因 $\boldsymbol{B}$ 为 SDD 张量，故 $|b_{iii}|>r_i(\boldsymbol{B})$，$\forall i\in[n]$. 从而有

$$\begin{aligned}&(|c_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{jjj}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=\\&(|a_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{jjj}+b_{(j-t)(j-t)(j-t)}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A})-r_{j-t}(\boldsymbol{B}))=\\&(|a_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))((|a_{jjj}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A}))+(|b_{(j-t)(j-t)(j-t)}|-r_{j-t}(\boldsymbol{B})))>\\&(|a_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|a_{jjj}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A}))>\\&r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{A})r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{A})=r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})\end{aligned}$$

当 $j\in S_3$ 时，由 $i\in S=S_1$ 知 $r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})=0$，$r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})=r_{j-t}^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{B})$，故

$$\begin{aligned}(|c_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{jjj}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=(|a_{iii}|-r_i^{\Delta^S}(\boldsymbol{A}))(|b_{(j-t)(j-t)(j-t)}|-r_j^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{B}))>\\0=r_i^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_j^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})\end{aligned}$$

综上所述，可知结论成立.

当 $|S|<|S_1|$ 时，可类似证明结论成立.

例 4　取例 3 中的 S-SDD- 型张量$\boldsymbol{A}$，例 2 中的 SDD 张量 $\boldsymbol{B}$，$S=\{1,2\}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\oplus_2\boldsymbol{B}=[C(1,:,:)$,

$C(2,:,:,:)$, $C(3,:,:,:)$, $C(4,:,:,:)$, $C(5,:,:,:)$], 其中

$$C(1,:,:,:)=\begin{bmatrix} 2.6 & 0.1 & 0.1 & 0.02 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.02 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.03 & 0 \\ 0.02 & 0.03 & 0.03 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C(2,:,:,:)=\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 2.6 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(3,:,:,:)=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 17.2 & 3.2 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 1.2 & 3.2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C(4,:,:,:)=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 1.1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15.2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C(5,:,:,:)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

由于

$$|c_{111}|=2.6>0.4=r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}) \qquad |c_{222}|=2.6>0.4=r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

$$(|c_{111}|-r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{333}|-r_3^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=5.72>0.39=r_1^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_3^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

$$(|c_{111}|-r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{444}|-r_4^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=6.82>0.45=r_1^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_4^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

$$(|c_{111}|-r_1^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{555}|-r_5^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=2.2>0=r_1^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_5^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

$$(|c_{222}|-r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{333}|-r_3^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=5.72>0.52=r_2^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_3^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

$$(|c_{222}|-r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{444}|-r_4^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=6.82>0.6=r_2^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_4^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

$$(|c_{222}|-r_2^{\Delta^S}(\boldsymbol{C}))(|c_{555}|-r_5^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C}))=2.2>0=r_2^{\Delta^{\bar S}}(\boldsymbol{C})r_5^{\Delta^S}(\boldsymbol{C})$$

所以,张量 $\boldsymbol{C}$ 为 S-SDD- 型张量.

参考文献:

[1] BRU R, PEDROCHE F, SZYLD D B. Subdirect Sums of Nonsingular *M*-Matrices and of Their Inverse [J]. Electron J Linear Algebra, 2005, 13(1): 162-174.

[2] BRU R, PEDROCHE F, SZYLD D B. Additive Schwarz Iterations for Markov Chains [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2005, 27(2): 445-458.

[3] FROMMER A, SZYLD D B. Weighted Max Norms, Splittings, and Overlapping Additive Schwarz Iterations [J]. Numer Math, 1999, 83(2): 259-278.

[4] FALLAT S M, JOHMSON C R. Sub-Direct Sums and Positivity Classes of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 1999, 288(1): 149-173.

[5] ZHU Y, HUANG T Z. Subdirect Sums of Doubly Diagonally Dominant Matrices [J]. Electron J Linear Algebra, 2007, 16(1): 171-182.

[6] LI B, TSATSOMEROS M J. Doubly Diagonally Dominant Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 1997, 261(1-3): 221-235.

[7] BRU R, CVETKOVIĆ L, KOSTIĆ V, et al. Characterization of α_1 and α_2-Matrices [J]. Cent Eur J Math, 2010, 8(1): 32-40.

[8] LI C, LIU Q, GAO L, et al. Subdirect Sums of Nekrasov Matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2016, 64(2): 208-218.

[9] ZHU Y，HUANG T，LIU J. Subdirect Sums of *H*-Matrices [J]. Int J Nonlinear Sci，2009，8(1)：50-58.
[10] LI C，MA R，LIU Q，et al. Subdirect Sums of Weakly Chained Diagonally Dominant Matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra，2017，65(6)：1220-1231.
[11] GAO L，HUANG H，LI C. Subdirect Sums of *QN*-Matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra，2018，2018：1-20.
[12] NIKIAS C L，MENDEL J M. Signal Processing with Higher-Order Spectra [J]. IEEE Signal Process Mag，1993，10(3)：10-37.
[13] QI L，WANG F，WANG Y. *Z*-Eigenvalue Methods for a Global Polynomial Optimization Rroblem [J]. Math Program，2009，118：301-316.
[14] CHING W，HUANG X，MICHAEL KN，et al. Markov Chains：Models，Algorithms and Applications [M]. 2th ed. New York：Springer，2013.
[15] BOSE N K，KAMAT P S. Algorithm for Stability Test of Multidimensional Filters [J]. IEEE Transactions on Acoustics，Speech，and Signal Processing，1974，22(5)：307-314.
[16] DIAMOND R. A Note on the Rotational Superposition Problem [J]. Acta Cryst，1988，44(2)：211-216.
[17] 罗自炎，祁力群. 半正定张量 [J]. 中国科学(数学)，2016，46(5)：639-654.
[18] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor [J]. Journal of Symbolic Computation，2005，40(6)：1302-1324.
[19] LI C Q，JIAO A Q，LI Y T. An S-Type Eigenvalue Localization Set for Tensors [J]. Linear Algebra Appl，2016，493：469-483.
[20] 桑彩丽，赵建兴. 非负矩阵张量最大奇异值的 S-型上界 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(6)：1-5.
[21] 桑彩丽，赵建兴. 矩阵张量的 S-型奇异值包含集 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(10)：1-4.

On Subdirect Sums of Third-Order Diagonally Dominant Tensors

HE Jian-feng

School of Mathematics and Statistics，Chuxiong Normal University，Chuxiong Yunnan 675000，China

Abstract：According to the relation between the matrices and tensors，the subdirect sums of tensors has been introduced，which is the generalization of matrices case. Some conditions have been given to guarantee that the *k*-subdirect sums of third-order strictly diagonally dominant tensors(SDD) is also SDD. The same situation has been analyzed for *S*-SDD tensors，and examples been given to illustrate the theoretical results presented.

Key words：tensors；subdirect sums；strictly diagonally dominant tensors；matrix

责任编辑　廖　坤