DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.002

不满足序传递的正互反判断矩阵的排序研究①

李 彩 凤

河池学院，数学与统计学院，广西 宜州 546300

摘要： 对不满足序传递的正互反判断矩阵，分析其一致性检验的不必要性及调整的不合理性，说明了不满足序传递的正互反判断矩阵不适合用特征向量作为其排序向量. 针对不满足序传递的正互反判断矩阵，利用得失分率排序法，充分挖掘矩阵中两两比较中元素相对于准则的得分及失分信息，同时去掉元素自身比较的信息，求出合理的排序权值，而不仅仅考虑排序. 最后，通过举例，将此方法与特征向量作为排序向量法进行对比分析，结果说明，此方法不仅简单易行，且得出排序结果与判断矩阵的信息一致，优于用特征向量作为排序向量的方法.

关 键 词： 序传递；正互反判断矩阵；排序权值

中图分类号： O151.21；O212.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2020)10-0008-05

层次分析法中关键一步是由判断矩阵导出排序权重[1-6]. 对于同一个决策问题，使用不同标度建立的正互反判断矩阵若不满足序传递，得到的排序结果可能不同[7]；对于同一个不满足序传递的正互反判断矩阵，利用不同的排序方法可能得出不同的排序方案. 因此对于不满足序传递的矩阵，其排序方法的选择尤为重要. 当判断矩阵不满足序传递时，常见的解决方法是把不一致矩阵调整为满足一致性指标的矩阵，然后用排序方法求出排序权重[1,8-10]. 文献[11]给出的排序方法与常见排序方法不同，不是把不一致矩阵调整成满足一致性指标的矩阵再利用已有的排序方法，而是提出一致性检验不必要性的观点，给出了一种与矩阵是否一致无关的排序方法. 但文献[11]的排序方法缺漏过多矩阵元素所提供的两个方案重要性排序的信息.

构造正互反判断矩阵时，决策者每一次的比较集中在两个方案上，只考虑两个方案的比较关系得出矩阵的元素，判断矩阵的元素包含了两两方案比较的全部重要性排序信息. 本文着重于正互反判断矩阵中元素的充分挖掘，尝试对不满足序传递的判断矩阵排序权值进行研究. 在研究中发现，把不一致矩阵调整为一致矩阵再求排序权重的方法不适合于不满足序传递的判断矩阵，提出了一种充分利用矩阵元素所提供的两个方案重要性排序的信息，求不满足序传递的判断矩阵的排序方法，此方法能充分利用矩阵元素所提供的两个方案重要性排序的信息.

1　不满足序传递的判断矩阵是客观存在的

定义 1[12]　对正互反矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$：如果 $a_{ij}>1$，则对所有的 k 有 $a_{ik}\geqslant a_{jk}$；如果 $a_{ij}=1$，则或者对所有的 k 有 $a_{ik}\geqslant a_{jk}$，或者对所有的 k 有 $a_{ik}\leqslant a_{jk}$. 则称$(a_{ij})_{n\times n}$为序传递的

正互反判断矩阵的完全一致性是一个理想的指标，往往很难达到，在两两比较的过程中，由于不同决策者对不同元素的反射心理不同，不同的元素特点不同，序传递条件有时也难以满足. 不满足序传递的判断矩阵是客观存在的.

---

① 收稿日期：2020-03-02
基金项目：国家自然科学基金项目(11961021).
作者简介：李彩凤(1973-)，女，副教授，主要从事决策分析的研究.

例 1[1]　在一项以飞行员为对象的实验中，要求飞行员在“火焰”、“炽热的金属物”和“跌落”三者之间进行两两比较选择．一般的选择结果是：“火焰”与“炽热的金属物”比较，排斥“炽热的金属物”；“炽热的金属物”与“跌落”比较，排斥“跌落”；“火焰”和“跌落”比较，排斥“火焰”．对这个比较结果的解释是：飞行员惧怕热物体的反射心理要强于对火焰的惧怕；飞行员习惯上对于平稳、安全感的要求较强，因此在“炽热的金属物”与“跌落”的比较选择中排斥“跌落”；“火焰”和“跌落”的比较选择中排斥“火焰”，这并非不合理．

例 1 中两两比较得出的判断矩阵不满足序传递．

例 2　在篮球、足球或排球等球赛的比赛预测中，有时候会出现“i 队胜 j 队，j 队胜 k 队，k 队胜 i 队”的预测结果．这样的预测结果表达成两两比较得出的判断矩阵不满足序传递．

2　不满足序传递的判断矩阵一致性检验的不必要性以及调整的不合理性

根据判断矩阵序传递的定义，很显然不满足序传递的矩阵与一致性的含义相左，偏离一致性大，因此没必要进行一致性检验．加上一致性指标的确定缺乏理论依据，偏离一致性非常大的矩阵却可能通过一致性检验，比如文献[13]的例 2，在正互反判断矩阵中有“方案 A_5 比方案 A_2 极端重要，方案 A_2 比方案 A_1 极端重要，方案 A_1 比方案 A_5 稍微重要”，这很显然是矛盾的，但却通过一致性检验．

若正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致的，即 $a_{ij}=\dfrac{a_{ik}}{a_{jk}}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$，显然有特征根问题 $\boldsymbol{A\omega}=n\boldsymbol{\omega}$，$n$ 为最大特征根，其他特征根为 0，最大特征根对应的特征向量 $\boldsymbol{\omega}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为排序权重，且 $\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n}$，当矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 受小扰动时排序权重影响较小[12]．因此判断矩阵满足完全一致性或者偏离一致性较小时，用最大特征根对应的特征向量归一化后作为排序向量是合理的．层次分析法中需对正互反判断矩阵进行基于最大特征根的一致性检验，是因为把判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根对应的特征向量归一化后作为排序向量，偏离一致性程度太远的判断矩阵没法确保以特征向量作为排序向量的合理性[12]．一致性检验是基于最大特征向量作为排序向量的，若使用其他排序法没有需一致性检验的理论依据．很显然，不满足序传递的矩阵偏离一致性程度太远，不适合用特征向量作为排序向量，因此进一步说明不满足序传递的矩阵没必要进行一致性检验．

当正互反矩阵不满足传递性时，若对其进行调整，调整后的矩阵往往与决策者意愿不一致，那么调整后的矩阵得出的排序结果没能很好反应决策者意愿．比如文中例 2．对于例 2 中的“i 队胜 j 队，j 队胜 k 队，k 队胜 i 队”的预测结果，不管调整判断矩阵的哪个元素使判断矩阵一致后都没法与预测的意愿一致．调整后的判断矩阵与决策者意愿已不一致，那么由调整后矩阵得出的排序权重没法保证与决策者意愿一致，这样的调整不合理．也即当正互反矩阵不满足传递性时，对其进行调整是不合理的．

3　不满足序传递的判断矩阵的排序方法

在篮球、排球等一些球赛的单循环赛中，有时候会出现“i 队胜 j 队，j 队胜 k 队，k 队胜 i 队”，若把这样的比赛结果表示成两两比较的判断矩阵，则是不满足传递性的判断矩阵．当比赛出现这样的结果时，往往采取得失分率计算这几个球队的排序权重从而确定排名，得失分率等于本队在每一场比赛中的总得分除以总失分．当粗略“胜或输”的结果没法确定比赛排名时，因为每一场比赛所有输赢信息就是“输或赢”、“总得分和总失分”，用得失分率计算方法得出的排序权重很好地体现了每一场比赛结果的所有得分和失分信息，不仅仅得出合理的排序方案，而且得出合理的排序权重的数的大小．根据比赛的得失分率计算方法，本文给出元素相对于某准则的得失分率的定义．

定义 2　设在层次分析法中，准则 K 所支配的下一层次元素为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$．若采用某种比例标度得出 $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{y_{ij}}$，$x_{ij}>0$，$y_{ij}>0$（$a_{ij}$ 是 u_i 与 u_j 相对于准则 K 的重要性比较，$\dfrac{x_{ij}}{y_{ij}}$ 是根据标度得出的两两比较结果，不是化简后的结果），且 $a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$，$a_{ii}=1$，有相应正互反判断矩阵：

$$
(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}\frac{x_{11}}{y_{11}} & \frac{x_{12}}{y_{12}} & \cdots & \frac{x_{1n}}{y_{1n}}\\ \frac{x_{21}}{y_{21}} & \frac{x_{22}}{y_{22}} & \cdots & \frac{x_{2n}}{y_{2n}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{x_{n1}}{y_{n1}} & \frac{x_{n2}}{y_{n2}} & \cdots & \frac{x_{nn}}{y_{nn}}\end{pmatrix}\qquad \frac{x_{ij}}{y_{ij}}=\frac{y_{ji}}{x_{ji}} \tag{1}
$$

令

$$
d_i=\frac{\sum\limits_{k\neq i}x_{ik}}{\sum\limits_{k\neq i}y_{ik}} \tag{2}
$$

将向量$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$归一化后得向量$(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，称 w_i 为元素 u_i 相对准则 K 的得失分率.

由定义 2 求出向量$(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，并把$(w_1, w_2, \cdots, w_n)$作为元素 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 相对于准则 K 的排序权重向量的方法称为得失分率排序法. 当正互反判断矩阵不满足传递性时，决策者使用某种比例标度得出两两比较的信息 $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{y_{ij}}$，则 x_{ij}，y_{ij} 分别看作元素 u_i 与元素 u_j 相比较的得分和失分，定义 2 的 d_i 充分利用了矩阵元素 a_{ij} 两两比较的得分信息和失分信息，且在计算 d_i 时不求跟自己比较的得失分，将$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$归一化后得$(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，将$(w_1, w_2, \cdots, w_n)$作为元素 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 相对于准则 K 的排序权重，用得失分率排序法求出的排序权重不仅能体现元素 u_i 的重要性排序，而且能很好地表示元素 u_i 重要性的权值的大小.

4　举例

例 3[7]　对于某一决策问题，有 4 种方案可以选择，专家在同一准则下对 4 种方案 A_1，A_2，A_3，A_4 进行比较，认为：A_1 强烈优于 A_2，A_1 优于 A_3 的程度介于明显大与强烈大之间，A_1 优于 A_4 的程度介于相同与稍微大之间，A_4 优于 A_2 的程度介于强烈大与极端大之间，A_4 优于 A_3 的程度介于明显大与强烈大之间，A_2 与 A_3 的程度相同.

为了方便研究，先列出例 3 中要考虑到的 3 种标度(见表 1).

表 1　3 种标度

区分＼标度	1～9 标度	$\frac{9}{9}\sim\frac{9}{1}$标度	$\frac{10}{10}\sim\frac{18}{2}$标度
相同	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{10}{10}$
稍微大	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{12}{8}$
明显大	$\frac{5}{1}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{14}{6}$
强烈大	$\frac{7}{1}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{16}{4}$
极端大	$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{18}{2}$
通式	$\frac{k}{1}$	$\frac{9}{10-k}$	$\frac{9+k}{11-k}$

下面分别使用 1 ～ 9 标度、$\frac{9}{9}\sim\frac{9}{1}$ 标度、$\frac{10}{10}\sim\frac{18}{2}$ 标度 3 种不同标度构造判断矩阵. 很显然，分别用 3 个标度建立的 3 个正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都不满足序传递. 判断矩阵的元素 $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{y_{ij}}$，$\frac{x_{ij}}{y_{ij}}$ 是由决策者根据标度得出的两两比较结果，不是化简后的结果. 然后用得失分率排序法求出排序权重，得出排序结果.

若用 1 ～ 9 标度，得判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{1} & \frac{7}{1} & \frac{6}{1} & \frac{2}{1}\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{8}{1} & \frac{6}{1} & \frac{1}{1}\end{pmatrix}$$

用(1)式求出得失分率$(d_1, d_2, \cdots, d_n)=\left(\frac{15}{3}, \frac{3}{16}, \frac{3}{13}, \frac{15}{4}\right)$，归一化后得(0.545 4，0.020 5，0.025 2，0.409 0)．方案排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$．

若用$\frac{9}{9} \sim \frac{9}{1}$标度，得判断矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\frac{9}{9} & \frac{9}{3} & \frac{9}{4} & \frac{9}{8}\\ \frac{3}{9} & \frac{9}{9} & \frac{9}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{9}{9} & \frac{9}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{9}{2} & \frac{9}{4} & \frac{9}{9}\end{pmatrix}$$

用(1)式求出得失分率$(d_1, d_2, \cdots, d_n)=\left(\frac{27}{15}, \frac{14}{27}, \frac{17}{27}, \frac{26}{15}\right)$，归一化后得(0.384 5，0.110 8，0.134 5，0.370 3)．方案排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$．

若用$\frac{10}{10} \sim \frac{18}{2}$标度，得判断矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\frac{10}{10} & \frac{16}{4} & \frac{15}{5} & \frac{11}{9}\\ \frac{4}{16} & \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{3}{17}\\ \frac{5}{15} & \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{5}{15}\\ \frac{9}{11} & \frac{17}{3} & \frac{15}{5} & \frac{10}{10}\end{pmatrix}$$

用(1)式求出得失分率$(d_1, d_2, \cdots, d_n)=\left(\frac{42}{18}, \frac{17}{43}, \frac{20}{40}, \frac{41}{19}\right)$，归一化后得(0.433 2，0.073 4，0.092 8，0.400 6)．方案排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$．

本文把文献[7]例子中"A_2 优于 A_3 的程度介于相同与明显大之间"改为"A_2 与 A_3 的程度相同"，这样的改动便于看出矩阵元素中体现的意愿，便于看出得失分率与判断矩阵所体现信息的一致性．由本文例 3 题意"A_1 强烈优于 A_2，A_1 优于 A_3 的程度介于明显大与强烈大之间，A_2 与 A_3 的程度相同"，易得出 $A_1 > A_3 > A_2$；由"A_4 优于 A_2 的程度介于强烈大与极端大之间，A_4 优于 A_3 的程度介于明显大与强烈大之间，A_2 与 A_3 的程度相同"，易得出 $A_4 > A_3 > A_2$；由"A_1 优于 A_4 的程度介于相同与稍微大之间"，易得出 $A_1 > A_4$，综上所述，由题意易得出 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$．由得失分率排序法得出的结果与这个结果一致、与判断矩阵所体现信息是一致的．

若例 3 中用特征向量作为排序向量：使用 $1 \sim 9$ 标度，得特征向量(0.505 3，0.060 1，0.066 7，0.367 9)，方案排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$；使用$\frac{9}{9} \sim \frac{9}{1}$标度，得特征向量(0.359 7，0.114 5，0.145 2，0.380 5)，方案排序为 $A_4 > A_1 > A_3 > A_2$；使用$\frac{10}{10} \sim \frac{18}{2}$标度，得特征向量(0.395 3，0.093 5，0.116 9，0.394 4)，方

案排序为 $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$，即得出不同的排序结果.

说明在不满足传递性的矩阵中，用特征向量作为排序向量没有与判断矩阵所体现的信息一致，而用得失分率排序法得出的结果能很好地体现判断矩阵中两两元素比较重要性的信息.

不管判断矩阵是否满足传递性，方案的真实排序总是客观存在的[12]，采用得失分率排序法得出的排序结果能体现两个元素重要性排序信息，能很好地体现方案的真实排序. 采用得失分率的好处：① 解决实际中出现的不满足传递性的矩阵的排序问题；② 避免把不满足传递性的矩阵调整为一致性矩阵后漏失过多的两两比较信息；③ 充分考虑两两比较中的信息，从而在单准则中得出合理的排序方案、合理的排序向量权值的大小，在多准则中合成后得出合理的排序结果.

参考文献：

[1] SAATY T L. Analitic Hierorchy Process [M]. Pittsbargh: Uiversity of Pitteburgh, 1988.
[2] 张 羽，骆云中，谢德体，等. 基于AHP的农业主题公园综合评价——以川东低山丘陵区17个农业主题公园为例 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(5)：96-103.
[3] 马 蕾，胡晨光，张 婷，等. 内容中心网络中基于AHP和GRA的路由策略 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(10)：125-132.
[4] 童英华，冯忠岭，张占莹. 基于AHP的雾霾影响因素评价分析[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(3)：87-94.
[5] 黄锐露，田泽金，吕跃进. 区间粗糙数互反判断矩阵的一致性研究 [J]. 模糊系统与数学，2019，33(4)：124-133.
[6] 吕跃进，杨燕华. 区间粗糙数层次分析法 [J]. 系统工程理论与实践，2018，38(3)：786-793.
[7] 徐泽水. 关于层次分析中几种标度的模拟评估 [J]. 系统工程理论与实践，2000(7)：58-62.
[8] 田泽金，黄锐露，吕跃进. 区间粗糙数互补判断矩阵的两种一致性 [J]. 计算机工程与应用，2019，55(24)：235-240.
[9] 杨燕华，吕跃进. 模糊判断矩阵的一致性检验 [J]. 统计与决策，2018，34(4)：78-80.
[10] 赵 璇，张 强，朱吉乔. 模糊数互补判断矩阵的乘性一致性检验及改进方法 [J]. 运筹与管理，2013，22(3)：1-8.
[11] 刘开第，庞彦军，金 斓. 浅析模糊AHP中一致性检验的不必要性 [J]. 数学的实践与认识，2015，45(14)：285-293.
[12] 许树柏. 实用决策方法——层次分析法原理 [M]. 天津：天津大学出版社，1988.
[13] 王世华，杨建梅，董玉成. 关于判断矩阵一致性检验与调整的一个注记 [J]. 数学的实践与认识，2014，44(8)：271-277.

On Ranking of Positive Reciprocal Judgment Matrix Not Satisfied with Priority Transfer

LI Cai-feng

School of Mathematics and Statistics, Hechi University, Yizhou Guangxi 546300, China

Abstract: For the positive reciprocal judgment matrix which does not satisfy the priority transfer, its necessity of consistency test and the irrationality of adjustment have been analyzed in this paper, and it has been explained that it is not suitable to use the eigenvector as its priority. A method that makes full use of the importance information of elements in matrix has been presented, which can gets the reasonable importance ranking value. Finally, the method in this paper has been compared with eigenvector priority method through one example. The results show that the method in this paper is simple and feasible, and can get the same priorities as the information from the judgment matrix, which is better than using eigenvector priority method.

Key words: priority transfer; positive reciprocal judgment matrix; ranking value

责任编辑 廖 坤