第 45 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 10 月
Vol. 45　No. 10　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Oct.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.003

2 类图完美对集数的计算公式[①]

唐保祥[1]，　任　韩[2]

1. 天水师范学院　数学与统计学院，甘肃 天水 741001；2. 华东师范大学 数学系，上海 200062

摘要：把图 N_{mn} 和 $3\text{-}nK_{3,3}$ 的完美对集按关联某个顶点的边进行分类，求出每一类完美对集数目的递推关系式，再用求和与嵌套递推的方法，给出了图 N_{mn} 和 $3\text{-}nK_{3,3}$ 的不同完美对集的计数公式为 2^n 和 6^n.

关　键　词：分类；完美对集；递推式

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2020)10－0013－03

图的完美对集的计数问题的研究有重要的理论价值和现实意义[1-3]. 此问题已经被证实是 NP- 困难问题. 分类嵌套递推的方法是求解许多类图完美对集数的一种非常有效的方法[4-10]. 本文构造了 2 类新的 N_{mn} 和 $3\text{-}nK_{3,3}$，用分类嵌套递推的方法求出了图 N_{mn} 和 $3\text{-}nK_{3,3}$ 不同完美对集的计数公式.

定义 1　如果图 G 有 1- 正则生成子图 P，那么就称这个生成子图 P 为图 G 的完美对集.

定义 2　设图 G 是有完美对集的图，如果图 G 的两个完美对集 P_1 和 P_2 中有一条边不同，那么就称 P_1 和 P_2 是 G 的两个不同的完美对集.

定义 3　设长度为 $2m$ 的圈 C_m^i 的顶点集合为 $V(C_m^i)=\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{im},v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{im}\}(i=1,2,\cdots,n)$，把圈 C_m^i 的顶点 $v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{im}$ 与圈 C_m^{i+1} 的顶点 $u_{i+1,1},u_{i+1,2},\cdots,u_{i+1,m}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 连接成圈 $v_{i1}u_{i+1,2}v_{i3}u_{i+1,4}v_{i5}\cdots v_{i,m-1}u_{i+1,m}v_{im}u_{i+1,m-1}v_{i,m-2}\cdots u_{i+1,3}v_{i2}u_{i+1,1}v_{i1}(i=1,2,\cdots,n-1)$，这样产生的图记为 N_{mn}，见图 1.

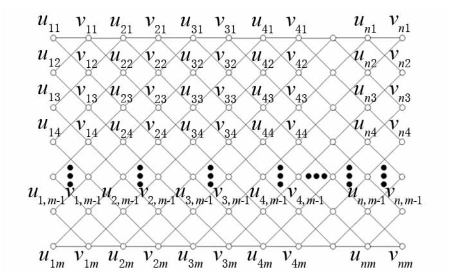

图 1　图 N_{mn}

定义 4　设完全偶图 $K_{3,3}^i$ 的顶点集合为 $V(K_{3,3}^i)=\{u_{i1},u_{i2},u_{i3},v_{i1},v_{i2},v_{i3}\}(i=1,2,\cdots,n)$，把圈 $K_{3,3}^i$ 的顶点 v_{i1},v_{i2},v_{i3} 分别与圈 $K_{3,3}^{i+1}$ 的顶点 $u_{i+1,1},u_{i+1,2},u_{i+1,3}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 各连接一条边，这样产生的图记为 $3\text{-}nK_{3,3}$，见图 2.

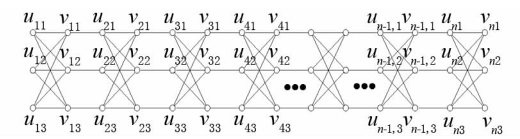

图 2　图 $3\text{-}nK_{3,3}$

①　收稿日期：2020－02－03

基金项目：国家自然科学基金项目(11171114).

作者简介：唐保祥(1961－)，男，教授，主要从事图论和组合数学的研究.

定理1　设图 N_{mn} 的完美对集数为 $\delta(m, n)$，则 $\delta(n) = 2^n$.

证　因为图 N_{mn} 的每个圈 C_m^i：$v_{i1}u_{i2}v_{i3}u_{i4}v_{i5}\cdots v_{i,m-1}u_{im}v_{im}u_{i,m-1}v_{i,m-2}\cdots u_{i3}v_{i2}u_{i1}v_{i1}$ 恰有2个完美对集($i=1,2,\cdots,n$)，每个圈取定一个完美对集，就形成图 N_{mn} 的一个完美对集. 因此，由乘法原理可知，图 N_{mn} 至少有 2^n 个不同的完美对集. 下面证明图 N_{mn} 只有 2^n 个不同的完美对集.

设 P 是图 N_{mn} 的完美对集的集合，对于集合 P 中的任何一个完美匹配 P_i，P_i 一定要饱和顶点 u_{11}. 与顶点 u_{11} 关联的边只有2条，所以集合 P 可划分为2类：P_1, P_2. 设 $u_{11}v_{11} \in P_1$，$u_{11}v_{12} \in P_2$，则 $P_1 \cap P_2 = \varnothing$，$P = P_1 \cup P_2$，故 $\delta(m, n) = |P| = |P_1| + |P_2|$.

因为 $u_{11}v_{11} \in P_1$，所以当 m 是偶数时，边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{13}, v_{12}u_{13}, u_{14}v_{15}, v_{14}u_{15}, \cdots, u_{1,m-2}v_{1,m-1}, v_{1,m-2}u_{1,m-1}, u_{1m}v_{1m}$ 都属于 P_1；当 m 是奇数时，边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{13}, v_{12}u_{13}, u_{14}v_{15}, v_{14}u_{15}, \cdots, u_{1,m-1}v_{1m}, v_{1,m-1}u_{1m}$ 都属于 P_1. 由 $\delta(m, n)$ 的定义可知，$|P_1| = \delta(m, n-1)$.

因为 $u_{11}v_{12} \in P_2$，所以当 m 是偶数时，边 $v_{11}u_{12}, u_{13}v_{14}, v_{13}u_{14}, u_{15}v_{16}, v_{15}u_{16}, \cdots, u_{1,m-2}v_{1,m}, v_{1,m-1}u_{1,m}$ 都属于 P_2；当 m 是奇数时，边 $v_{11}u_{12}, u_{13}v_{14}, v_{13}u_{14}, u_{15}v_{16}, v_{15}u_{16}, \cdots, u_{1,m-2}v_{1,m-1}, v_{1,m-2}u_{1,m-1}, u_{1m}v_{1m}$ 都属于 P_2. 由 $\delta(m, n)$ 的定义可知，$|P_2| = \delta(m, n-1)$.

因此，$\delta(m, n) = |P| = 2\delta(m, n-1) = \cdots = 2^{n-1}\delta(m, 1) = 2^n$.

定理2　设图 $3\text{-}nK_{3,3}$ 的完美对集数为 $\gamma(n)$，则 $\gamma(n) = 6^n$.

证　图 $3\text{-}nK_{3,3}$ 存在完美对集是明显的. 设图 $3\text{-}nK_{3,3}$ 的完美对集的集合为 S，对于集合 S 中的任何一个完美匹配 S_i，S_i 一定要饱和顶点 u_{11}. 与顶点 u_{11} 关联的边有3条，所以集合 S 可划分为3类：S_1, S_2, S_3. 设 $u_{11}v_{11} \in S_1$，$u_{11}v_{12} \in S_2$，$u_{11}v_{13} \in S_3$，则 $S_i \cap S_j = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant 3)$，$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. 故 $\gamma(n) = |S| = |S_1| + |S_2| + |S_3|$.

S_1 划分为两类. S_1 中含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, u_{13}v_{13}$ 的完美对集集合记为 S_1^1；S_1 中含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{13}, v_{12}u_{13}$ 的完美对集集合记为 S_1^2. 由 $\gamma(n)$ 的定义可知

$$|S_1^1| = |S_1^2| = \gamma(n-1)$$

因此，有

$$|S_1| = 2\gamma(n-1) \tag{1}$$

S_2 划分为两类. S_2 中含边 $u_{11}v_{12}, v_{11}u_{12}, u_{13}v_{13}$ 的完美对集集合记为 S_2^1；S_2 中含边 $u_{11}v_{12}, v_{11}u_{13}, u_{12}v_{13}$ 的完美对集集合记为 S_2^2. 由 $\gamma(n)$ 的定义可知

$$|S_2^1| = |S_2^2| = \gamma(n-1)$$

因此，有

$$|S_2| = 2\gamma(n-1) \tag{2}$$

S_3 划分为两类. S_3 中含边 $u_{11}v_{13}, v_{11}u_{12}, u_{13}v_{12}$ 的完美对集集合记为 S_3^1；S_3 中含边 $u_{11}v_{13}, v_{11}u_{13}, u_{12}v_{12}$ 的完美对集集合记为 S_3^2. 由 $\gamma(n)$ 的定义可知

$$|S_3^1| = |S_3^2| = \gamma(n-1)$$

因此，有

$$|S_3| = 2\gamma(n-1) \tag{3}$$

由(1)式和(2),(3)式，得

$$\gamma(n) = 6\gamma(n-1) = \cdots = 6^{n-1}\gamma(1) \tag{4}$$

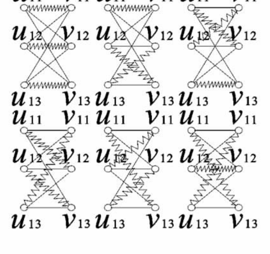

图3　图 G

由图 3 知，$\gamma(1)=6$，故图 $3-nK_{3,3}$ 的完美对集数为

$$\gamma(n)=6^n$$

参考文献：

[1] LOVÁSZ L，PLUMMER M. Matching Theory [M]. New York ：North-Holland Press，1986.

[2] LI S L，YAN W G. The Matching Energy of Graphs with Given Parameters [J]. Discrete Applied Mathematics，2014，162：415-420.

[3] DONG F M，YAN W G，ZHANG F J. On the Number of Perfect Matchings of Line Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics，2013，161(6)：794-801.

[4] 唐保祥，任　韩. 图的 1-因子数目的递推求法 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2019，46(6)：670-675.

[5] 唐保祥，任　韩. 按匹配顶点分类的完美匹配数递推求法 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2019，57(2)：286-290.

[6] 唐保祥，任　韩. 两类特殊图 1-因子数分类递推求法 [J]. 大连理工大学学报，2019，59(1)：106-110.

[7] 唐保祥，任　韩. 按饱和顶点分类的完美匹配数的递推求法 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版)，2019，51(5)：110-114.

[8] 唐保祥，任　韩. 2 类图完美匹配计数公式的嵌套递推求法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(8)：23-27.

[9] 陈　兰. 完全 K 部图的 Hosoya 指标和 Merrifield-Simmons 指标极图 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(6)：14-17.

[10] 王文杰，黄丽娜，李沐春. T-型六角系统的点可区别边染色 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：77-82.

On Calculation Formula for Perfect Matching Number of Two Types of Graphs

TANG Bao-xiang[1]，　REN　Han[2]

1. *School of Mathematics and Statistics，Tianshui Normal University，Tianshui Gansu 741001，China*；

2. *School of Mathematics，East China Normal University，Shanghai 200062，China*

Abstract：The perfect matchings of graphs N_{mn} and $3\text{-}nK_{3,3}$ have been classified according to the edge associated with a vertex，and the recurrence relationship of the number of perfect matchings of each type been obtained，and then the sum and nested recursion methods been used to give the counting formulas for the different perfect matchings in graphs N_{mn} and $3\text{-}nK_{3,3}$ are 2^n and 6^n.

Key words：classification；perfect matching；recurrence relation

责任编辑　廖　坤